Isaac

NEWTON

Principios matemáticos de la Filosofía natural

Estudio preliminar y traducción:
Antonio Escohotado

Altaya

Título original:
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687)

Título en castellano:
Principios matemáticos de la Filosofía natural

Traducción:
Antonio Escohotado (Libros I y III) *y M. Sáenz de Heredia* (Libros II y III)

Estudio preliminar y notas:
Antonio Escohotado

Revisión matemática:
Pablo Fernández-Flórez

Dirección Editorial: Julià de Jòdar
Director de Producción: Manuel Álvarez
Diseño de la colección: Víctor Vilaseca

© Por el Estudio preliminar y notas, Antonio Escohotado
© Por la traducción: Editorial Tecnos, S.A., 1987
© Por esta edición: Ediciones Altaya, S.A., 1997
Musitu, 15. 08023 Barcelona

ISBN Obra Completa: 84-487-0119-4
ISBN: 84-487-0140-2
Depósito Legal: B. 1.344/1994
Impreso en España - Printed in Spain - Mayo 1997
Imprime: Litografía Rosés, S.A. (Barcelona)
Encuadernación: S. Mármol, S.A. (Sabadell - Barcelona)

Distribuye para España: Marco Ibérica. Distribución de Ediciones, S.A.
Ctra. de Irún, km. 13,350 (Variante de Fuencarral) - 28034 MADRID
Distribuye para México: Distribuidora Intermex S.A. de C.V.
Lucio Blanco, 435 - Col. Petrolera 02400 México D.F.
Distribuye para Argentina: Capital Federal: Vaccaro Sánchez
C/ Moreno, 794, 9º piso - CP 1091 Capital Federal - Buenos Aires (Argentina)
Interior: Distribuidora Bertrán - Av. Vélez Sarsfield, 1950
CP 1285 Capital Federal - Buenos Aires (Argentina)
Importación Argentina: Ediciones Altaya, S.A.
Moreno 3362 / 64 - 1209 Buenos Aires - Argentina

Reservados todos los derechos. De conformidad con lo dispuesto en el artículo 534-bis del código penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujesen o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte, sin la preceptiva autorización.

INDICE

ESTUDIO PRELIMINAR ..... *Pág.* IX
AL LECTOR LXXVII
ACLARACIÓN DE ALGUNAS EXPRESIONES MATEMÁTICAS LXXIX
BIBLIOGRAFÍA LXXXII

PRINCIPIOS MATEMATICOS DE LA FILOSOFIA NATURAL

Oda dedicada a Newton por Edmund Halley 3
Prefacio de Newton a la primera edición 5
Prefacio de Newton a la segunda edición 8
Prefacio del Editor a la segunda edición 9
Prefacio de Newton a la tercera edición 26
Definiciones 27
Axiomas o Leyes del movimiento 41

LIBRO I. EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS 59

Sección Primera. Sobre el método de las primeras y últimas razones de cantidades, mediante el cual se demuestran las proposiciones siguientes 61
Sección II. Sobre la determinación de fuerzas centrípetas ... 74
Sección III. El movimiento de los cuerpos en secciones cónicas excéntricas 92
Sección IV. Sobre la determinación de órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas a partir del foco dado 106
Sección V. Cómo hallar las órbitas cuando no se da ningún foco 115

Sección VI. Sobre la determinación de los movimientos en órbitas dadas 149
Sección VII. Sobre el ascenso y descenso rectilíneo de los cuerpos 158
Sección VIII. Sobre la determinación de órbitas en las que girarán cuerpos sometidos a cualquier tipo de fuerza centrípeta . 170
Sección IX. Sobre el movimiento de cuerpos en órbitas móviles; y el movimiento de los ápsides 177
Sección X. Sobre los movimientos de cuerpos en superficies dadas y el oscilante movimiento pendular de los cuerpos 191
Sección XI. Sobre los movimientos de cuerpos que tienden unos a otros con fuerzas centrípetas 208
Sección XII. Sobre las fuerzas atractivas de cuerpos esféricos 239
Sección XIII. Sobre las fuerzas atractivas de cuerpos no esféricos 261
Sección XIV. Sobre el movimiento de cuerpos muy pequeños cuando son perturbados por fuerzas centrípetas tendentes hacia las diversas partes de cualquier cuerpo muy grande 274

LIBRO II. EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS (En medios resistentes) 283

Sección Primera. Sobre el movimiento de cuerpos que son resistidos en la razón de la velocidad 285
Sección II. Sobre el movimiento de los cuerpos que son resistidos como el cuadrado de su velocidad 295
Sección III. Sobre el movimiento de los cuerpos que son resistidos en parte en razón de las velocidades y en parte como el cuadrado de la misma razón 323
Sección IV. El movimiento circular de los cuerpos en medios resistentes 334
Sección V. Sobre la densidad y compresión de los fluidos; hidrostática 343
Sección VI. Sobre el movimiento y resistencia de los cuerpos pendulares 357
Sección VII. Sobre el movimiento de los fluidos y la resistencia a cuerpos proyectados 383
Sección VIII. La propagación del movimiento por los fluidos 425
Sección IX. El movimiento circular de los fluidos 444

LIBRO III. SISTEMA DEL MUNDO (Matemáticamente tratado) . 457

Reglas para filosofar 461

Fenómenos 465
Proposiciones 471
El movimiento de los nodos de la Luna 533
Escolio General 617

ESTUDIO PRELIMINAR

por Antonio Escohotado

Tras seguir sinuosos caminos durante más de dos milenios, en el último tercio del siglo XVII «comenzaban ya a converger piezas aisladas del problema, y la situación había madurado hasta el punto de que cualquier joven que hiciera un estudio completo de todo el campo y tuviese suficiente elasticidad mental estaba ya en condiciones de reunir todos los elementos del problema y, con un poco de intuición, colocarlos ordenadamente» [1].

Isaac Newton nace en Woolsthorpe, condado de Lincolnshire, cuando está acabando el año de 1642. Su padre fue un pequeño propietario rural analfabeto, que murió varios meses antes del alumbramiento. El hijo era un bebé minúsculo y débil, prematuro, que al parecer cabía en un recipiente de litro. La madre, Hannah Ayscough, contrajo nuevas nupcias a los dos años de nacer su primogénito con el reverendo Barnabas Smith, rector de North Witham, un pueblo próximo. Debido a ello, dejó al niño con la abuela durante casi diez años y se mudó al domicilio del esposo, donde crió una segunda familia de tres vástagos. En su confesión de 1662, encontrada en el cuaderno Fitzwilliam, Newton recuerda haber amenazado a su padrastro y a «la madre Smith» con prender fuego a

[1] H. Butterfield, *Los orígenes de la ciencia moderna,* Taurus, Madrid, 1971, pp. 211-212.

la casa y abrasarles dentro; el dato ha sido bienvenido por el psicoanálisis [2] para diagnosticar traumas precoces y profundos creados por la separación de la madre. A los doce años ingresa en la escuela de Grantham, donde se hospeda durante tres cursos en casa del doctor Clark, farmacéutico del pueblo y hombre interesado en la ciencia, que le prestó los primeros libros de física y matemáticas. Durante esos tres años parece haber sentido la única tentación de relacionarse con el otro sexo —personificado por una tal «señorita Stora»— de toda su larga vida. Sin embargo, Voltaire contesta a esa leyenda y afirma que nunca se acercó a mujer alguna, «cosa confirmada por el médico y el cirujano en cuyos brazos murió» [3].

El reverendo B. Smith desapareció pronto, cuando Isaac era ya un muchacho apasionado por la lectura, y dejó a Hannah Ayscough en una respetable posición económica, concretada por una granja y algunas parcelas. Resultaba natural que quisera usar a un joven juicioso en las tareas rurales, y Newton fue sacado con ese pretexto del colegio. Sin embargo, con el tiempo se hizo evidente que la administración de fincas y la explotación agropecuaria no eran su camino. Se distraía, descontento, y daba por otra parte muestras de singularísimo talento en otos campos. Ya mientras estaba en Grantham había ideado como juguetes para uso propio —con menos de quince años— un carrito movido a brazos, artificios hidráulicos y cierto ingenio mecánico asombroso de conceptos y ejecución: un molino de grano accionado por una rata, que se alimentaba con la harina producida por ella misma. A juzgar por algunos testimonios, el futuro gran hombre es al principio un estudiante discreto en latín y algo mejor (pero sin excesos) en matemáticas, que siente pasión por la mecánica y es llevado así —mediadamente— a una progresiva profundización en aritmética y geometría. Sea como fuere, el molino es una especie de *perpetum mobile,* cuya sola concepción implica insólitas capacidades en un adolescente todavía impúber.

Parece que Hannah Ayscough acabó por reconocer la evidencia, gracias a un tío de Newton, que quedó asombrado al verle solucionar un problema de geometría. Por entonces el muchacho leía a escondidas tratados científicos pretextando hacer las tareas encomendadas. Aunque regresó a Grantham y permaneció allí otros dos años,

---

[2] En esta línea se encuentra el libro de Frank E. Manuel, *A portrait of Isaac Newton,* Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1968.

[3] Voltaire afirma habérselo oído personalmente a los facultativos en la decimocuarta de sus *Lettres Anglaises;* cf. *Cartas Filosóficas,* Editora Nacional, Madrid, p. 120.

a la hora de ingresar en el Trinity College de Cambridge (1661) tenía más edad que la normal. Su condición académica allí —*subsizar* primero y *sizar* luego— le da derecho a mantenimiento a cambio de tareas como hacer recados para su tutor, servir a la mesa y comer las sobras. Cambridge está dominado intelectualmente por el empirismo baconiano y por la filosofía de Descartes, apoyada en la autoridad del químico Boyle y el platónico Henry More. Dos años antes ha obtenido cátedras de griego y matemáticas simultáneamente Issac Barrow, a quien será necesario mencionar varias veces en lo sucesivo. Newton elige sin vacilaciones estudiar física y matemáticas, dentro de un clima espiritual muy agitado por las persecuciones religiosas que desata la coronación de Carlos II, una de cuyas consecuencias es el restablecimiento del tomismo en el Trinity College. En 1662, cuanto tiene veinte años, el joven Isaac redacta su emocionante confesión de culpas, donde da muestras de una ingenuidad y franqueza poco común. Dice que ha hecho una ratonera y una pluma en domingo, que ha puesto un alfiler en el sombrero de John Keys para pincharle, que ha falsificado una corona, que ha robado a su madre una caja de golosinas, que ha usado la toalla de otro y, fundamentalmente, que «pone su corazón en el dinero».

La nueva orientación impuesta por el catolicismo de Carlos II le obliga a estudiar a Aristóteles, si bien Barrow sugiere más bien que estudie la óptica de Kepler, la geometría cartesiana y la *Aritmética de los Infinitos* de Wallis. Hacia 1664, sin embargo, escribe de su puño y letra en un cuaderno destinado a ejercicios escolásticos una máxima que permite fechar el comienzo de su carrera científica: *amicus Plato, amicus Aristoteles, magis amica veritas.* Al año siguiente obtiene el *bachellor of arts,* su primer título académico, cuando acaba de morir Fermat y Hooke publica su *Micrographia.* Se desencadena entonces la gran peste, cuya consecuencia inmediata es el cierre de la universidad y un descanso forzoso de dos años. En 1666, retirado en la aldea natal de Woolsthorpe, estalla el incendio de Londres y, al mismo tiempo, un período de asombrosa fecundidad en la vida de Newton, que sienta las bases de sus tres aportaciones fundamentales a la historia del pensamiento: el cálculo, la idea de la gravitación universal y la teoría de la luz y los colores. Medio siglo después él mismo dirá: «I was in my prime for invention, and minded philosphy more than ever since.»

En este año de 1666, que sus primeros biógrafos llamaron sin ironía *annus mirabilis,* «milagroso», Newton domina ya la cosmología y la geometría cartesiana, así como la obra de Gassendi y Bacon, a través de la cual recibe los conceptos atomistas que retendrá toda su vida. Al mismo tiempo, estudia el singular platonismo de More y la tradición hermética, especialmente la rama alquímica y

la mística especulativa medieval que culmina en Jacob Böhme. De entonces data su esfuerzo por superar el cartesianismo y, sin duda, la primera indicación de un destino personal gracias a ello. El racionalismo a ultranza de Descartes vulneraba dos aspectos inalterables de la «filosofía» newtoniana: el puritanismo teológico y la distinción tajante entre espacio y materia.

Así, mientras Inglaterra gemía bajo el peso de cataclismos, uno de sus hijos ensayaba la primera comparación entre la atracción cósmica y la gravedad terrestre, la primera síntesis de Kepler y Galileo. Evidentemente, le faltaban piezas importantes del problema [4], y sólo pudo llegar a una identidad aproximada, donde cabían otras influencias (sobre todo, los torbellinos cartesianos). Whiston, que sucedió a Newton en la *Lucasian chair* de matemáticas, en Cambridge, refiere lo siguiente: «En su primer ensayo sir Isaac fijó la longitud del grado del meridiano terrestre en 60 millas, siguiendo las medidas groseras entonces en uso, con el fin de determinar a partir de ello un grado de la circunferencia que tiene por radio la distancia de la Luna a la Tierra. Pero quedó parcialmente decepcionado, porque el valor que mantiene a la Luna en su órbita, medido por el seno verso de esa órbita, no parecía ser exactamente igual al obtenido suponiendo que la Luna fuese exclusivamente influida por la fuerza gravitatoria. Esa decepción hizo suponer a sir Isaac que dicha fuerza resultaría en parte de los torbellinos cartesianos, y a consecuencia de ello abandonó sus cálculos y pasó a otras investigaciones» [5].

Al año siguiente corresponde el *De gravitatione et aequipondio*

---

[4] A saber: 1) el principio de Hooke (una esfera atrae como si toda su fuerza se concentrase en el centro); 2) el valor exacto de la aceleración, aportado por el *Horologium Oscilatorium* de Huyghens; 3) las dimensiones exactas de la Tierra, si bien conocía los valores bastante aproximados de Snell; 4) poder *deducir* la trayectoria elíptica de un cuerpo atraído en razón inversa al cuadrado de la distancia, cosa únicamente consumada por el Lib. I de los *Principia*.

[5] Cf. *Memoirs of Mr. W. Whiston by himself*, Londres, 1749, p. 9. El testimonio de Whiston es firme por lo que respecta a la repugnancia que entonces y siempre sintió Newton hacia el cartesianismo, pero inexacto por cuanto respecta a los valores usados para determinar un grado del meridiano terrestre. Es cierto que sólo varios años después Picard fijó ese valor en 69 1/3, pero desde 1617 era conocida la medición de Snell (66 2/3), mucho más aproximada que las 60 millas mencionadas por Whiston. Dado que en los *Principia* Newton menciona a Picard, cabría suponer que desconocía los cálculos de Snell y los posteriores de Norwood (69 1/2 millas), pero no es así. Al hacer la edición de la *Geografía* de Varen, en 1672, Newton corrige el cómputo hecho por el autor de las distancias a las cuales puede verse una montaña desde el mar, prescindiendo de la refracción. De acuerdo con Varen, una montaña de una milla de altura podría verse a una distancia de

fluidorum [6], escrito como primera alternativa sistemática y «experimental» al cartesianismo imperante. Newton define allí el lugar («parte del espacio llenada enteramente por una cosa»), el cuerpo («lo que llena un lugar»), el reposo («permanencia en el mismo lugar») y el movimiento («cambio de lugar»). Prefigurando la posición de los *Principia*, ataca la concepción relativista del espacio y el movimiento desde la idea de que el principio de inercia exige un espacio absoluto. En otro caso, «la velocidad de un cuerpo [...] no podría considerarse uniforme, ni recta la línea de su movimiento». Este razonamiento presenta cierto interés. Cuando los *Principia* quieren probar que hay un movimiento absoluto, por ejemplo, recurren al ingenioso experimento del cubo lleno de agua [7], que tan pronto como adquiere un movimiento real asciende por las paredes y se deprime por el centro. Pero para probar que hay un espacio absoluto Newton recurre a una inferencia a partir del principio inercial; tal como alguien podría inferir del principio de economía en la Naturaleza la necesidad del movimiento planetario circular, o como otro podría inferir de la perfección divina la necesidad de una armonía preestablecida. Naturalmente, unas inferencias pueden ser más «legítimas» que otras, pero algo como un espacio absoluto e infinito parece exigir algún tipo de experiencia donde se haga patente a nivel sensible, o bien alguna propiedad captable por la mente, sobre todo cuando al deducirse de la ley de inercia no se deduce en realidad como una consecuencia de ella, sino precisamente como condición a priori de esa ley, cuyo defecto —según Newton— excluye la posibilidad de cualquier movimiento rectilíneo uniforme. Con todo, la ley de inercia se deduce en su formulador —Descartes— de una experiencia bien clara como es la tensión sentida por la mano mientras una piedra gira en la honda. Sólo le queda a Newton el camino de filosofar sobre semejante «ente», y eso es lo que hace.

«Somos capaces de concebir claramente la extensión como algo que existe sólo y sin fundamento *(subjectum)* alguno, al igual que imaginamos espacios situados más allá del mundo o espacios vacíos de cuerpos» [8].

---

29 millas y cuarto, mientras para Newton será visible a 41 millas y media. Lo importante es que dicha corrección se hizo utilizando el valor de Snell. En este sentido, cf. F. Cajori, (ed.) *Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy*, California University Press, Berkeley, 1934, vol. II p. 663, n. 40.

[6] En A. R. y M. B. Hall, *Unpublished scientific papers of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press, 1962, pp. 89 y ss.

[7] Cf. Escolio siguiente a la Def. VIII Lib. I.

[8] *Unpublished...*, p. 99.

Por otra parte, «Es necesario que la determinación del lugar [...] se refiera alguna entidad inmutable, considerada como algo distinto de los cuerpos» [9].

Adentrándose en materia filosófica, Newton afirma que el espacio absoluto no es una substancia, y tampoco «un accidente perteneciente a una substancia» [10], sino un ente especial, un «efecto emanativo» o algo como un corolario de la existencia divina, que treinta años después —en la *Optica*— llamará «sensorio divino», motivando una inmediata acusación de panteísmo voceada por Leibniz [11]. Pero cuando escribe estos pensamientos —nacidos de Barrow y More— Newton no conoce aún las polémicas entre «sabios»,y se muestra tranquilamente especulativo. Lo fundamental es distinguir espacio de «nada» [12], y a esos efectos le parece suficiente empezar diciendo que el espacio posee propiedades (longitud, anchura, profundidad), cuando la nada es sólo una idea absurda [13]. En realidad, la mayor dificultad para concebir el espacio absoluto deriva de su completa infinitud, y es en esa dimensión donde aparece lo más próximo a una experiencia suya: «Porque somos incapaces de imaginar límite alguno sin comprender que hay espacio más allá» [14].

Cabría aplicar el mismo argumento a la línea recta, cuyos límites en cualquiera de los sentidos son infinitos, sin que ello pruebe ni la existencia real ni el carácter absoluto de las rectas. Con todo, Newton está interesado en una doble finalidad desde sus primeras refle-

---

[9] *Op. cit.*, p. 88.

[10] Newton dice *subjectum,* sujeto, pero quiere decir substancia. *Subjectum* traduce el aristotélico *ὑποκείμενον*, «lo que está por debajo de», el «fundamento».

[11] La carta de Leibniz a la princesa Carolina de Gales, en cuya virtud se inicia la famosa polémica con Clarke sobre «los principios de la filosofía natural y la religión», dice en su párrafo 3 que si «el espacio es el órgano del cual Dios se vale para sentir las cosas [...] éstas no dependen enteramente de él y no son su obra». Cf. *La polémica Leibniz-Clarke,* ed. E. Rada, Taurus, 1980, p. 51.

[12] *Unpublished...*, p. 101.

[13] Como todo el siglo XVII, Newton ignora el concepto de la nada como tal concepto, y cree que esas abstractas «propiedades» del espacio hacen de ello un *algo,* cuando bien puede decirse que la nada tiene propiedades también, como estar puesta siempre sin necesidad de otra cosa, fundar lo negativo, etc. De hecho, la anchura, la longitud y la profundidad son determinaciones perfectamente relativas, que dependen de la perspectiva adoptada por el observador; así, lo que para uno es anchura constituye para otro la longitud, o la profundidad, o al revés. Lo único objetivo es que sean tres dimensiones (para un espacio euclidiano).

[14] *Unpublished,* p. 101.

xiones acerca del espacio. La primera es refutar el principio relativista mediante un elemento objetivo, gracias al cual los fenómenos físicos puedan considerarse como algo que no acontece en la conciencia, sino en un ente exterior y «absoluto» como el puro espacio. En otro caso los fenómenos serían de un modo u otro fenómenos del pensamiento, sin perjuicio de su «materialidad» [15]. La segunda finalidad es limitar la (cantidad de) materia, deslindando cuerpo y espacio, ahora ya en virtud de razones estrictamente teológicas.

«Si decimos con Descartes que la extensión es cuerpo ¿no abrimos camino al ateísmo? La extensión no ha sido creada, existe desde toda la eternidad [...] y podemos concebir que existe aún imaginando que Dios no es. Dios y la extensión serían entes completos y absolutos, y el término substancia sería aplicable a ambos en el mismo sentido» [16].

Así pues, sólo si el espacio es infinitamente mayor que su contenido, los cuerpos, puede serle atribuida una existencia objetiva. De hecho, Dios creó la materia confiriendo a ciertas partes del espacio puro una «impenetrabilidad». En otros términos, hizo átomos [17].

Cuando la virulencia de la epidemia hubo pasado, Newton pudo regresar a Cambridge para continuar su carrera académica. Era ya el más grande matemático vivo, aunque sólo él lo supiera por en-

[15] Esta cuestión no se ha planteado todavía con rigor en semejantes términos, que resucitan el dilema entre realismo ingenuo e idealismo crítico. Es bien sabido que en la *Crítica de la razón pura* tanto el espacio como el tiempo pasan a concebirse como categorías a priori *del entendimiento.*

[16] *Unpublished,* p. 109. Es la misma objeción que Berkeley hará al espacio absoluto en sus *Principles of Human Understanding.*

[17] P. Coste, el primer traductor al francés del *Essay* de Locke y de la *Optica,* explica en una nota a la primera de estas traducciones (3.ª ed., Amsterdam, 1735, p. 521) que un día hablando con Newton le comunicó las dificultades que tenía para entender un pasaje singularmente oscuro del *Essay,* donde se hablaba de la creación de la materia por Dios, y que éste dijo ser el origen del pasaje en cuestión, «cuando un día estaban juntos Locke y él con el conde de Pembroke». Coste transcribe del siguiente modo las palabras de Newton: «Podríamos formarnos cierta idea de la creación de la materia suponiendo que Dios impidió por su poder que nada pudiese entrar en cierta parte del espacio puro, que por su naturaleza es penetrable, eterno, necesario, infinito, pues a partir de entonces esa porción del espacio tendría impenetrabilidad, una de las cualidades esenciales de la materia; y como el espacio puro es absolutamente uniforme, basta suponer que Dios habría comunicado esa especie de impenetrabilidad a otra parte semejante del espacio, y esto nos proporcionaría de algún modo una idea de la movilidad de la materia, otra cualidad que le es también muy esencial».

tonces, y le apasionaba el tema de la luz más que ningún otro. En 1668 pasa a ser *master of arts,* y al año siguiente —cuando acaba de cumplir veintiséis años— es nombrado titular de la *Lucasian chair* de matemáticas por expresa recomendación de Barrow, su antecesor. Sus obligaciones docentes en lo sucesivo serían dar una conferencia semanal como mínimo y atender otro día de la semana a los alumos cuando tuvieran dudas o problemas relacionados con la asignatura. Desde entonces, hasta algunos años después, la mayoría de sus disertaciones versaron sobre óptica. De hecho, fue un resumen de esas conferencias lo que envió a la *Royal Society* en 1672 para ser admitido como socio. A partir de aquí comienzan sus tribulaciones de hombre notorio, y mantiene la polémica antes reseñada con Hooke así como otras con Lucas y Linus, profesores de Lieja, y con Pardies, motivadas en parte por equivocarse al suponer que todos los prismas proporcionaban un espectro de la misma longitud. Para cuando se dio cuenta de ello ya era un experto en polemizar con colega sobre prioridades y méritos. A partir de aquí su estilo se hace mucho más prudente y reservado, característica por lo demás bien acorde con su personalidad básica, llena de complejos y recelos; en realidad, a partir de aquí ya no es posible saber a ciencia cierta si dice lo que piensa, o si más bien expresa una mezcla muy personal de lo que le parece prudente afirmar atendiendo a la ortodoxia científica de la época y lo que efectivamente considera verdadero. El ejemplo paradigmático de tal ambigüedad, andando el tiempo, será la consideración de las atracciones como impulsos, que se analizará con cierto detalle más adelante.

La mayoría de los *scholars* newtonianos recientes atribuyen a factores psicóticos la manifesta incapacidad de una mente tan preclara para aceptar cualquier tipo de controversias. Sin embargo, tampoco es fácil aceptar lecciones —muchas de ellas improcedentes— cuando se está en posesión de conceptos magistrales. El joven profesor de matemáticas, tratado con condescendencia como aprendiz de científico, tiene escrito desde 1669 (y enviado a Collins) el texto *Sobre el análisis por series infinitas;* ha intuido una completa matematización de la física y está presentando ahora un texto relacionado con el sensacional descubrimiento de la descomposición de los rayos luminosos por medio de un prisma, que inaugura la espectrografía. El ensayo *Sobre los colores* de 1672 defiende una concepción corpuscular de la luz, considerada como un fenómeno heterogéneo en sí y susceptible de un análisis en elementos simples. Un rayo es un chorro de átomos, de cuya naturaleza depende el color. En efecto, si los rayos individuales poseen propiedades inmutables, ha de haber otros tantos tipos de átomos inmutables. Una revisión de este ensayo será más tarde el Libro I de la *Óptica.*

Newton bien podía sentirse orgulloso y esperar el futuro confiadamente, pero no sucedió así. Incapaz de controlar las emociones evocadas por las polémicas, se aproxima lenta pero invenciblemente a una crisis nerviosa, cuyo síntoma es un progresivo aislamiento. A pesar de ello, a los tres años —pensando tener el apoyo de Hooke para su teoría de los colores— se atreve a presentar a la Royal Society un escrito sobre los fenómenos cromáticos en finas películas, luego inserto como Libro II de la *Optica,* y una «Hipótesis que explica las propiedades de la luz», donde expone un sistema mecánico del mundo articulado sobre el éter universal. Los fenómenos obedecen allí a impulsos propiamente dichos, sin rastro de acciones a distancia todavía.

Hooke reiteró sus ataques, en contra de lo esperado. Según él, el primer texto de Newton se limitaba a desarrollar algunas sugerencias de su *Micrographia,* y el segundo le parecía dogmatismo apriorístico, con los inconvenientes de toda sistematización abstracta que olvida experimentar. Esta fue la gota que colmó el vaso de la carrera académica de Newton en su primera etapa. Desgarrado entre su carácter pusilánime y sus titánicas energías, el futuro pontífice máximo de la ciencia se retira al interior de una concha impenetrable, hasta acabar desapareciendo prácticamente del mundo. Transcurren seis largos años de completo aislamiento, ahondados por la muerte de su madre, donde rechaza cualquier comercio intelectual con sus semejantes y se entrega febrilmente al estudio de místicos y astrólogos, alquimia, teología, historia y ocultismo. R. S. Westfall [18] mantiene la interesante tesis de que el concepto de la acción a distancia proviene de «la tradición hermética», y que —en plena crisis nerviosa— Newton abandona el éter para interpretar los fenómenos como atracciones y repulsiones entre partículas materiales, apoyándose en las simpatías y antipatías alquímicas. Sea como fuere, es evidente que no le interesa la «filosofía natural»; su refugio es la matemática o la especulación teológica, copiar y comparar incunables medievales de inspiración ocultista, todo ello dentro de la certeza que le acompañó toda su vida: la existencia de un conocimiento superior sepultado en la bruma del pasado, accesible sólo a través de un sistema de claves.

[18] «Newton and the hermetic tradition», en *Science, Medicine and Society,* A. G. Debus (ed.), Science History Publications, N. York, 1972, vol. II, pp. 183-198; y «The role of alchemy in Newton's career», en *Reason, experiment and mysticism in the scientific revolution,* M. L. Righini Bonelli y W. R. Shea (eds.), Science History Publications, N. York, 1975, pp. 189-232. Westfall es autor de un excelente ensayo general también: *Force in Newton's Physics,* Macdonald, Londres, 1971.

Pero Hooke no quiere dejarle en paz. Solicita su colaboración activa en la Royal Society y le pregunta qué opina sobre su principio de la gravitación universal. La comunicación epistolar desemboca en nuevas lecciones para Newton y nuevas amarguras, si bien Hooke ha logrado resucitar su interés por la filosofía natural, haciendo que vuelva sobre las reflexiones de quince años atrás. Ahora a la cosa misma se añade la posibilidad de asestar una lección absolutamente definitiva al rival, apoyándose en la limitada formación matemática de éste. Debe haber un momento específico donde Newton comprende que le basta ser capaz de *demostrar* matemáticamente las proposiciones de Hooke para poder presentarse con toda legitimidad como su descubridor, lo cual implica convertirse en el más grande cosmólogo de la historia, a la vez que condenar al enemigo a una negra desesperación. Transcurren entonces casi cinco años. Si hemos de creer el memorándum del matemático De Moivre [19], será un hecho casi casual lo que desencadene la elaboración de los *Principia:*

«En 1684 el doctor Halley [20] le hizo una visita en Cambridge. Tras haber pasado algún tiempo juntos, el doctor le preguntó cuál pensaba que sería la curva descrita por los planetas suponiendo que la fuerza de atracción hacia el Sol fuese recíproca al cuadrado de su distancia desde él. Sir Isaac repuso inmediatamente que sería una elipse. Atónito de júbilo y sorpresa, el doctor le preguntó cómo lo sabía. Pues porque lo he calculado, dijo. Ante lo cual el doctor Halley le pidió sus cálculos sin más demora. Sir Isaac miró entre sus papeles sin poder hallarlos, pero prometió volverlos a hacer, y luego enviárselos» [21].

Evidentemente, el asombro de Halley no se apoyaba en la idea de una fuerza centrípeta, ni en la ley del cuadrado inverso, ni en la elipticidad de las órbitas, sino exclusivamente en la hazaña de «calcular» esas tesis. Dada la rapidez de Newton para el razona-

19 Transcrito por el cuñado de Newton, John Conduitt y publicado por vez primera en D. Brewster, *Memoirs of the life, writings and discoveries of Sir Isaac Newton,* vol. I, pp. 296-297.

20 Edmund Halley había nacido en 1656 y acabaría sucediendo a su mortal enemigo Flamsteed como director del observatorio de Greenwich y astrónomo real. Hábil geómetra y espíritu ajeno a la religiosidad, sus principales contribuciones astronómicas son el germen de la teoría de los llamados movimientos propios y las observaciones del cometa que lleva su nombre.

21 Como señala I. B. Cohen (*Introduction to Newton's Principia,* Cambridge Univ. Press, 1971, p. 50), Halley bien pudo plantear lo contrario, esto es, cuál sería la fuerza central cuando un cuerpo describe una órbita elíptica. De hecho, solicitado por una fuerza inversa al cuadrado de las distancias un cuerpo puede describir elipses tanto como una recta dirigida hacia el centro de fuerza, un círculo, una parábola y hasta una hipérbola.

niento geométrico, es bastante extraño que tuviese ya hecho ese cál-
ulo y no pudiera reproducirlo hasta tres meses después. Bien po-
lría haber sido sólo una intuición antigua, consolidada poco a po-
o, que estaba en su mente como demostración posible; en tal ca-
o, corresponde a Halley haber indicado la trascendencia de seguir
se camino precisamente. El memorándum De Moivre añade: «Pa-
a cumplir su promesa Sir Isaac se enfrascó de nuevo en el trabajo,
ero no pudo llegar a la conclusión que pensaba haber examinado
ntes con pulcritud. No obstante, ensayó un nuevo camino que a
esar de ser más largo le trajo de nuevo a su primera conclusión.
uego examinó cuidadosamente la razón de que el cálculo antes em-
rendido no resultase correcto, y descubrió que al trazar a mano
lzada una elipse había trazado los ejes de la curva en vez de trazar
los diámetros algo inclinados uno hacia el otro, mediante lo cual
abría podido fijar su examen a cualesquiera dos diámetros conju-
gados, cosa imprescindible. Tras percibir esto, hizo que ambos cál-
culos coincidiesen».

Sea como fuere, a finales de 1684 Halley recibe un escrito que
resenta a la Royal Society y se inscribe en el registro como «*Pro-
positiones de motu*». Este breve texto es el germen de los *Princi-
pia*[22]. Desde ese momento hasta comienzos de 1687 —en un plazo
poco superior a dos años— Newton redacta su monumental obra
maestra, que es también la más influyente de la ciencia moderna.
El primer esbozo sólo incluía dos libros, uno que coincide con el
primero publicado y otro redactado en forma más popular, inserto
en este volumen al final. A medida que iba perfilándose el texto
definitivo. Newton comprendió la necesidad de elaborar un nuevo
libro sobre el movimiento de los cuerpos en medios resistentes, y
una vez completado prefirió cambiar la última parte de «vulgariza-
ción» por un libro tercero escrito también *more geometrico*. Es in-
teresante observar que el *De motu* está muy lejos de lo que llegará
a ser la obra, hasta el punto de no contener ni las famosas tres Le-
yes ni el principio de la gravitación universal. Por consiguiente, la
inspiración llegó a Newton sencillamente trabajando, a un ritmo
casi inconcebible, en la deducción de las proposiciones. Como es
archisabido, los *Principia* se concentran en una idea expresable con
pocas palabras diciendo que toda partícula de materia del universo
atrae a toda otra con una fuerza directamente proporcional al pro-
ducto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de las
distancias entre sus centros. El concepto, de alcance grandioso y

[22] El opúsculo contiene varias Definiciones, Leyes y Lemas, seguidos por
once Proposiciones, presentadas en forma de cuatro Teoremas y siete Pro-
blemas, junto con Corolarios y Escolios.

sencillez inigualable, no aparece por lo demás con esa formulación textual en el tratado, que es exclusivamente su verificación matemática. La idea en bruto proviene de Gilbert, con adiciones de Kepler, Borelli y Hooke.

A partir de 1687, año de la publicación, Newton ingresa en la gloria. Aunque la recensión aparecida el año siguiente en el *Journal des Sçavants* es casi injuriosa —y, desde luego, injusta— Inglaterra, ya que no el Continente, recibe con los brazos abiertos al genio capaz de someter los movimientos de los cuerpos visibles a una descripción cuantitativa exacta. Como dirá Halley en la Oda que precede a los *Principia,* los hombres podrán en lo sucesivo «penetrar en las mansiones de los dioses y escalar las alturas del cielo», pues Newton, «el amado de las Musas», fue usado por Apolo para proyectar «el brillo de su propia divinidad». Al año de publicar su gran obra es elegido diputado del Parlamento, cuando lleva ya meses encabezando la resistencia a las medidas catolizadoras de Jaime II como representante de Cambridge. De entonces data el comienzo de su amistad con John Locke, el filósofo; y con el joven matemático Nicolás Fatio de Duillier, relaciones estas últimas mencionadas con malevolencia por Leibniz como *liaisons très particulières,* y cuya intensidad se puede cifrar considerando que durante algún tiempo Newton pensaba incluir un nuevo Corolario en la próxima edición de los *Principia* reconociendo al joven suizo como autor de «la única hipótesis capaz de explicar mecánicamente la gravedad» [23]. La presencia de Fatio en Londres quizá influyó en su decisión de abandonar Cambridge y aceptar un destino ofrecido por su protector Charles Montagne, lord Halifax, como *Warden of the Mind,* director de la Casa de la Moneda. Pero el hecho de permanecer para siempre en ese puesto —aunque luego ascendiera a presidente— expresaba también su decisión de abandonar la actividad académica rutinaria y, sobre todo, crearse saneadas rentas dentro de una ocupación cómoda. Como alto funcionario público despliega una dura campaña contra los falsificadores, a muchos de los cuales logra ahorcar.

Sin embargo, en 1693 sufre una segunda y grave crisis nerviosa. Fatio ha decidido no irse a vivir con él, sino a Suiza, y Newton pasa días enteros en su laboratorio olvidándose de comer y dormir. Hooke le ha acusado de plagio en los *Principia,* Leibniz se mueve hábilmente para conseguir un reconocimiento de prioridad en la invención del cálculo y comenzaban los incidentes con el astrónomo real Flamsteed. Ese otoño la correspondencia de Newton se inten-

[23] I. B. Cohen, *Introduction...,* pp. 184-185, analiza el problema del extraordinario corolario, del que se tienen noticias también por el matemático D. Gregory.

sifica dolorosamente, cesando tras un súbito ataque de demencia. Rompe con Fatio, pasa —según palabras propias— quince días sin dormir más de una hora y otros cinco sin poder hacerlo un minuto siquiera, escribe cartas delirantes a Samuel Pepys y a Locke (a este último acusándole de querer «enredarle» con mujeres). No obstante, su razón es demasiado poderosa para dejarse apresar por la locura. Dos meses más tarde, tras disculparse con Pepys y Locke, reanuda su correspondencia y la actividad normal. Es otra vez el modelo de sobriedad y afabilidad, el hombre que nunca ríe pero se deja llevar cortésmente a la sonrisa, como le definió su amanuense Humphrey, aunque no volverá a hacer esfuerzos sostenidos de creación intelectual. Quizá decidió —con su aplastante sensatez— que no quería trabajar más, que quería vivir ociosamente con la buena conciencia de haber culminado un destino admirable antes de cumplir los cuarenta y cinco años. Le quedan otros cuarenta de vida, enturbiados, eso sí, por un demonio que le acusa de plagio y usurpación mientras el coro angélico celebra su nombre.

Muerto Hooke, Newton acepta la presidencia vitalicia de la Royal Society y es hecho caballero por la reina, acontecimiento hasta entonces sin precedentes en la historia de la ciencia. En menos de cien años el proyecto baconiano del científico ha fructificado hasta extremos imprevisibles, y la sociedad crea con gusto un nuevo lugar preferente para el «investigador experimental». Por lo demás, la inteligencia de Newton es de las que arrastran al reconocimiento, cuando menos en materia matemática. En 1696 J. Bernouilli dirigió una circular a los matemáticos europeos desafiándoles a resolver dos problemas [24] y concediendo un plazo de seis meses. Newton los resolvió en una tarde. Veinte años después, otro intento de Leibniz por encontrar un techo a su capacidad analítica se zanjó de modo más fulminante aún; se trataba de hallar las trayectorias ortogonales de una serie de curvas representadas por una simple ecuación, y el problema apenas le duró unos minutos [25]. Cuando Newton preparaba la tercera edición de los *Principia,* ayudado por Henry Pemberton, una nota de su puño y letra que no llegó a incluirse es de singular interés [26]:

[24] Concretamente: 1) determinación de la braquistócrona entre dos puntos dados que no están en la misma línea vertical; 2) determinar una curva tal que si una recta que atraviesa un punto fijo A la encuentra en dos puntos P_1 y P_2, entonces $AP_1 + AP_2$ será constante.

[25] E. A. Burtt, *The Metaphysical Foundations of Modern Science,* Anchor, N. Y., 1954, p. 207, expresa una opinión común cuando afirma que Newton «estaba dotado [...] con un grado de imaginación matemática probablemente no igualado nunca».

[26] Ms. Add. 3968, f. 415 v. Cf. I. B. Cohen, *Introduction...*, p. 296.

«Galileo empezó a considerar el efecto de la gravedad sobre los proyectiles. El sr. Newton en sus *Principios de la Filosofía* mejoró esa consideración transformándola en una amplia ciencia. El sr. Leibniz bautizó a la criatura con nuevo nombre, como si fuese propia, llamándola *Dinámica.* El sr. Huyghens dio el nombre de fuerza centrífuga a aquella por la cual los cuerpos en revolución se alejan del centro de movimiento. El sr. Newton retuvo el nombre y llamó a la fuerza contraria *vis centrípeta.* El sr. Leibniz la llama *sollicitatio paracentrica,* nombre mucho más impropio que el del sr. Newton. Y si pudiésemos juzgar por la multitud de nuevos nombres y caracteres inventados por él, pasaría por un gran descubridor.»

Uno de los hábitos del Newton maduro es mencionarse en tercera persona, bien a través de recensiones sin firma o bien redactando textos firmados por alguno de sus jóvenes pupilos.

Cediendo a los ruegos de la princesa de Gales, más tarde esposa de Jorge II, Newton comunica a la ilustre dama un resumen de su «nuevo sistema de cronología», del que logró apoderarse —comprándolo al abate Conti— un anticuario parisino, Frèret, quien lo publicó con un estudio refutativo. Este fue el primer texto newtoniano de corte no científico publicado, y el autor tenía buenas razones para sentirse dolido, porque Conti sólo había logrado una copia previa promesa de no exhibirlo y mucho menos publicarlo sin autorización. En cualquier caso, la refutación de la refutación es el origen de *La cronología de los antiguos reinos*[27], que se publicó póstumamente en 1728. Por convergencia de contrarios, el primer gran positivista es un puritano devoto del ocultismo, irresistiblemente atraído hacia la teología especulativa. Laplace y, especialmente, Biot[28] pretendieron considerar estas inquietudes extracientíficas como un rasgo de demencia senil en Newton, pero semejante piedad profesional tropieza con una montaña de hechos categóricos en contrario. En primer lugar, es demostrable que la investigación en materia «hermética» se remonta a los primeros tiempos y se fortalece al ritmo del trabajo en el área físicomatemática. En segundo lugar, la masa de escritos «seniles» de Newton no desmerece en nada a la masa de escritos «sanos». Esto tuvo ocasión de constatarlo el primer y por ahora único editor de unas Obras

---

[27] *The Cronology of Ancient Kingdoms amended, to which is prefixed a short Chronicle from the First Memory of Kings in Europe to the Conquest of Persia by Alexander the Great.*

[28] Vid. *Correspondance de J. Collins et d'autres savants célèbres du XVII^e siècle,* ed. por J. B. Biot y F. Lefort, París, Mallet-Bachelier, 1856.

completas de Newton, el obispo Samuel Horsley [29], tan pronto como tuvo acceso a los papeles personales de sir Isaac. La colección Portsmouth de sus escritos alquímicos, teológicos e históricos reposa parcialmente conservada en Cambridge, a la espera de que alguien ose bucear en el material y lo describa [30]. Pero además de los manuscritos inconclusos Newton redactó en esta esfera varias obras que quedaron listas para publicación. En 1690 escribió a Locke una larga carta, que pensaba imprimir con el significativo título de «Crónica sobre dos notables corrupciones de la escritura», donde defendía el unitarismo y atacaba el dogma trinitario como aberración papista [31]. A esta línea pertenecen sus *Observaciones sobre las profecías de Daniel y el Apocalipsis de San Juan,* y el *Lexicon Propheticum.* Dejó también una *Historia Eclesiástica* completa, una *Historia de la Creación,* y las *Cuestiones paradójicas concernientes a Atanasio,* donde le imputa —entre otras cosas— la calumnia de que Arrio había muerto en el retrete.

Si bien la actividad sostenida de creación termina en Newton antes de 1963, la mayoría de su precoz trabajo matemático se publica con lentitud. El *Método de las fluxiones y las series infinitas,* escrito a instancias de Barrow en 1671, aparece póstumamente. Hasta 1704, como apéndice de la *Optica,* no publica su tratado sobre cuadratura de las curvas, cuyos procedimientos sirvieron para alcanzar los resultados expuestos por métodos geométricos clásicos en los *Principia.* Un año más tarde W. Whiston, su sucesor en Cambridge, edita la *Arithmetica Universalis,* texto correspondiente también a los primeros tiempos de su docencia. Newton mantiene allí una actitud crítica ante la «geometría universal» invocada desde Des-

[29] La muy incompleta edición latina de Horsley se denominaba *Opera quae exstant omnia* y fue publicada con 5 vols. en J. Nichols, Londres, 1779.

[30] Legados por Newton a su sobrina, Catherine Barton, los manuscritos de Newton (o la parte de ellos que éste decidió conservar, pues antes de morir se sabe que estuvo quemando muchos papeles) pasaron a la hija de ésta, condesa de Lymington, que a su vez los legó a su hijo, segundo conde de Portsmouth. En 1872, tras un incendio del castillo de Hurtsbourne Park donde se custodiaban, los Portsmouth decidieron donar a la universidad de Cambridge la parte *científica* de los manuscritos, especificando que lo demás habría de ser devuelto. Algo más de cincuenta años después la parte recuperada por los Portsmouth se vende en pública subasta, con la fortuna de que casi la mitad pudo ser adquirida por lord Keynes, quien la legó al morir (1946) al King's College de Cambridge.

[31] A última hora prefirió no meterse en dificultades heréticas. El «Historical account of two notable corruptions of the Scripture» fue publicado en 1754 con el título *Two Letters from Isaac Newton to Mr. Le Clerc.*

cartes, sosteniendo que el álgebra y la aritmética son las ciencias matemáticas básicas.

Pero el infalible solucionador de problemas matemáticos no se interesa ya por ninguno, tras haber resuelto el principal con su descripción exacta del movimiento en los cuerpos visibles. Presidente de la Royal Society, *Master* de la Casa de la Moneda, reparte su tiempo entre pintores que le retratan y asambleas que le convocan. Hombre de gustos sencillos, piadoso y austero, al mismo tiempo que fríamente despótico, sólo tiene como tarea realmente incumplida una revisión de la teoría lunar expuesta en la primera edición de los *Principia.* El problema se presentaba en principio fácil, porque al frente del recién erigido observatorio de Greenwich está un observador de primerísimo orden como John Flamsteed, capaz de asegurar posiciones dentro de un margen de error de 10'' (cifra significativa si se contrasta con el margen de 1' aceptado por Tycho Brahe), y porque Flamsteed lleva veinte años estudiando de cerca al satélite precisamente. Sin embargo, la feliz coincidencia de intereses desemboca en una virulenta disputa durante quince años. Newton intenta por todos los medios convencer al astrónomo real para que le entregue sus observaciones; primero ofreciendo citarle elogiosamente en los *Principia,* luego mediante chantajes indirectos, más tarde usando sus influencias políticas para nombrar *visitors* con libre acceso al observatorio y, por último, intentando publicar sin su consentimiento el catálogo estelar de Flamsteed, cosa que hubiese llevado a término de no impedirlo una oportuna acción judicial del astrónomo. Flamsteed se dio el gusto de quemar las galeradas ya impresas y asegurarse de que la obra de toda una vida sólo apareciese después de su muerte (1719), en una edición preparada por sus ayudantes.

Los últimos años de Newton estuvieron caracterizados por una incontinencia de orina, agravada por gota y cálculos en la vejiga. Tras asistir a una reunión de la Royal Society se sintió mal y ya no logró recobrarse. El 20 de marzo de 1727, ochenta y cinco años después de nacer, expiró sin pedir los ritos prescritos, tras sufrir —según los médicos— «con admirable paciencia y dulzura» grandes padecimientos. Su cadáver fue enterrado con espléndidos funerales en la catedral de Westminster. Los que le conocieron de cerca, como Whiston, trazan un retrato sombrío de sus ánimos: «Newton era el carácter más receloso, pusilánime y concentrado que jamás haya conocido, y viviendo él no me hubiese atrevido a publicar mi refutación de su *Cronología,* por miedo a ser asesinado.»

Distante y vengativo, inseguro y arrogante, maquiavélico en la persecución de su gloria, psicótico... Los eruditos newtonianos modernos rara vez pueden evitar que se filtre en su juicio personal del

gran hombre una desilusión ante rasgos antipáticos por separado y más antipáticos aún en combinación. Esa parece la contrapartida del triunfo personal, perseguido a cualquier precio e implacablemente custodiado. Desde el acomplejado rústico, que proyecta geniales artefactos, hasta el sumo pontífice de la ciencia universal discurre una larga vida, colmada de alegrías y cumplimientos. El hombre Newton, como animal emotivo, siguió atado a sus comienzos de pobreza y aflicción, que sólo un código puritanamente autoritario pudo mantener bajo control. Con todo, fue capaz de sublimar sus inseguridades en tenacidad, su humilde origen en amor propio, su caos interno en una cosmología supremamente ordenada. El epigrama de Fatio, que se grabó sobre su tumba, nos habla del gigante al que toda una civilización debe las mejores razones para seguir confiando en la ciencia: «Regocíjense los mortales de que haya existido tal y tan grande ornamento del género humano».

1. LOS *PRINCIPIA*

Dice Newton, en su Prefacio a la primera edición, que se ha propuesto «cultivar la matemática en la medida en que se relaciona con la filosofía», entendiendo por filosofía —como era habitual— el estudio de la Naturaleza. Esa relación [32] no es, sin embargo, de mero auxilio en la contemplación del mundo, pues la *mecánica* resultante no busca sólo conocer. Al contrario, usará ese conocimiento como palanca para sus fines, que son sin duda los de la ciencia operativa de Bacon. Los «modernos» —implícitamente Kepler, Galileo, Huyghens— «se han esforzado en someter los fenómenos de la Naturaleza a las leyes de la matemática», y ese someter *(subject)* enfatiza una finalidad práctica. Sin embargo, la traducción de Motte que acaba de mencionarse es demasiado libre. El original latino dice textualmente que «los recientes [...] se han esforzado en reducir *(revocare)* los fenómenos de la Naturaleza mediante leyes matemáticas». No se trata, por eso, de teorizar sobre una geometría universal y omitir la estructura de este específico mundo, al estilo cartesiano, porque la matemática sólo hace filosofía natural cuando logra discernir de modo exacto el *funcionamiento* de este específico mundo [33]. En la línea del positivismo más robusto se afirma que

[32] Que para los «antiguos» se cifraba en la *mecánica,* y que los modernos *(recentiores)* han recobrado tras librarse del interregno donde reinaron «formas substanciales y cualidades ocultas».

[33] A la *geometria universalis*— ya atacada en la *Aritmética*— se opone una *mechanica universalis,* esto es, un esquema preciso de funcionamiento,

«la geometría se funda en la práctica mecánica, y no es sino aquella parte de la mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir».

Precisamente eso harán los *Principia:* medir. Apoyado en su invención del cálculo, Newton demuestra que basta medir con verdadera precisión para hallar un factor causal antes oculto, como ya había expuesto Galileo, La medida rigurosa de un sistema suministra por transposición simple un nexo de necesidad que «solicita» una fuerza. Sabiendo trazar tangentes a las curvas y hallar las áreas comprendidas por ellas, es posible adentrarse con la geometría en el mundo real y —sin inventar hipótesis— medir tiempos y espacios, masas y velocidades, hasta llegar a la ecuación fundamental. Es un arte de la medida lo que permite hacer frente a «toda la dificultad de la filosofía [...]: desde los fenómenos de movimientos investigar las fuerzas de la Naturaleza, y desde esas fuerzas demostrar los otros fenómenos».

Sigue a las precisiones metodológicas un aserto de neto carácter especulativo: «me siento inducido por muchas razones a sospechar que todos los fenómenos de la Naturaleza puedan depender de ciertas fuerzas en cuya virtud las partículas de los cuerpos, por causas hasta ahora desconocidas, se ven o bien mutuamente impelidas unas a otras, y se unen en figuras regulares, o bien se repelen y alejan».

Tras el Prefacio [34] aparece la extensa nota de Roger Cotes sobre la filosofía newtoniana. Con escasas salvedades [35], el texto de Co-

---

cuya sola existencia indica el dominio de algo (Dios) sobre otro (el mundo). No se sabe si el demiurgo buscaba una obra bella o alguna otra cosa con la creación; quizá usó los números, pero su mecanismo —motor y movido— lleva como resultado, para Newton, la huella de una dominación pura y simple. De ahí que la única inferencia legítima ante el estado de cosas (llamado universo) sea tenerlo bien presente y decir, como en el Escolio General, que el atributo esencial del demiurgo es regir, que Poder es su verdadero nombre. No es de extrañar que los humanos —hechos a imagen y semejanza del creador— persigan su esencia en el poder del conocimiento.

Paradójicamente, Descartes siempre permaneció fiel a los principios mecánicos (impulsivos), mientras Newton se declaró incapaz de producir ninguna demostración de la gravedad por principios tales. Al revés, hizo un concepto tan poco mecánico como la atracción el centro de su mecánica, y lamentó siempre no poder explicar más ortodoxamente —por accciones de contacto— su propio hallazgo.

[34] Y una breve nota de Newton a la segunda edición.

[35] Cotes divide a los «filósofos» en tres clases: los peripatéticos (inventores de modos de hablar solamente), los quiméricos (racionalismo sin *common sense,* novelas) y los experimentales («incomparablemente» superiores a los demás).

es es una notable exposición de la obra. Defiende con vehemencia as tesis de los *Principia* contra Leibniz y los cartesianos, anunciando una revelación de «los más hermosos misterios de las cosas». sta constatación se empareja con un énfasis en el experimento; uien se abstenga de interrogar «objetivamente» a la Naturaleza, onfiando en «la sola fuerza de su propia mente, en la luz interna e su razón», es un presuntuoso grotesco, que de un modo u otro ree estar dotado de ciencia infusa. La aportación más personal de otes es su concepto de la gravedad como cualidad *primaria* de las osas [36], donde se le atribuye un contenido físico y no meramente matemático» (como en Newton, que se reserva así la posibilidad e una causa no mecánica para el movimiento gravitacional).

El comienzo propiamente dicho del tratado son las Definiciones, cho en total, que Newton reescribió innumerables veces, como los ersos el poeta, hasta lograr una expresión de concisa sobriedad. a primera contempla la *quantitas materiae* como producto de denidad y magnitud. Esa medida es lo que —dice Newton— «indico n lo sucesivo con el nombre de cuerpo o masa» [37]. La segunda De-

---

No menos pintorescos son algunos comentarios científico-teológicos al inal como el de que «se acabarán hundiendo en el albañal *(in faeces sordi-las)* del rebaño hediondo *(impurissimi)* quienes sueñen que todas las cosas stán gobernadas por la fatalidad y no por la providencia, y que la materia xiste por necesidad natural siempre y en todas partes, siendo infinita y eter-a». En esa línea —quizá para defender a Newton del imprevisto ataque el obispo Berkeley en sus *Principios del conocimiento humano*— añade ue «la eximia obra de Newton será la más segura protección contra los ata-ues de ateos, y de su carcaj pueden extraerse mejor que de ningún otro lechas para desbandar a la impía caterva».

[36] Cotes mantiene que la gravedad es una cualidad tan básica como la xtensión, la movilidad y la impenetrabilidad. Este punto de vista —no deautorizado pero tampoco apoyado por Newton— es el que se hizo popular nmediatamente, hasta el extremo de atribuirse al texto newtoniano mismo. n realidad, Cotes había dicho «esencial» en vez de «primaria» pero tuvo l buen juicio de someter su Prefacio a S. Clarke y éste le señaló sin vacilaiones la necesidad de modificar el adjetivo. En carta del 25/6/1713, Cotes lice a Clark: «Señor, os agradezco haber corregido el Prefacio, y en paricular vuestro consejo sobre el pasaje donde yo parecía afirmar que la gra-edad es esencial a los cuerpos» (cf. Koyré, *Etudes newtoniennes,* p. 199).

[37] Mach consideró tautológico el concepto expuesto. En su famoso libro obre la evolución de la mecánica afirma: «La formulación de Newton que lefine la masa como la cantidad de materia de un cuerpo es desafortunada. Dado que sólo podemos definir la densidad como la masa por unidad de olumen, la circularidad es obvia» (*Die Mechanik in ihrer Entwicklung,* 8.ª d., Brockhaus, Leipzig, 1921, p. 188). El Corolario IV a la proposición /I del lib. III de los *Principia* hace una aclaración parcial: «Si todas las

finición concierne a la *quantitas motus,* como medida generada conjuntamente a partir de la velocidad y la masa. La tercera se refiere a la fuerza ínsita o inercial [38], que Newton toma evidentemente de Descartes reteniendo el matiz kepleriano de fuerza inactiva, aunque refiriéndola al estado en general y no sólo al estado de movi-

---

partículas sólidas de todos los cuerpos son de la misma densidad, y no pueden enrarecerse sin poros, habrá de ser aceptado un vacío (*vacuum*). Llamo cuerpos de la misma densidad a aquellos cuyas inercias están en proporción a sus magnitudes». F. Cajori observa que Newton no precisa si las partículas de igual densidad son todas del mismo tamaño. Sólo en ese caso la densidad de los cuerpos será proporcional al número de partículas por unidad de volumen.

[38] La definición tiene un parecido textual con la que hace del *conatus* la Etica de Spinoza, aparecida once años antes de los *Principia:* «todo cuerpo persevera, cuanto está en él, en su estado» *(corpus unum quodque, quantum in se est, perseverat in statu suo).* La diferencia, naturalmente, es que Newton habla de una fuerza cuantificable, mientras Spinoza identifica el esfuerzo por perseverar en la propia condición con la esencia de la cosa. Pero dicha diferencia no existe al nivel del concepto básico tratado, que es en ambos casos una específica visión ontológica: los entes naturales son ideas particulares, cada una dotada con un poder de resistencia a la alteración en general. Ese poder de resistencia es sencillamente su realidad, esto es, el *cuerpo* de cada una. Donde sí hay una contraposición radical entre Spinoza y Newton es en el modo de pensar lo divino; entre una substancia infinita fluyendo en infinitos accidentes y un Amo estrictamente dicho hay la misma diferencia que entre la inteligencia impersonal de Anaxágoras o Aristóteles y Dios Padre Omnipotente. Sin embargo, hay en Newton un aspecto hasta cierto punto novedoso por cuanto respecta a la teología ya vista, que consiste en no sólo recitar una letanía de perfecciones infinitas personalizadas, sino insistir absolutamente en el *mando,* considerando que es esa la única característica evidente para la razón. A pesar de sus espacios inmensos, el mundo newtoniano no es autosuficiente como lo era el cosmos del *Timeo.* Tan no es autárquico que necesita suplir la disipación universal de momento o cantidad de movimiento interviniendo con nuevos impulsos, sin los cuales la actividad languidecería hasta acabar desapareciendo. En un texto capital de la *Optica* (lib. III, Cuest. 31, p. 343, ed. C. Solis, Alfaguara, Madrid, 1977) Newton se anticipa a su tiempo con una idea germinal pero clara de la entropía: «La fuerza de inercia es un principio pasivo [...]. Con sólo este principio nunca habría movimiento en el mundo. Se requiere otro principio que ponga los cuerpos en movimiento y, una vez en movimiento, otro principio es necesario para conservarlo [...]. El movimiento se puede ganar o perder. Sin embargo, debido a la tenacidad de los fluidos, al rozamiento de sus partes y a la debilidad de la elasticidad de los cuerpos, el movimiento es mucho más proclive a perderse que a ganarse, y siempre está extinguiéndose [...]. Así pues, se presenta la necesidad de conservarlo y reclutarlo mediante principios activos como la causa de la grave-

miento. La cuarta Definición alude a «la fuerza impresa» como causa de cualquier cambio en el estado, fuerza que se distingue de la ínsita o inercial en que «no permanece en el cuerpo cuando la acción ha concluido», y cuyos orígenes son fenómenos como la percusión, la presión o «la fuerza centrípeta». El concepto de fuerza impresa es pregalileano y corresponde a la muy antigua física del *ímpetu*, si bien Newton lo extiende hasta cubrir acciones a distancia; sin más explicaciones que la aliteración de hechos como percusión, presión y fuerza centrípeta, esto último queda implícitamente asimilado a las acciones por contacto.

Las cuatro últimas Definiciones versan sobre la fuerza centrípeta recién surgida, que se plantea en tres ejemplos: la gravedad terrestre, el magnetismo y «aquella fuerza por la cual los planetas son continuamente apartados del movimiento rectilíneo». La *vis centripeta* —concepto acuñado por Newton como tributo a la *vis centrifuga* de Huyghens— puede entonces comprenderse como aquella fuerza cuya suposición se impondría si una piedra girara como si estuviese sujeta por la funda de una honda y dirigida por su cuerda cuando no hay indicio físico alguno de funda, cuerda ni hondero. Ahora bien, eso es lo que acontece en los cielos [39], y cuando

---

dad [...] o como la causa de la fermentación [...]. De no ser por estos principios, los cuerpos de todas las cosas se enfriarían y congelarían, tornándose masas inactivas. Toda putrefacción, generación y vida tendrían que cesar, y los planetas y cometas no permanecerían en sus órbitas.»

Leibniz protestó de inmediato. Esa regeneración de la cantidad de movimiento le parecía una blasfemia contra la competencia mecánica del demiurgo. Si de su mente salió un mecanismo cósmico, es preciso que haya nacido con autarquía (bien gracias a una providencial armonía preestablecida, como él afirmaba, o por estar dotado de dispositivos de retroalimentación —*feedback*—, como diría N. Wiener, por ejemplo). En otro caso será un mal reloj, cosa opuesta al principio de economía en la Naturaleza. Pero Newton pudo contraatacar, a través de Clarke, con otro argumento. Si el Señor crea desde toda la eternidad un mecanismo perfecto, sin disipación ni necesidad de reajustes, queda él mismo relegado a una posición *remota* y *pasiva*. La blasfemia, por eso, es más bien la representación de un mundo cerrado sobre sí e igual a su creador en estatuto. Como dice C. Solis (*op. cit.*, p. 449), los newtonianos optaron por el voluntarismo, en la línea de la teología agustiniana y franciscana, mientras Descartes y Leibniz siguieron una línea intelectualista próxima a Tomás de Aquino, cosa notable teniendo en cuenta que el combate contra la escolástica fue el denominador común del XVI y el XVII.

[39] La definición de Newton de la fuerza centrípeta dice que es «aquella por la cual los cuerpos son arrastrados *(trahuntur)*, impelidos o de algún modo tienden hacia un punto como centro». El texto utiliza unas veces *tractio*

menos a título de suposición *racional* puede ser investigada matemáticamente. En palabras de Newton, «pertenece a los matemáticos descubrir la fuerza que pueda servir exactamente para retener a un cuerpo en una órbita dada con una velocidad precisa».

Este tratamiento matemático se inicia descomponiendo la fuerza centrípeta en tres tipos: absoluta (proporcional a la «eficacia de la causa»), acelerativa (proporcional a la velocidad generada) y motriz (proporcional al movimiento generado). Unas líneas más adelante se advierte: «el lector no debe imaginar que con esas palabras asumo en modo alguno definir el género o el modo de cualquier acción, las causas o la razón física de ella, ni que atribuya fuerzas en sentido físico y verdadero a ciertos centros (que son puntos matemáticos)».

Inmediatamente después aparece un largo escolio sobre los conceptos de tiempo, espacio, lugar y movimiento, que puede considerarse la parte más especulativa de la obra. Newton entiende que dichos conceptos no pueden ser objeto de definición, «por ser bien conocidos de todos», si bien esas «cantidades» suele el «vulgo» concebirlas sólo «a partir de su relación con lo sensible». Eso obliga al autor a una distinción general entre lo absoluto y lo relativo, aplicada a cada uno de los términos.

«El tiempo absoluto, verdadero y matemático, en sí y por su naturaleza, fluye igualmente sin relación con nada externo, y con otro nombre se dice duración; el relativo, aparente y vulgar es alguna medida sensible y externa de dicha duración mediante el movimiento [40].

---

y otras *attractio,* formas sustantivadas de *tahere* (arrastrar, atraer) y *attrahere* (atraer, arrastrar) respectivamente. Newton suele elegir el primer verbo para la voz activa *(corpora... trahunt)* y el segundo para la pasiva *(corpora... attracta sunt).* La diferencia entre una y otra expresión no se deja traducir bien. La «a» de *attractio* es privativa y mitiga el efecto de la fuerza, confiriéndole cierta distancia. *Tractio* carece de esa mediación y simplemente empuja, arrastra. Sin embargo, que el planeta y sus satélites *sese trahunt* no es traducible por «se arrastran», sino por «se atraen».

[40] La idea del tiempo absoluto proviene directamente de Barrow y More. Según Barrow *(The mathematical works of Isaac Barrow,* ed. Whewell, Cambridge, 1860, vol. II, pp. 160 y ss.), el tiempo «es simplemente una capacidad o posibilidad de existencia permanente [...]. ¿Acaso implica el tiempo un movimiento? Contesto que para nada, por cuanto respecta a su naturaleza absoluta, intrínseca [...]; estén las cosas inmóviles o en movimiento, durmamos o velemos nosotros, el tiempo fluye uniforme en dirección». De ahí que la cantidad de tiempo no sea determinada por el movimiento, sino justamente al contrario, aunque el tiempo como «cosa mensurable» implique el movimiento.

»El espacio absoluto, por su naturaleza y sin relación con nada externo, permanece siempre semejante e inmóvil. El espacio relativo es alguna dimensión o medida de los espacios absolutos [41].

»El lugar es la parte del espacio que el cuerpo ocupa, y es absoluto o relativo en razón del espacio.

Algunos años antes Henry More había escrito a Descartes *(Oeuvres,* Adam-Tannery, vol. V, p. 302) en la misma línea: «si Dios aniquilase el universo y crease otro de la nada mucho después, ese intermundo o privación de mundo tendría su duración [...]. Hay por eso la duración de una cosa que no existe, duración que es una especie de extensión; y, por consiguiente, la extensión de la nada, esto es, del vacío, puede medirse por alnas o por leguas, tal como la duración de lo que no existe puede medirse en su inexistencia por horas, por días y por meses». Descartes —defensor del relativismo— estaba, por supuesto, en completo desacuerdo con la opinión del más conspicuo entre los llamados «platónicos de Cambridge».

[41] Barrow tenía un interesante concepto del espacio, con claras raíces teológicas. Para él era impío considerar el espacio como una existencia real, independiente de la divinidad. Dios debe extenderse más allá de la materia, y es precisamente esa sobreabundancia o exceso de la presencia y el poder divino lo que llamamos *espacio* (*op. cit.*, vol. I, pág. 154). Aparte de ello, el espacio «no es sino pura potencia, mera capacidad [...] de alguna magnitud» (p. 158). Fueron Barrow y More, junto con Boyle, quienes popularizaron la idea de que espacio y tiempo absolutos eran sencillamente la omnipresencia y eternidad del demiurgo.

Esta posición, asumida por Newton sin modificaciones, suscita problemas teológicos adicionales. La *Optica,* al final de la Cuestión 28, dice que el demiurgo «ve íntimamente las cosas mismas en el espacio infinito como en su sensorio». Ante las protestas de Leibniz, Samuel Clarke repuso que Newton no identificaba el espacio con el sensorio divino, limitándose a afirmar que Dios percibía las cosas en el espacio como (*tanquam*) en su sensorio. Pero ese «como» fue una adición hecha por Newton cuando el libro estaba ya compuesto en imprenta (cf. A. Koyre, *Etudes newtoniennes,* Gallimard, París, 1968, p. 153, n. 144), y constituye una expresión simplemente amortiguadora. La versión entregada al editor decía: «¿Acaso no es el espacio universal el sensorio de un ser incorpóreo, viviente e inteligente?» Parece entonces poco conforme con la buena fe escribir «en el espacio infinito como en su sensorio» y luego, ante la interpelación de otro, explicar ese concepto indicando el «como» de la frase. Pero tampoco Leibniz brilló por la estricta buena fe, y en su interpelación hay la amenaza de panteísmo, *horribile dictu* con princesas, embajadores y prelados de por medio en la polémica, conforme a sus conocidos gustos.

¿Qué piensa realmente Newton, prescindiendo de su proverbial cautela y su fobia a las controversias? Parece poco discutible que el «sensorio» sea el órgano de la sensación (como reclamaba Leibniz, citando el *Diccionario filosófico* de Goclenio) o —como alegaba Clarke— «el lugar» de la misma, y en ese sentido la misma Cuestión 28 de la *Optica* ha preguntado: «¿No es el sensorio de los animales el lugar en que está presente la substancia sen-

»El movimiento absoluto es la traslación de un cuerpo desde un lugar absoluto a otro, el relativo desde uno relativo a otro relativo» [42].

De estos cuatro conceptos sólo el del movimiento absoluto se presenta acompañado por la verificación experimental, y esto única-

---

sitiva y a donde son llevadas las formas sensibles de las cosas a través de los nervios y el cerebro, para ser allí percibidas por su presencia inmediata en dicha substancia?»

La pregunta es filológicamente sutil. Los «nervios y el cerebro» son sólo un «a través de» para las «formas sensibles», percibidas no *por* sino *en* la «substancia sensitiva», cuyo contacto con esas formas requiere el horizonte de una presencia. La substancia percibe por «presencia inmediata» y —una línea más arriba— porque «está presente». Para que esa presencia pueda darse es preciso un punto de encuentro, un lugar común, absolutamente neutro, infinito e imperturbable. En la propia formulación se advierte la dicotomía cartesiana entre espíritu y corporeidad; es eso lo que se intenta salvar con el horizonte o teatro donde las «emanaciones» o «vapores» de los cuerpos puedan coincidir con el entendimiento animal y humano (la «substancia sensitiva»), o donde el conjunto del universo se haga patente al *Dominus* ubicuo y todopoderoso.

Vale la pena hacer notar que semejante concepto no fue inhabitual en la Inglaterra de la época. El teólogo Cheyne mantenía (*Philosophical Principles of Natural Religion,* Londres, 1705, cor. IV y V, p. 53) que «el espacio universal es la imagen y la representación en la Naturaleza de la infinitud divina [...], por lo cual podemos con justo título llamar sensorio de la divinidad al espacio universal, pues es el lugar donde las cosas naturales son presentadas a la omnisciencia divina».

[42] El problema del movimiento absoluto se replanteará en el XIX, cuando las investigaciones de Faraday y Maxwell sobre electromagnetismo lleven —como dice F. Cajori *(op. cit.,* vol. II, p. 641)— a resultados experimentales que sólo podían explicarse suponiendo movimiento *relativo.* A finales de ese siglo (1892), G. F. Fitzgerald y H. A. Lorentz hicieron por separado la suposición de que un cuerpo en movimiento se contrae siguiendo la línea de dicho movimiento. Una década más tarde Einstein expuso su teoría de la relatividad especial, donde descarta como noción sin base el movimiento *rectilíneo* absoluto y toda simultaneidad deviene relativa, asumiendo un papel central la velocidad de la luz. Newton insiste en un movimiento sin observador o, si se prefiere, en no considerar la *información* propiamente dicha en sus condiciones.

Usando un ejemplo archirrepetido, supongamos que un rayo alcanza un raíl de tren en dos puntos distantes A y B. En el punto medio M hay un obervador parado, que ve el rayo y llama simultáneas a las dos chispas. Sin embargo, hay un tren que pasa en ese momento por el punto medio M', y un observador allí situado *no* considerará simultáneos esos dos fenómenos, porque se acerca a B y se aleja de A. El problema entonces es establecer ecuaciones para distancias y tiempos de un sistema de coordenadas C'

mente para el caso del movimiento circular. El ingenioso experimento del cubo lleno de agua colgado de una cuerda retorcida permite a Newton afirmar que sólo un movimiento circular absoluto producirá el efecto de un alejamiento del eje o, en el caso específico del cubo, una ascensión del líquido por las paredes de su recipiente. El Escolio termina mencionando que la meta de todo el siguiente tratado es «obtener los verdaderos movimientos a partir de sus causas, efectos y diferencias aparentes».

A continuación de las Definiciones vienen los *Axiomata sive leges motus,* que son con mucho la parte más conocida de la obra. La Ley I establece que «todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vea compelido a cambiar el estado por fuerzas impresas». El principio de inercia, continuamente intuido por Galileo y expuesto por Descartes, se convierte así en primera ley o axioma. A título de explicación, Newton menciona los proyectiles y la peonza, cuya detención obedece a la resistencia del aire, y los cuerpos de planetas y cometas, «que retienen durante mucho más tiempo sus movimientos en espacios menos resistentes».

La Ley II establece que «el cambio de movimiento es proporcional a las fuerzas motrices impresas, y se hace según la línea recta

---

(el tren en movimiento uniforme), expresadas en términos del sistema de coordenadas C (la vía recta del ferrocarril). F. Cajori dispone en columnas paralelas los valores x', y', z', t' de un evento con respecto al sistema de coordenadas C' cuando están dados los valores x, y, z, t, del mismo acontecimiento con respecto a C. C' se mueve con respecto a C con una velocidad uniforme v. La velocidad de la luz en el vacío se representa como c. Los ejes de los dos sistemas C y C' son paralelos respectivamente. Se supone, por simplicidad, que el acontecimiento está localizado sobre el eje x.

Transformaciones de Newton	Transformaciones de Lorentz
$x' = x - vt$	$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$t' = t$	$t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

en la cual se imprime dicha fuerza» [43]. La fuerza puede ser impresa completa e instantáneamente, o gradual y sucesivamente.

La Ley III culmina la axiomática: «la acción es siempre contraria e igual a la reacción, como las acciones mutuas de dos cuerpos son siempres iguales y dirigidas a partes contrarias». La superlativa importancia de esta tercera ley en la construcción de los *Principia* deriva de que funda la dinámica gravitacional como sistema de atracciones recíprocas. Un científico tan notable como Cotes, y tan próximo a Newton, seguía pensando en 1713 —un cuarto de siglo después de la primera edición del tratado— que la atracción residía en el cuerpo central [44].

El cotejo de ambos grupos de ecuaciones muestra su respectiva complejidad, pero el esquema relativista y el newtoniano llegan a confundirse cuando los sistemas de coordenadas tienen velocidades v que son infinitesimales comparadas con la velocidad de la luz c. Parece haber sido este hecho lo que permitió a los *Principia* representar con alto grado de aproximación y éxito los movimientos planetarios.

[43] La fuerza *(vis)* se define así como causa de cualquier cambio en el movimiento. Dado que «el movimiento» es en realidad la «cantidad de movimiento», y que esa cantidad se mide como producto de velocidad y masa, la Ley II está formulando la ecuación diferencial, $F = \frac{mdv}{dt}$ de donde surge la medida de la fuerza como producto de masa y aceleración.

Newton fue uno de los primeros hombres que distinguieron masa y peso, considerando invariable la primera cantidad y variable (según la distancia y masa de su centro de gravedad) la segunda. Sin embargo, una vez más prescindió de la velocidad de la luz en las ecuaciones, y ya en 1901 W. Kaufmann demostraba experimentalmente que la masa de un electrón crece rápidamente a medida que su velocidad se acerca a esa velocidad. Así pues, si el peso depende de las condiciones del centro de gravedad, la masa depende de la velocidad, siendo una cantidad esencialmente variable. Esto ha restringido la mecánica newtoniana a fenómenos de pequeña velocidad.

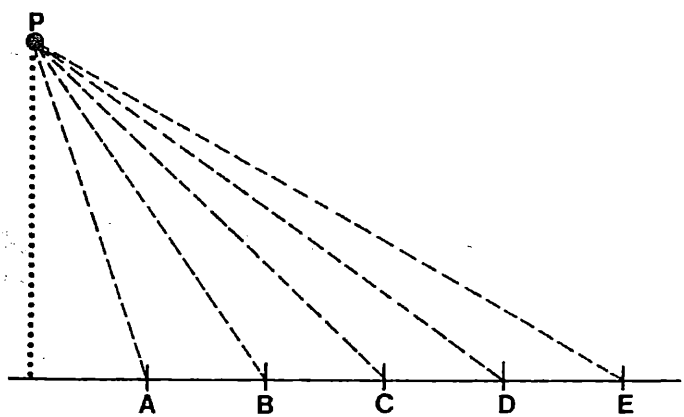
[44] Hay una carta de Cotes a Newton del 18/2/1713 comunicándole que encuentra dificultades en la expresión *cum attractio omnis mutua sit* (Cor. 1, Prop. V, lib. III de los *Principa).* «Creo —dice— que vos suponéis tácitamente que vuestra fuerza atractiva reside en el cuerpo central». Newton responde aludiendo a la Ley III, y añade un argumento de extrema elegancia, que algo modificado se encuentra en el Escolio a los Axiomas: «Si un cuerpo atrajese a otro cuerpo contiguo y no fuese objeto de una atracción recíproca por parte del segundo, el cuerpo atraído arrastraría al segundo y ambos se alejarían hasta el infinito con un movimiento acelerado, como por efecto de un principio motor propio, en contra de la primera ley del movimiento: no existe fenómeno semejante en toda la Naturaleza». (J. Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes,* J. W. Par-

La Proposición I del libro I, apoyada en una deslumbrante demostración de sagacidad geométrica, establece que si un cuerpo gira en torno a un centro de fuerza inmóvil, las áreas descritas por él serán proporcionales a los tiempos de su descripción. En realidad, las áreas serán proporcionales a los tiempos en *cualquier* trayectoria inercial, siempre que se tome como referencia un punto no situado sobre la línea de movimiento [45]; pero Newton está interesado en deducir la ley kepleriana de las áreas para cuerpos «en revolución» precisamente.

La Proposición II, usando la misma figura, demuestra que toda curva descrita por un cuerpo cumpliendo la ley de las áreas «es urgida por una fuerza centrípeta». De hecho, la fuerza centrípeta había aparecido ya en la prueba de la Proposición previa como factor que «actúa con impulso único pero grande», a sacudidas. La acción de esa fuerza va transformando el curso del cuerpo en un polígono, con tantos lados como impulsos o cadencias, que al multipli-

ker, Londres, 1850, p. 154). No contento con ello, añadió al texto de la Ley III, al final del comentario: «esta Ley actúa igualmente en las atracciones, como probará el Escolio siguiente».

[45] Si el cuerpo describe la recta ABCDE con velocidad uniforme, las distancias AB, BC, CD, DE se recorren en tiempos iguales. Conectando los puntos A, B, C, D, E, con el punto de referencia P se formarán los triángulos ABP, BCP, CDP, DEP, todos ellos con bases iguales. Basta entonces levantar una perpendicular desde la línea del movimiento hasta P para tener la altura común a todos; como los triángulos de la misma base y altura son iguales, iguales serán las áreas. Dado que esas áreas se determinan en función de los tiempos, serán iguales en tiempos iguales. Cf. I. B. Cohen, *The newtonian revolution,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980, p. 175.



carse *in infinitum* acaban constituyendo una curva donde cada lado del polígono deviene un punto.

La Proposición IV mide ya las fuerzas centrípetas. El Corolario VI de esta Proposición expone el significado dinámico de la tercera ley kepleriana con gran concisión. Si los tiempos periódicos están en proporción «sesquiáltera» (3/2) de las distancias, «las fuerzas centrípetas serán inversamente como los cuadrados de los radios», esto es, de las distancias. Unas líneas más abajo se observa que «el caso del sexto Corolario es aplicable a los cuerpos celestes (como observaron Wren, Hooke y Halley) [46].

La ley de las áreas justifica así la postulación de una fuerza centrípeta, y la ley de los tiempos periódicos permite una medición de tal fuerza. Las Proposiciones que siguen, hasta la XVII, preparan el descubrimiento del significado dinámico correspondiente a la ley kepleriana de las órbitas elípticas. Según dicha Proposición, la «línea» trazada por un cuerpo obediente a una fuerza centrípeta será siempre «una sección cónica», que en función de la *velocitas* describirá una elipse, una parábola o una hipérbola. Por lo mismo, la forma elíptica no es un decreto del demiurgo pitagórico, sino mero efecto de un decreto anterior y más básico, como sucedía con las otras dos leyes de Kepler. Sin duda, ese decreto es la «gravitación universal», pero todo el primer libro de los *Principia* —la máxima creación newtoniana— está operando con construcciones matemáticas exclusivamente, donde se hace abstracción sistemática de la masa en todos los llamados «cuerpos», que por eso son puros puntos y no cuerpos efectivamente «físicos». No obstante, la matemática de Newton aparece desde el comienzo mismo impregnada por conceptos totalmente físicos [47], nacidos alrededor del legado primordial galileano: la proporción constante de espacio y tiempo para el movimiento uniformemente acelerado, inferencia hecha a su

---

[46] Esta es una de las escasas referencias a Hooke, si bien la mención simultánea de Wren y Halley reduce el reconocimiento de la ley del cuadrado inverso a una opinión popular entre científicos de la época. La referencia verdaderamente elogiosa acontece en el párrafo siguiente, y alude a Huyghens.

[47] El «fisicismo» de la matemática newtoniana es permanente. En el tratado sobre *El método de las fluxiones y las series infinitas* (cf. *The mathematical papers of I. Newton*, ed. Whiteside, Cambridge Univ. Press, 1967, vol. 3, p. 71) dice que «todas las dificultades» pueden «reducirse a dos únicos problemas: I) siendo continuamente (esto es, en todo momento) dada la longitud del espacio, hallar la velocidad del movimiento en cualquier tiempo propuesto; II) siendo continuamente dada la velocidad del movimiento, hallar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto».

vez desde la suposición de que la velocidad es proporcional al tiempo. El hecho de mencionar conceptos como inercia, impulso, planeta, fuerza de gravedad, etc., no debe por eso inducir a confusión. El primer Libro de los *Principia* no pretende demostrar que los planetas sean afectados por fuerzas físicas, sino que —en caso de haber «fuerzas» y aceptado el principio de inercia— éstas serán centrípetas y variarán como los cuadrados de las distancias.

Sólo a partir de la sección XI, tras estudiar prolijamente la determinación de las órbitas, aparece una consideración más realista que prescinde de suponer fijo y único el centro de fuerza: «hasta aquí he expuesto los movimientos de cuerpos atraídos hacia un centro inmóvil, cosa probablemente inexistente en la Naturaleza. Pues las atracciones se producen entre cuerpos, y las acciones de los cuerpos atraídos *(trahentium)* y atrayentes *(attractorum)* son siempre recíprocas e iguales, por la Ley III; así pues, si hay dos cuerpos ni el atraído ni el atrayente se encuentran realmente en reposo, sino que ambos [...] giran en torno a un centro común de gravedad».

Se diría que la «atracción» es el resultado de generalizar la fuerza centrípeta a los casos en que el centro no es único [48]; pero Newton no menciona nada al respecto, salvo que en lo sucesivo estudiará «el movimiento de cuerpos que se atraen unos a otros *(se mutuo trahentium),* considerando las fuerzas centrípetas como atracciones, aunque quizá en términos físicos *(si physice loquamur)* puedan más verazmente llamarse impulsos». En el Escolio que cierra esta sección XI el tema es retomado: «Uso aquí la palabra atracción en general para cualquier esfuerzo *(conatus)* de los cuerpos por aproximarse unos a otros, sea que dicho esfuerzo surja de la acción de los propios cuerpos [...], o sea que surja por la acción del éter, el aire o cualquier otro medio, corpóreo o incorpóreo [...]. En el mismo sentido general uso la voz impulso» [49].

---

[48] I. B. Cohen, *op. cit.* (1980), p. 173.

[49] Esta asimilación es uno de los principales problemas de concepto en la física newtoniana. Ateniéndonos al texto de los *Principia, atracción* significa un esfuerzo con causa indeterminada. No obstante, ¿vale acaso esta definición para *impulso?* Es bien obvio que la dinámica de la época concibe las fuerzas como impulsos, y que considerar la gravedad como un impulso análogo al de una catapulta, por ejemplo, y lograr que otros lo aceptasen evitaría de raíz las acusaciones de herejía mecánica, causa oculta y milagro que abundaron como comentarios a la dinámica atractiva durante el primer cuarto de siglo de su vigencia. Por otra parte, ¿qué quiere decir esfuerzo *(conatus)* con respecto a la atracción? Un impulso es desde luego un esfuerzo, y resulta inmediatamente expresable como trabajo. Una atracción sólo es esfuerzo como acción que desvía a algo de una trayectoria en princi-

El contenido de la sección XI se concentra en los famosos problemas de los dos y los tres cuerpos. El primero de ellos es sencillo y Newton lo resuelve de modo completamente satisfactorio. El segundo, en cambio, presentaba y presenta dificultades insuperables, a pesar de que Newton le dedica mucho trabajo en la difícil Proposición LXVI, con sus veintidós Corolarios [50]. Al final de esta parte, en el Escolio siguiente a la Proposición LXIX, hay un nuevo paso adelante en la adaptación del esquema matemático a la realidad física.

«Estas Proposiciones nos conducen a la analogía existente entre fuerzas centrípetas y cuerpos centrales [...]. Es razonable suponer que las fuerzas dependan de la naturaleza y cantidad de tales cuerpos, como acontece en el magnetismo. Y cuando tales casos ocurren, habremos de calcular las atracciones de los cuerpos asignando a cada una de sus partículas fuerzas propias, y hallando luego la suma de todas.»

Las secciones posteriores estudian las fuerzas atractivas en cuerpos esféricos y no esféricos, así como en cuerpos muy pequeños agitados por fuerzas tendentes a un cuerpo muy grande. En la primera de ellas hay un aserto de carácter general, cuando Newton refie-

---

pio otra, esto es, como lo que incurva los cursos rectilíneos (y acelera o desacelera el movimiento uniforme) de los astros, o hace parabólica la trayectoria terrestre de cualquier proyectil. Sin embargo, en el caso específico de la atracción no hay verdadera contraposición de fuerzas o necesidad de «esforzarse»; el hecho de que las atracciones sean mutuas sencillamente las suma, y la identidad *de facto* entre masa gravitatoria y masa inercial presenta la atracción como una ley macrofísica absoluta en ausencia de cualquier repulsión a ese nivel, rasgo donde se interrumpe, por otra parte, su analogía con el magnetismo y la electricidad. Se comprende que los galileanos, cartesianos y leibnizianos tuviesen dificultades con la asimilación de atracciones e impulsos, cuando las primeras se definen como esfuerzos con causas indeterminadas, pues si algo permite distinguir los impulsos de las cualidades ocultas y las formas substanciales escolásticas es el hecho de ser fuerzas materiales, discretas y mecánicas. Lo curioso es que Newton dice usar el concepto de atracción «para ser más fácilmente entendido por lectores matemáticos»; el comentario podría considerarse un rasgo de humor irónico, si no fuese tan proverbial la seriedad de sir Isaac.

[50] En realidad, tras incontables memorias dedicadas al tema por los matemáticos más ilustres, el teorema de Burns probó que las primeras integrales faltantes —de las 18 requeridas por los 9 grados de libertad correspondientes al sistema de los tres cuerpos— no podrían ser algebraicas, y en 1889 Poincaré demostró que esas integrales no podrían siquiera ser funciones «uniformes». La máxima aproximación para casos especiales se consigue con soluciones periódicas, como la de Lagrange.

re como *notatu dignum* el hecho de que en los dos casos principales de atracción —para cuerpos situados fuera o dentro de una esfera— las fuerzas decrecen como el cuadrado de la razón de las distancias o crecen en razón simple de éstas, pero siempre producen un movimiento de revolución en secciones cónicas.

Viene entonces el paréntesis del libro II, dedicado como el anterior al movimiento de los cuerpos, pero bajo la hipótesis inversa: que los medios son resistentes. Es una opinión extendida que este libro —mucho más «físico» y «experimental»— fue escrito como crítica de la materia-extensión cartesiana y la concomitante teoría de los vórtices, que por lo demás es griega [51]. De hecho, los primeros esbozos de los *Principia* carecen de un análisis sobre la resistencia de los medios; pasan de la elucubración matemática al sistema del mundo. Sin embargo, aunque no hubiese existido Descartes el libro II habría sido necesario para el silogismo nuclear trabajosamente preparado por el libro I. La prueba según la cual los vórtices no explican los movimientos planetarios —que refuta la tesis de un espacio *lleno* o, cuando menos de un éter «denso»— no basta por sí sola para deducir la tesis newtoniana del vacío [52]. Es preciso disertar en general sobre densidad y compresión de fluidos, movimiento de cuerpos pendulares y no pendulares en tales medios, superficies de mínima resistencia, propagación de la luz y el sonido, etc., demostrando la fecundidad del método global usado. El punto culminante de esta parte es quizá la sección VIII («el movimiento propagado a través de fluidos»), donde Newton se enfrenta al problema de las ondas e investiga entre otros aspectos la velocidad del sonido [53].

---

[51] Destaca el hecho de que coincidan Demócrito y Descartes en los vórtices, cuando hay en el segundo un rechazo frontal del atomismo. Newton, que sí era un atomista incondicional, sólo rechazaba la materia sin vacío, y usó la dinámica de torbellinos sin vacilar allí donde reflexionaba sobre el éter (su éter «raro», por contraste con el «denso» de Descartes), como por ejemplo en la famosa carta a Boyle que se mencionará más adelante.

[52] En el escrito llamado *Sistema del mundo,* incluido como Apéndice, Newton comienza la exposición precisamente atribuyendo la certeza de espacios faltos de resistencia a «los egipcios» y a los «pitagóricos», así como «a bastantes *(not a few)* en las primerísimas etapas de la filosofía». En este texto se filtra su pasión por el ocultismo: «de los egipcios recibieron los griegos —pueblo más aficionado al estudio de la filología que al de la Naturaleza— sus conceptos iniciales y más juiciosos en filosofía; y en las ceremonias vestálicas podemos aún trazar el antiguo espíritu de los egipcios, pues entregaban sus misterios —su filosofía de cosas por encima del modo común de pensar— bajo el velo de ritos religiosos y símbolos jeroglíficos».

[53] Allí obtiene un valor de 979 pies (ingleses) por segundo, que aumenta

La última sección del Libro II («el movimiento circular de fluidos») se concentra en el ataque a los vórtices. Estos no permiten explicar una proporción empírica observada como la del cubo al cuadrado, «ni ninguna otra cierta y determinada»; y —en segundo lugar— las partes de un vórtice «nunca podrán» girar en elipses con el Sol en un foco y cumplir la ley de las áreas. Es muy instructivo en este punto que, tras usar prácticamente con exclusividad las tres leyes de Kepler contra la mecánica celeste cartesiana, Newton se refiera allí a las dos primeras como «hipótesis copernicana» y a la tercera como «fenómeno» [54]. Dado que la hipótesis de los torbelli-

---

hasta unos 1.088 compensando la densidad del aire, y que supone capaz de alcanzar el valor experimental —entonces ya conocido— de 1.142 pies aproximadamente «en primavera y otoño, cuando el aire es enrarecido por la suave tibieza de dichas estaciones, y de ese modo se hace algo más intensa su fuerza elástica» (Esc. a la Prop. L). Estas conjeturas se mantuvieron durante más de un siglo, hasta que Laplace descubrió la necesidad de multiplicar la «fuerza elástica» del aire por el factor 1,41, razón entre el calor específico del aire a presión constante y el calor específico a volumen constante. A pesar de su insuficiencia, el análisis de Newton se considera una obra maestra de deducción teórica y, para el propio Laplace es «uno de los rasgos más notables de su genio». Cf. F. Cajori, *op. cit.*, vol. II, pp. 661-662.

[54] A estas alturas el lector estará familiarizado con bastantes casos análogos en la época clásica de la cosmología científica, donde los desinteresados investigadores anunciaban con jeroglíficos los hallazgos para no ceder prioridad (como, por otra parte, siguen haciendo). Con la ciencia moderna nacía una profesión, un medio de ganarse literal y figuradamente la vida, que tuvo en Bacon su pregonero *(buccinator)* supremo. Dentro de las nuevas coordenadas —fundamentalmente: *edificar un saber sin sujeto*— se plantea una tenaz lucha por el reconocimiento, cuyo caballo de batalla es la *propiedad intelectual,* único patrimonio para los practicantes de la *objetividad.* Las polémicas con Hooke y Leibniz a que se vio llevado Newton para defender su particular propiedad intelectual, así como el permanente combate teológico-académico contra el cartesianismo, pudieron ensombrecer grandes partes de vida. Pero eran batallas ganadas de antemano, como el simple transcurso del tiempo vino a demostrar. Con Kepler ya no es lo mismo. Si se suma lo que Newton pudo haber tomado de Descartes, de Hooke y de Leibniz, el producto mal llegará a una pequeña parte de lo que le deben los *Principia* a Kepler. Sólo que Kepler, hombre sin capacidad o voluntad de formar escuela y autopromoverse, sigue siendo un semidesconocido en tiempos de Newton, y está ya muerto hace más de medio siglo; aunque su obra vaya a redescubrirse con el tiempo, lo esencial puede mientras tanto ser reordenado, pulido y completado por otra teoría, siempre que esta construcción logre presentarse como original y segura a la vez. La originalidad se consigue ignorando simplemente la paternidad de las tres Leyes y, sobre todo, ignorando la explicación del movimiento planetario por atracciones, masas y distancias, tal como aparece en la *Astronomía nueva* o, más clara-

nos sólo sirve para enturbiar el funcionamiento del cielo, Newton se siente justificado para volver a los hallazgos y sugestiones del Libro I. Supongamos que hay espacios libres en el firmamento. Y supongamos que en vez de puntos-masa o centros matemáticos de fuerza el esquema se aplica a astros concretos, o a fenómenos como las mareas. Este es el objeto del Libro III, dedicado al sistema del mundo.

En una breve noticia preliminar, Newton menciona que había redactado un tercer libro con «método popular y legible por muchos» [55] pero que decidió componer otra exposición, estrictamente matemática, con el fin de reservar la obra para quienes dominasen su contenido, ahorrándose controversias con ignorantes. Inmediatamente después vienen las Reglas para filosofar *(Regulae philosophandi),* cuya inclusión obedece a razones argumentativas específicas; las primeras Proposiciones del Libro III se apoyarán en ellas, tal como las primeras de Libro I se apoyan en las Definiciones y Axiomas.

La Regla I enuncia el principio de que la Naturaleza no hace nada en vano y «se complace en la simplicidad». Semejante aserto tiene para Newton como consecuencia restringir las *causas* de las «cosas naturales» a las «verdaderas y suficientes». En la importantísima Proposición IV, algo después, esta Regla se alegará como prueba de que la fuerza que retiene a la Luna en su órbita es «la llamada comúnmente gravedad».

La Regla II deduce de la previa que «a los mismos efectos hemos de asignar, en lo posible, las mismas causas». Será mencionada también en apoyo de una gravitación universal en la Proposición IV, y se explica con ejemplos sobre el calor del fogón y el solar, la respiración del hombre y el animal, la caída de una piedra en América y Europa, etc.

La Regla III —tras el apriorismo de las anteriores— es una declaración de compromiso con el saber experimental. «Las cualidades de los cuerpos sólo nos son conocidas por experimentos», dice Newton, y las que «pertenecen a todos los cuerpos al alcance de

---

mente aún, en el *Epitome.* De hecho, la primera edición de los *Principia* contenía una breve referencia a Kepler en el comentario a la Definición VI del lib. I, donde Newton marcaba la diferencia entre su concepto de inercia y el kepleriano, pero fue suprimida desde la segunda edición en adelante; se conserva de puño y letra de Newton el proceso de esta operación, que inicialmente tacha el nombre de Kepler y superpone *aliquorum,* «otros», para acabar excluyendo luego toda la frase.

[55] Se refiere al *Sistema del mundo.*

nuestros experimentos deben estimarse cualidades universales de todos ellos». Esta Regla aparece desde la segunda edición de los *Principia* (1713), sustituyendo a otra, totalmente distinta, donde Newton mantenía que «todo cuerpo puede transformarse en otro de cualquier género, e inducir sucesivamente todos los grados cualitativos intermedios». Aconsejado quizá por Clarke o Cotes, en vez de emitir una declaración semejante Newton afirma el valor absoluto del experimento y, contiguamente, el valor absoluto de la experiencia sensible misma.

«Que todos los cuerpos son impenetrables no lo colegimos de la razón, sino de los sentidos. Al manejar los cuerpos descubrimos que son impenetrables, deduciendo de ello que la impenetrabilidad es una propiedad esencial [...]. Y esto es el fundamento de toda filosofía.»

La última Regla opone a la argumentación *hipotética* la inductiva. El tema llegó a ser una obsesión para el Newton ya célebre, que articuló su filosofía natural como una analítica empírica, diametralmente dispar de la aportación teórica kepleriana, cartesiana o leibniziana por no «fingir hipótesis» [56]. Sin embargo, a Newton le molestaba desde luego más el ruido de la palabra que su idea implícita. La prueba —aplastante— de ello es que a partir de la segunda edición hay una sistemática caza del término en los *Principia,* pero una caza que no cambia el contenido y se limita a poner otra palabra. La edición inicial abría el Libro III nada menos que con *nueve* «hipótesis». De ellas la tercera desapareció por completo, la cuarta quedó como tal aunque desplazada, las dos primeras se convirtieron en Reglas para filosofar y las demás en «Fenómenos». Aún así, la última edición sigue conteniendo tres hipótesis explícitas [57].

---

[56] La traducción del *hypothesis non fingo* presenta graves problemas. El verbo *fingere* presenta tres significados pertinentes: 1) modelar, dar forma (*ars fingendi* es la escultura); 2) componer, redactar (*versus fingere* es hacer rimas); 3) fingir, fraguar, maquinar falsamente. Andrew Motte, autor de la primera traducción, dice *I frame no hypothesis,* expresión traducible por «no propongo (o invento) hipótesis». A. Koyré insiste en el tercer sentido de *fingere,* cuyo matiz es directamente acusatorio, y probablemente con razón, porque en la Cuestión 29 de la *Optica* —escrita en inglés originalmente por Newton— la expresión es *feigning hypothesis,* esto es: fingir hipótesis. Sin embargo, la elección del término resulta entonces sigularmente arriesgada, pues supone sencillamente insultar a los que especulan, como si lo hiciesen de mala fe y con ánimo de maquinar falsamente, cosa insólita en un pensador tan ligado a la especulación como el propio Newton.

[57] La que abre la secc. IX, lib. II, la que sigue a la Prop. X del lib. III, y la que aparece tras el lema III de la Prop. XXVIII en ese mismo libro. A ellas han de añadirse las Reglas y Fenómenos del tercer Libro y, por su-

Newton redactó una Regla V insistiendo sobre lo mismo, si bien al final quedó sin imprimir en la tercera y última edición hecha mientras vivía [58]: «Deben considerarse hipótesis cualesquiera cosas no derivadas de los objetos mismos, sea por los sentidos externos o por la sensación de pensamientos internos. Siento así que estoy pensando, lo cual no podría suceder si al mismo tiempo no sintiese que soy. Pero no siento *(sentio)* que idea alguna sea innata [...]. Y aquellas cosas que no se siguen de los fenómenos ni por demostración ni por argumento inductivo las considero hipótesis».

Aquí es bien visible la polémica con las ideas cartesianas, que se traslada a un terreno estrictamente ontológico como la cuestión de las ideas innatas. Quizá por eso, estimulado o no por su último colaborador, Pemberton, Newton decidió suprimir la Regla entera.

Dando pruebas de gran comedimiento metodológico, los *Principia* no pasan directamente de las Reglas a la tesis principal de su contenido. Antes bien, lo que sigue son seis «Fenómenos», donde aparecen una vez más las leyes de Kepler, si bien enunciadas de modo un tanto especial. Los dos primeros Fenómenos establecen que la proporción del cubo al cuadrado entre tiempos periódicos y distancias se cumple para los satélites de Júpiter y Saturno respectivamente. El Fenómeno tercero establece simplemente el heliocentrismo, indicando que «los cinco planetas primarios» —con exclusión de la Tierra— giran en órbitas alrededor del Sol. El Fenómeno cuarto constata la proporción del cubo al cuadrado para los planetas primarios, el quinto la vigencia de la ley de las áreas para esos mismos cuerpos, y el VI la vigencia de dicha ley para el circuito de la Luna en torno a la Tierra.

Comienza entonces el Libro III propiamente dicho, cuya Proposición inicial mantiene que los satélites de Júpiter *(planetae circumjoviales)* son retenidos en sus órbitas por fuerzas tendentes al centro de este planeta, inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias. La prueba de esta Proposición —dice Newton—

---

puesto, las llamadas Leyes o Axiomas del movimiento, que son hipótesis extremadamente razonables y de probada fecundidad, así como buena parte de las Cuestiones formuladas al final de la *Optica,* y muy especialmente todo lo relativo al éter. «Así, admitir la existencia del vacío, de los átomos y de fuerzas no mecánicas no es fingir hipótesis; en cambio, postular el pleno, los torbellinos y la conservación de la cantidad de movimiento es hacerse culpable por empleo de ese método [...]. Hacia el final de la vida de Newton el término hipótesis parece haberse convertido en uno de esos términos curiosos como, por ejemplo, el de herejía, que nunca aplicamos a nosotros mismos sino a los otros» (A. Koyré, *Etudes...,* p. 73).

[58] Cf. I. B. Cohen, *Introduction...,* p. 30.

se sigue del Fenómeno primero y de las Proposiciones II «o» III del Libro I, concernientes a la fuerza centrípeta. La Proposición II establece lo mismo para los planetas «primarios» en relación con el Sol, y la siguiente igual circunstancia para la Luna y la Tierra. Se llega así a la celebrada Proposición IV, momento decisivo de toda la obra, que contiene el llamado test lunar. «La Luna», afirma Newton, «por la fuerza de gravedad [...] es retenida en su órbita». La prueba concreta propuesta se cierra con un texto de trascendencia impar: «Así pues, la fuerza por la cual es retenida la Luna en su órbita se hace, en la superficie misma de la Tierra, igual a la fuerza de gravedad entre nosotros, y así (por las Reglas I y II) la fuerza en cuya virtud la Luna es retenida en su órbita es aquella misma fuerza que solemos llamar gravedad. En efecto, si la gravedad fuese una fuerza distinta los cuerpos descenderían hacia la Tierra con el impulso combinado de ambas fuerzas y doble velocidad [...], cosa completamente contraria a la experiencia».

Sólo resta aplicar el Axioma I al resultado obtenido, diciendo que esa fuerza de gravedad, inversamente proporcional al cuadrado de las distancias, es directamente proporcional a las cantidades de materia o masas, como afirma la Proposición VI. Hay, pues, una gravedad universal, cuya medida depende sólo de masas y distancias, y esa fuerza explica de golpe todos los fenómenos celestes con increíble sencillez. Parece entonces imposible, dentro de la exactitud requerida por la ciencia físicomatemática, que realmente se cumpla el «fenómeno» enunciado por la Proposición XIII del Libro III: «Los planetas se mueven en elipses que tienen su foco común en el centro del Sol, y por radios trazados hasta ese centro describen áreas proporcionales a los tiempos de descripción».

Es forzoso que cualquier cuerpo sufra la influencia de todos los otros, y que por lo mismo no describa elipses regulares ni idénticas en cada revolución, incumpliendo de paso el principio de las áreas. Pero ya en la Proposición LXV del Libro I había asumido Newton las leyes keplerianas como determinaciones *quamproxime.*

«Aquellos cuerpos cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias desde sus centros pueden moverse entre sí en elipses, y por radios trazados hasta los focos describir áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos.»

En el comentario a esta Proposición se menciona que los cuerpos sólo podrían moverse exactamente en elipses «guardando cierta proporción en las distancias respectivas». A propósito de ello, K. Popper [59] observa que en la teoría de Newton se demuestra la

[59] *Objective knowledge, an evolutionary approach,* Clarendon, Oxford,

«estricta invalidez de las leyes de Kepler». La tercera o armónica, en particular, sólo podría ser válida si todos los planetas tuviesen la misma masa o, subsidiariamente, si sus masas fuesen tan mínimas en relación con la masa solar como para considerarse igual a cero. Sólo que entonces —continúa Popper— «un cuerpo de masa cero no obedecería a las leyes newtonianas del movimiento» [60]. Sin embargo, en el caso de la Tierra y el Sol, por ejemplo, dada la distancia y las masas, el centro común de gravedad no se encontrará en el centro geométrico del Sol, sino a unas trescientas millas de dicho punto. Esa «minucia» no afecta de modo sensible los cálculos, y lo mismo acontece con las acciones de los planetas entre sí, pues sus masas —dadas las distancias— producen perturbaciones

1972, p. 200. Hay trad. cast.: *Conocimiento objetivo. Un enfoque evolucionista,* Tecnos, Madrid, 1982.

[60] Con todo, la tesis de Popper es más correcta formal que intrínsecamente. Las leyes keplerianas son *visiones,* las de Newton *construcciones reflexivas.* Un sistema como el newtoniano no puede convalidar ni invalidar esas leyes, sino sólo *interpretarlas.* Por otra parte, toda la determinación de trayectorias y el análisis matemático del Libro I de los *Principia* ha usado como sinónimo de «cuerpo» una partícula de masa cero. O también puede decirse que se sirve de partículas sumamente extrañas, inextensas como el punto pero dotadas de masa, lo cual implica, a su vez, una densidad infinita. Unicamente porque es imposible que existan orbes y las leyes de Kepler se cumplen (aproximadamente) pudo Newton deducir una ley de gravitación universal, apoyándose además para ello en una idea dominante a lo largo de todo el siglo XVII. Kepler «dedujo» la existencia de una «virtud» solar estudiando las condiciones del movimiento planetario, pero sus tres leyes no fueron «deducidas», sino «halladas». Esta diferencia es la misma que hay entre una verdad realmente imprevista y una verdad implícita, actualizada por un trabajo reflexivo.

¿*Sabía* el sentido común que las fuerzas se componen y se descomponen, que los proyectiles describen parábolas, que a nivel macrofísico se evidencia una especie de magnetismo sin imanes, que todo movimiento tiende a ser recto, que la acción solicita una reacción y viceversa, que una —o la mejor— razón de algo es su medida? La respuesta ha de ser afirmativa, por mucho esfuerzo que costase luego a los científicos demostrarlo empírica o matemáticamente, y por eso mismo tales hallazgos son más bien constataciones que adoptan la forma de axiomas o leyes. Pero ¿*sabía* el sentido común que los planetas describen elipses, acelerándose y desacelerándose en proporción a sus posiciones respecto del foco solar? ¿Sabía que un rayo incidente sobre un prisma permite analizar la luz, o que la fuerza que retiene a la Luna en su órbita es idéntica a la que arrastra a los graves hacia la Tierra? Estos últimos hallazgos tienen los rasgos de verdades imprevistas, puramente «experimentales», cuyo estatuto es el de la *theoreia* pitagórica, como contemplación o visión privilegiada del mundo, suscitada por un azar favorable.

«despreciables». Las únicas salvedades importantes a esta circunstancia específica del sistema solar son, para Newton, la acción de la Luna sobre la Tierra y la de Júpiter sobre Saturno. En realidad, «un planeta tiene tantas órbitas como revoluciones, como sucede con el movimiento de la Luna, y la órbita de cualquier planeta depende del movimiento combinado de todos, por no mencionar la acción de todos ellos entre sí. Pero considerar simultáneamente todas esas causas de movimiento y definir tales movimientos mediante leyes exactas [...] excede, salvo que me equivoque, la fuerza del intelecto humano en su conjunto» [61].

Por consiguiente, las leyes keplerianas del movimiento planetario son leyes fenomenológicas, descriptivas, no factores causales ni cauces o reglas impuestos por el ser divino al sistema solar. Obsérvese que lo fundamental ya no es —como en Copérnico, Galileo o Kepler— la *figura* (elíptica, circular) ni el tipo de movimiento (de rotación, orbital), sino la ecuación de masas y distancias. El demiurgo ya no es el esteta y geómetra del *Timeo* platónico. Es más bien un físico matemático o, como precisará el Escolio General de los *Principia,* un incorpóreo *dominus pantocrator,* un Amo con siervos (los vivientes), propiedades (la materia inorgánica) y principios de orden (espacio, tiempo). La exactitud ya no es geométrica y, por lo mismo, sin trabajo, sino el resultado del cálculo, trabajo puro. El número racional ha devenido número *real,* de manera que la determinación del movimiento se convierte para el intelecto humano en un problema propiamente infinito. Desde el demiurgo, en cambio, la constitución del mundo se simplifica extraordinariamente, pues su decreto no es una especie de código del movimiento planetario —como las leyes de Kepler—, sino una sola norma mucho más simple y de alcance cósmico para los cuerpos: atraerse recíprocamente (como había dicho Hooke).

Lo restante del Libro III se dedica al problema de la Luna y, en su última parte, a los cometas. Newton luchó con la Luna como Rético y luego Kepler con Marte, dando muestras de una tenacidad prolongada que en algunos momentos llegó a amenazar su salud física y mental. Abrumado por jaquecas e insomnios, dijo a Halley que no volvería a pensar en la cuestión [62], pero siguió ocupándose de ella hasta muy poco antes de morir, si bien con resultados no enteramente satisfactorios. La teoría gravitatoria no logra explicar con exactitud los complicados movimientos lunares, quizá debido

[61] Newton, en J. Herivel, *The background of Newton's Principia,* Claredon, Oxford, 1965, p. 301.

[62] Cf. Brewster, *Memoirs...,* vol. II, p. 108.

a la variación en la tasa de rotación terrestre. En realidad, la Luna continúa siendo un enigma para los científicos de nuestro siglo, que siguen encontrándose con desplazamientos inesperados o inexplicables del satélite.

Siguiendo los pasos de Kepler —aunque, naturalmente, sin mencionarle— Newton atribuye las mareas a la atracción lunar y solar, siendo más marcada la primera en razón de su cercanía a la Tierra. A causa de la traslación de la Luna, los dos influjos se producen según Newton con un retraso medio de casi cincuenta minutos —resultado acorde con las observaciones— y al sumarse ocurren las máximas mareas altas. Con todo, al comparar las fuerzas de levantamiento de las mareas debidas al Sol y la Luna, los *Principia* exponen un cálculo de la masa lunar casi dos veces superior al hoy aceptado. Por otra parte, la explicación gravitatoria de las mareas sólo sirve realmente para alta mar, y resulta incapaz de predecir el número de mareas en cualquier puerto o costa.

La última parte del tratado se refiere a los cometas. Newton fue el primer astrónomo que los consideró «una especie de planetas», y utilizó con éxito para determinar los elementos de sus órbitas una aproximación parabólica, tanto en el caso de cometas periódicos (con trayectorias elípticas) como en el de los no periódicos (con trayectorias parabólicas). Apoyándose en el cometa de 1680 como «Ejemplo», Newton establece que los movimientos de estos cuerpos son regulares y «están gobernados por las mismas leyes que el movimiento de los planetas». La gran excentricidad de sus órbitas prueba, adicionalmente, que su curso por los espacios siderales exhibe una libertad incompatible con la idea de los vórtices.

Los *Principia* se cierran con el extraordinario texto del Escolio General, añadido desde la segunda edición, que unos consideran producto senil y otros componenda política. En realidad, es algo tan anómalo como un breve ensayo de teología positivista, apoyado en un hilo lógico más sólido de lo que en principio parece. Coincidiendo con Locke, Newton considera evidente que «no conocemos en lo más mínimo la substancia real de cosa alguna» y que, por tanto, mucho menos conocemos el interior de la naturaleza divina. Sin embargo, aunque las substancias sean inaccesibles al entendimiento, sus atributos y accidentes sí lo son, y a partir de esas circunstancias Newton considera posible una declaración racional sobre el mundo y sobre su demiurgo.

Sobre el mundo se dice: «Este elegantísimo sistema del Sol, los planetas y los cometas sólo podía proceder del consejo y dominio de un ser inteligente y poderoso. Y si las estrellas fijas son centros de sistemas semejantes, estarán bajo el dominio de *Uno* al estar construidas a partir del mismo consejo».

Y unas líneas más adelante: «La ciega necesidad metafísica, que es ciertamente la misma siempre y en todo lugar, de ningún modo podría generar la variedad de las cosas».

Sobre el demiurgo se viene a decir que sabemos de él su mando o, dicho en otros términos, que nada es para sí en el universo corpóreo: todo se encuentra gobernado, regido, «forzado», por una voluntad absolutamente eficaz. Es ese rasgo de las cosas en general lo que delata un ente divino, y en el ente divino ese rasgo ha de considerarse como lo esencial.

«Este ser gobierna todas las cosas no como alma del mundo, sino como amo de todas ellas *(dominus universorum).* Y debido a su dominio suele llamársele señor dios, παντοκράτωρ [63], porque dios es un término relativo y se refiere a los siervos; y deidad es el dominio de dios no sobre su propio cuerpo, como imaginan aquellos para quienes dios es alma del mundo, sino sobre siervos [...]. El término dios significa en general amo, pero no todo amo es dios.

[63] La traducción del *dominus* que emplea Newton para designar al demiurgo plantea una cuestión delicada, dado el contexto del Escolio General. Señor, dueño y amo traducen igualmente *dominus,* si bien el dominio no se concibe del mismo modo en cada término; el amo es amo de esclavos, el dueño es dueño de algo inanimado, de una maquinaria por ejemplo, y el señor —cubriendo los dos casos anteriores de modo genérico— puede regir sobre individuos libres también. La democratización de los últimos siglos ha llevado a usar el término «señor» como prefijo de cualquier apellido, y en esa medida puede ser más fiel a las intenciones de Newton traducir *dominus* por amo y dueño, cuando expresa y repetidamente «dios» se ha considerado *vox relativa et ad servos refertur.* La traducción incluye entonces, sin perder literalidad, el elemento específicamente newtoniano de un demiurgo visto desde sus esclavos o mecanismos. Más que ningún otro es ese demiurgo el *deus ex maquina,* que resulta postulado inevitablemente a partir de la construcción mecánica «elegantísima» llamada Sistema del Mundo. De ahí la ausencia de atributos edificantes como misericordia, justicia e incluso bondad, que dentro de la óptica de Newton serían ya *hipótesis,* mientras el dominio puro y simple, el «ser para otro» del mundo como dinámica de cuerpos inertes movidos según leyes matemáticas, se considera un «fenómeno» evidente, surgido de una legítima inducción, como prueba la declaración final newtoniana: «...y hasta aquí lo que concierne a dios, de quien procede ciertamente hablar en filosofía natural partiendo de los fenómenos».

En esta dirección puede entenderse la supresión de la mayúscula para *deus* y *dominus* en todos los lugares de los *Principia* donde aparecen los términos. Si, como aclaró Pemberton, a partir de la tercera edición sólo se conservan las mayúsculas para los «nombres propios», es evidente que Newton no considera persona individual al demiurgo. Su antitrinitarismo apoya, por lo demás, esta orientación «deísta» que ya defendía su amigo Locke.

o que constituye a dios es el dominio de un ente espiritual, que rá como tal dios verdadero, supremo o imaginario según sea ver- adero, supremo o imaginario ese dominio [...]. Sólo conocemos Dios] por las sabias y óptimas estructuras de las cosas, y lo ad- iramos por sus perfecciones, pero lo reverenciamos y adoramos or su dominio. Pues lo adoramos como siervos, y un dios sin do- inio, providencia y causas finales nada es sino fatalidad y natura- za.»

La perfección del dominio reside en que se hace «sin pasión recí- roca» *(sine mutua passione),* entendiendo por pasión el hecho de r afectado o pasivizado algo por otro, pues «dios nada padece or el movimiento de los cuerpos, y éstos no hallan resistencia en omnipresencia divina».

Atacado por el obispo Berkeley en términos ontológicos, aunque on peligrosas connotaciones de llamada al orden en materia teoló- ca [64], Newton perfila las relaciones del demiurgo con el espacio el tiempo: «Dios no es eternidad e infinitud, sino eterno e infini- ; no es duración o espacio, sino que perdura y está presente. Per- ura siempre, y es ubicuo, y existiendo siempre y en todas partes onstituye la duración y el espacio. Puesto que cada partícula de spacio es *siempre,* y cada indivisible momento de la duración es *bicuamente,* con certeza el artífice *(fabricator)* y amo de todas las osas jamás será *nunca* y *ninguna parte*».

Tras este conjunto de aseveraciones, «pertenecientes desde lue- o», según Newton, «a la filosofía natural» [65], hay un párrafo de- icado a la fuerza de gravedad.

«Hasta el presente no he sido capaz de descubrir la causa de las ropiedades de la gravedad partiendo de los fenómenos, y no finjo ipótesis; pues todo cuanto no es deducido a partir de los fenóme- os debe llamarse hipótesis, y las hipótesis, metafísicas o físicas, obre cualidades ocultas o mecánicas, no tienen lugar en la filoso- ía experimental [...]. Basta que la gravedad exista realmente, y ac-

[64] En sus *Principles of Human Knowledge* (1710), Berkeley ataca fron- almente las ideas de tiempo, espacio y movimiento absoluto. «He de con- esar que sólo se me hace presente un movimiento *relativo,* de manera que eben al menos concebirse dos cuerpos para ser concebible un movimiento ...]. Pero la principal ventaja del espacio relativo es quedar liberados del eligroso dilema de pensar o bien que el Espacio Real es Dios, o bien que ay además de Dios algo eterno, increado, infinito, indivisible, inmutable. mbos conceptos pueden en justicia considerarse perniciosos y absurdos» *Principles,* I, pár. 117).

[65] La primera redacción del Escolio decía «filosofía *experimental*».

túe con arreglo a las leyes que hemos explicado, y dé cuenta de todos los movimientos de los cuerpos celestes y de nuestros mares.»

Con unas líneas misteriosas sobre «un espíritu sutilísimo», más adelante tipificado como «eléctrico y elástico» [66], terminan los *Principia.*

2. LAS EDICIONES DE LOS *PRINCIPIA*

Como es sabido, Newton dedicó y envió el manuscrito de su traslado a la Royal Society [67], que decidió imprimirlo a su costa cuanto antes [68], y encargar a Edmund Halley la edición, cuya tirada fue

[66] El texto latino carece de las palabras «eléctrico y elástico», que aparecen por primera vez en la traducción de Motte, pero que en realidad provienen de un ejemplar de los *Principia* anotado por el propio Newton. Al parecer, Newton estaba pensando en efluvios eléctricos y en fenómenos de polaridad. Sin embargo, también puede tratarse del «espíritu hilárquico» de Henry More o, más probablemente aún, de una referencia al *éter* (como pretendía el anónimo autor de la recensión a la segunda edición de los *Principia,* publicada en las *Acta Eruditorum* de marzo de 1714).

[67] La presentación oficial del manuscrito tuvo lugar el 28 de abril de 1686. En su *History of the Royal Society of London for Improving of Natural Knowledge* (Johnson Reprint Corp., Londres, 1968, vol. 4, pp. 479-480), T. Birch detalla lo siguiente: «El doctor Vincent presentó a la Sociedad un manuscrito titulado *Philosophiae naturalis principia mathematica,* y dedicado a la Sociedad por el sr. Isaac Newton, donde suministra una demostración matemática de la hipótesis copernicana tal como es propuesta por Kepler, resolviendo todos los fenómenos de los movimientos celestes mediante la sola suposición de una gravitación hacia el centro del Sol que decrece inversamente como los cuadrados de las distancias. Se resolvió escribir una carta de agradecimiento al sr. Newton; y que la impresión de su libro pase a la consideración del Consejo; y que mientras tanto sea puesto en manos del sr. Halley, para que haga un informe del mismo al Consejo».

La referencia a Kepler pudo ser obra del indignado Hooke, por entonces Secretario de la Royal Society, o de cualquier otro, incluido el propio Birch, que publicó su *Historia* en 1757 originalmente, pero contrasta con el silencio de los *Principia.*

[68] Un mes más tarde, en carta de 22/5/1686, Halley escribía a Newton: «Vuestro incomparable tratado [...] se presentó a la Royal Society el 28 del mes pasado, y quedaron tan conmovidos por el gran honor hecho a ellos con vuestra dedicatoria que inmediatamente os envían su gratitud más sincera [...]; considerando que una obra tan excelente no debería ver retrasada su publicación más tiempo, resolvieron imprimirla a su propia costa, en un amplio Cuarto de hermosa letra, y que esta su decisión debería seros comunicada e inquirida vuestra opinión, para poder proceder con toda celeridad».

de trescientos o cuatrocientos ejemplares. La obra suscitó cuatro recensiones en revistas científicas, de las cuales sólo una —escrita por el propio Halley para las *Philosophical Transactions,* órgano de la Royal Society— aparece firmada. La incompleta pero elogiosa recensión aparecida en la *Bibliothèque Universelle* suele atribuirse a Locke, que trató —como años antes Hobbes— de familiarizarse tardíamente con la geometría. En las *Acta Eruditorum* de Leipzig apareció la tercera recensión, que es un texto bastante extenso y meditado, fiel en términos generales a la importancia de los *Principia.* El último comentario, aparecido en el *Journal des Sçavants,* es en cambio muy crítico y se apoya para ello en la idea de que los *Principia* son una obra «hipotética», una pura mecánica racional —la «más perfecta imaginable», desde luego, en su especie— que permanece en el terreno de la «geometría» sin pasar a «los verdaderos movimientos». Por consiguiente, el anónimo autor recomienda a Newton que escriba «una física tan exacta como su mecánica» [69].

Los años siguientes vieron crecer sin pausa el predicamento de Newton en toda Europa y, muy especialmente, en su país. Comenzó pronto a agotarse la reducida tirada inicial, y tanto el reflejo de la obra en los *savants* como la necesidad de perfeccionar algunos aspectos reclamaban una nueva edición. Fatio de Duillier y, años después, D. Gregory pareció que iban a hacerse cargo de esta empresa, pero no eran los hombres adecuados para un trabajo de semejantes proporciones, prescindiendo de los roces y disparidades inevitables entre un concienzudo editor y un hombre tan difícil como Newton. Este había ido ya anotando cambios y adiciones en ejemplares propios y, según parece, sólo se decidió revisar a fondo la obra a instancias del entonces *master* del Trinity College de Cambridge, el teólogo y humanista Richard Bentley, que reclutó al joven matemático Roger Cotes. De los dones de Cotes da cuenta el hecho de que Newton le confiase la tarea, aceptase gran parte de sus correcciones y, sobre todo, que le encargase hacer un Prefacio

---

[69] El comentario es tan disparatado en un sentido como justo en otro. Mantiene que la atracción es un concepto matemático, no físico, pues en física los movimientos de los cuerpos han de explicarse por acciones del medio, como afirmaron sin excepción todos los científicos desde Copérnico a Huyghens, pasando por Galileo y Descartes. La acción a distancia es por ello un modo «geométrico» de explicar los movimientos visibles, que al prescindir de sus causas materiales prescinde de los «verdaderos movimientos».

I. B. Cohen sugiere *(Introduction...,* p. 156) que la lectura de esta crítica fue el factor desencadenante en Newton de su horror a las hipótesis, cuya primera manifestación fue rebautizar con otros nombres a las múltiples hipótesis *explícitas* contenidas en la primera edición de las *Principia.*

(con la condición expresa de no leerlo él antes de la publicación). Y, en efecto, Cotes realizó un trabajo admirable, que mejoró en gran medida la primera versión [70]. Estimulado por él, Newton hizo modificaciones más drásticas de lo previsto inicialmente, que abarcan desde la corrección de detalle a la revisión en profundidad de conceptos, cuando no al añadido de partes enteras como el Escolio General [71].

En 1713 apareció la segunda edición, compuesta por setecientos ejemplares; para entonces, toda la comunidad científica europea había oído ya hablar del prodigioso matemático inglés capaz de interpretar con exactitud y simplicidad lo movimientos de cuerpos visibles, tanto en la Tierra como en los cielos. El *Journal des Sçavants* [72], exactamente un cuarto de siglo después de la dura recensión antes mencionada, publica una crítica anónima bastante distinta, donde se afirma que Newton «ha tratado el movimiento de los cuerpos con la precisión de los geómetras, pero de tal manera que los principios establecidos se aplican a numerosos problemas de física». La actitud que el *Journal* había mostrado ante la primera edición será asumida ahora por la recensión aparecida en las *Mémoires pour l'Histoire des Sciences et des Beaux Arts* (de Trevoux). Su desconocido autor contrasta la reputación de los *Principia* entre los geómetras, «que admiran la fuerza y la profundidad del genio de Newton», y su reputación entre los físicos, «incapaces de acomodarse a una atracción natural entre todos los cuerpos». Una vez

---

[70] Cotes, que por entonces era *Plumian Professor* de astronomía en el Trinity College, murió poco después a los 34 años. Newton dijo de él: «*If Mr. Cotes had lived we might have known something*» (cf. Brewster, *Memoirs...*, vol. I, p. 461).

[71] Las directrices generales de Newton a Cotes contrastan curiosamente con las intenciones de Bentley, que sufragó la edición y se resarció cumplidamente con el producto de la venta. Newton había dicho a Cotes: «Es imposible imprimir el libro sin algunas faltas, y si se imprime siguiendo la copia enviada, corrigiendo sólo las faltas percibidas al repasar las galeradas, tendrá más labor de lo que sería adecuado darle». Bentley, amigo personal de Newton, le contesta al ser informado de la carta: «No debe intimidarte dar demasiado trabajo al Sr. Cotes; tiene hacia ti estima y obligaciones que le impiden considerar demasiado gravosa la tarea, pero en todo caso lo hace a mis órdenes y para mí, a quien debe más que a ti. Te ruego, pues, que transijas. Nosotros nos cuidaremos de que ningún pequeño desliz de cálculo pase la criba de esta excelente edición» (Vid. Edleston, *The correspondence...*, p. 5).

[72] Núm. de marzo de 1715, pp. 157-160.

más, la acción a distancia parece un obstáculo insuperable, que invalida la tesis principal de la obra [73].

Mucho más técnica fue la recensión aparecida en las *Acta Eruditorum* de Leipzig (marzo de 1714), que hace una detallada comparación entre las ediciones de Halley y Cotes. Algunos aspectos de la nota han hecho suponer que el anonimato encubría la mano del propio Leibniz [74]. En efecto, hay allí una mención al descubrimiento del cálculo diferencial e integral que podría indicarlo [75]. La recensión considera los *Principia* como «una obra de profunda erudición», si bien conserva cierta distancia irónica, como cuando deduce de la obra que la causa de la gravedad no es mecánica, o que el «espíritu sutilísimo» mencionado en el último párrafo del tratado es una «nueva hipótesis» [76].

Naturalmente, los setecientos ejemplares de la segunda edición se agotaron en pocos meses, así como dos reimpresiones hechas en Amsterdam en 1714 y 1723 [77]. Cuando apareció la segunda, Newton tenía 81 años y acababa de recobrarse, con grandes dificultades, de una incontinencia uretral, pero decidió hacer una nueva edición. Buscó apoyo para ello en un médico, Henry Pemberton, que tras cursar estudios en Leyden se había interesado progresivamente por temas matemáticos, hasta lograr considerable competencia en la materia. Amigo de Richard Mead, el médico de cabecera de New-

---

[73] Refiriéndose al test lunar (Prop. IV, lib. III), se dice: «*La preuve semblera aller jusqu'à la conviction, si l'experience peut montrer qu'en effet la terre & la lune sont, pour ainsi parler, en commerce d'attraction*», *Mémoires...*, febrero 1718, p. 160.

[74] En este sentido, A. Koyré e I. B. Cohen, «Newton & the Leibniz-Clarke correspondence», en *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, p. 68, n. 16.

[75] En especial cuando se dice que «incluso en esta nueva edición Newton no niega que el ilustre Leibniz le haya comunicado sus fundamentos, aunque él ocultase cuidadosamente cierta técnica propia».

[76] La ironía se percibe con nitidez en uno de los últimos párrafos: «Sin embargo, es de temer que la mayoría de la gente pueda asignar un mayor valor a las hipótesis que al sutilísimo espíritu del autor [...], salvo que podamos decir que es idéntico al éter o materia sutil de los cartesianos». Usando a su vez el anonimato de la «Recensio libri» del *Commercium epistolicum*, Newton rechazó la recensión y añadió los adjetivos «eléctrico y elástico» a su «espíritu».

[77] La segunda reimpresión contenía un texto bastante más amplio, pues además de los *Principia* incluía cuatro cartas de Newton (a Oldenburg, a Wallis y a Collins) y cuatro tratados matemáticos: el *De analysi per aequationes infinitas*, el *De Quadratura curvarum*, la *Enumeratio linearum tertii ordinis* y el *Methodus differentialis*.

ton, y autor de una crítica a la dinámica de Leibniz, fue requerido por el propio Newton [78] y asumió la tarea con extrema meticulosidad. Esta tercera edición no puede compararse con la segunda en amplitud y radicalidad de las modificaciones, y su novedad más señalada es quizá la supresión del llamado «Escolio leibniziano», que sigue al Lema II del libro II, así como algunas adiciones sobre resistencia de los medios, y cálculos más precisos sobre la órbita del cometa de 1680. La versión, compuesta por 1.250 ejemplares, apareció en 1726, el mismo año de la muerte de Newton.

3. EL CALCULO Y LA CONCEPCION DEL INFINITO

Aunque en los manuales de historia Newton y Leibniz se disputan la invención del cálculo infinitesimal, lo cierto es que ninguno puede en justicia reclamar para sí el descubrimiento, al menos en el sentido en que, por ejemplo, sí puede considerarse a Kepler inventor de la física celeste. Al contrario: «El desarrollo del cálculo infinitesimal durante el siglo XVII hace pensar mucho más en el despliegue gradual e inevitable de una sinfonía en la que el *Zeitgeist,* compositor y director de orquesta a la vez, marcaría el compás: cada uno ejecuta en ella su parte con su propio timbre, pero nadie es dueño de los temas que toca, temas que han sido entrelazados casi inextricablemente por un sabio contrapunto» [79].

Los métodos infinitesimales parecen tener su punto de partida en el sofista Antifón, que para computar un área dada —la del círculo, en su caso— tuvo la idea de inscribir un polígono triangular y luego ir inscribiendo otros nuevos hasta cubrir todo lo dejado fuera. Este método «exhaustivo», que incluye un número infinito de operaciones, fue generalizado por Eudoxo y aplicado a los sólidos, añadiéndosele la prueba llamada *reductio ad absurdum* para evitar el proceso infinitesimal. Así aparece en Arquímedes, si bien los escrúpulos rigoristas por una parte, y el desconocimiento del cero y

[78] J. Wilson, autor del Prefacio al *Curso de Química* de Pemberton (J. Nourse, Londres, 1771), refiere —en la p. XIII— que Newton quedó complacido por el texto anti-leibniziano de Pemberton hasta el punto de «siendo como era un hombre eminente, visitarle en su domicilio [...]. Siguió un libre diálogo entre ambos, centrándose la conversación sobre temas matemáticos y filosóficos. Sir Isaac era uno de los hombres más modestos del mundo, e incluso pidió al doctor Mead que influyese sobre el doctor Pemberton, a fin de ayudarle a hacer una nueva edición de los *Principia*».

[79] N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza, Madrid, 1976, p. 237.

el álgebra por otra, impidieron que una mente matemática de su potencia hiciese sino tímidas incursiones en este área, caracterizadas todas ellas por un prolijo método geométrico. Kepler, en su *Estereometría de los toneles,* fue uno de los primeros en pasar sin vacilaciones al límite, entendiendo por tal la magnitud que en una serie infinita equivale a la suma de los términos en una serie finita. En el caso de Kepler se trataba de determinar volúmenes, y el procedimiento seguido fue empezar identificando el de una esfera con la suma de un número infinito de conos que tienen como base círculos infinitamente pequeños. Precisamente contra la irracionalidad específica de esta «cuadratura» kepleriana quiso escribir Bonaventura Cavalieri la *Geometría de los continuos* [80], que Newton reconoció siempre como precedente de sus «fluxiones». Cavalieri buscaba un método de integración sin los inconvenientes del de Kepler, y para ello forjó el concepto —por lo demás, sin definir en toda su obra— de los indivisibles, verificando una descomposición de sólidos en planos, de planos en líneas y de líneas en puntos, combinada con ingeniosas ideas de movimiento [81].

Junto a Cavalieri hay una larga serie de matemáticos —Pascal, Fermat, Roberval, Gregorio de Saint Vincent, Descartes, Wallis— que se aplican a la nueva situación. Los desarrollos en teoría de funciones, combinados con las posibilidades de representación abiertas por la geometría analítica y el progresivo descubrimiento de los logaritmos (al principio meras «ayudas para calcular»), permiten hacer frente de otro modo al cálculo para las curvas clásicas, al mismo tiempo que descubren multitud de nuevas curvas puramente matemáticas. Isaac Barrow, predecesor de Newton en la *Lucasian chair* de matemáticas, acabó abandonando la cátedra por el púlpito y fue en todo momento un notable especulativo, con ideas filosóficas que incluyeron categóricamente en su discípulo y protegido; pensaba los números como marcas o signos de magnitudes geométricas, y las magnitudes geométricas como entes generados por el movimiento. Sobre esta base trazó un cálculo infinitesimal de tendencia geométrica, convirtiendo la variación simultánea de varias magnitudes en

---

[80] *Geometria indivisibilibus continuoroum nova quadam ratione promota,* Bolonia, 1635; *Exercitationes geometricae,* Bolonia, 1647.

[81] Cavalieri no llega a los indivisibles disminuyendo «hasta el desvanecimiento» y reconstruyendo luego, como Newton, sino por el expediente de las *regulas* o directrices, que son planos paralelos donde se encierra el cuerpo considerado. Al hacer «fluir», según la expresión de Cavalieri, la primera *regula* hasta la opuesta, el «plano móvil» coincidirá sucesivamente con todas las líneas y las determinará a todas.

función de una variable independiente universal concebida como «tiempo».

En 1669 Barrow está ya en posesión del teorema general del cambio de variables [82], que permite resolver ecuaciones diferenciales. Tres años antes el escocés James Gregory ha formulado una regla para calcular las áreas de los segmentos parabólicos mediante logaritmos decimales, y un año después lord Brouncker —presidente de la Royal Society y probable inspirador de la efímera reconciliación entre Hooke y Newton— obtiene series para varios logaritmos, presentándolas como expresiones de los segmentos de parábola correspondientes. En 1670, diecisiete años antes de la primera edición de los *Principia,* la situación puede resumirse así: hay procedimientos uniformes para los problemas de la derivada primera; Huyghens ha abordado cuestiones geométricas de la derivada segunda; se conoce el modo de reducir la integración a cuadraturas; hay varias técnicas para reducir unas cuadraturas a otras, y se ha descubierto la relación entre diferenciación e integración. La parte que en este proceso general corresponde a Newton es muy considerable y comienza en el período de 1665-1666. A él se debe el binomio de su nombre [83], el teorema de que hallar el área comprendida bajo una curva y la tangente a esa curva son operaciones inversas, la clasificación de las curvas cúbicas, varias propiedades de las series infinitas, los desarrollos de Taylor y MacLaurin, métodos de cálculo y análisis numérico, etc. Según D. T. Whiteside, editor de los *Mathematical papers of Isaac Newton* [84], el rasgo más definitivo del genio newtoniano es su descomposición del movimiento continuo en fragmentos matemáticamente abordables. Eso significa poder reducir procesos físicos o constructos matematizables y, al mismo tiempo, librarse de cualesquiera exigencias ontológicas. Según D'Alembert [85], «Newton fue el primero en mostrar lo que sus predecesores apenas habían atisbado, el arte de introducir la geometría en física y de crear —uniendo experiencias y cálculo— una ciencia nueva, exacta, profunda y brillante». De hecho, en 1676 —cuando escribe a Leibniz por intermedio de la Royal Society— [86] alguien tan

---

[82] *Lectiones geometricae,* Londres, 1670, lect. 12, ap. III, teor. 4 incluidas en *The mathematical works of I. Barrow,* vol. II, ed. Whewell, Cambridge, 1860.

[83] $(a+b)^n$.

[84] Hasta ahora han aparecido siete volúmenes, publicados por la Cambridge University Press, a partir de 1967.

[85] En el artículo «Expérimental» de la Enciclopedia.

[86] *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern,* vol. I, hrsg.

circunspecto y reservado como Newton declara sin reservas que sabe resolver todas las ecuaciones diferenciales, para lo cual se sirve de una serie de potencias con números indeterminados.

Entonces tiene ya trazado en sus pormenores el «método de las fluxiones», donde la característica genérica es concentrarse en la diferenciación y desatender, comparativamente, el aspecto complementario de la integración. Las «fluyentes» son distintas funciones de un tiempo absoluto, cuyas derivadas son las «fluxiones». El expediente concreto, empírico, que es el cálculo para Newton contrasta con la tendencia unificadora y teorizante de Leibniz. De ahí que en los *Principia* las proposiciones aparezcan demostradas siguiendo el método geométrico «exhaustivo», aunque parezca indudable que muchos o casi todos los teoremas fueron deducidos con ayuda de métodos infinitesimales, y luego trasladados al sistema tradicional [87]. Sin embargo, el Lema II del Libro II, que sigue a la Proposición VII, contiene breves e importantes observaciones sobre el tema.

Allí las *genita* o «generadas» se definen por no provenir de adición o sustración de partes diversas, sino de relaciones entre magnitudes. «Cantidades de este tipo», dice Newton, «son los productos, cocientes, raíces, rectángulos, cuadrados, cubos, lados cuadrados y cúbicos *et similes*». Sin embargo, esas cantidades no se consideran como tales cantidades (finitas), sino como *indeterminatas et instabiles,* «creciendo o decreciendo como por un flujo perpetuo»,

---

Gerhardt, Mayer und Müller, Berlín, 1899, p. 224; cf. Bourbaki, *op. cit.*, pp. 253-254.

[87] Un borrador de carta a Des Maizeaux, escrito hacia 172 (Ms. Add. 3968, f. 402) contiene interesantes precisiones: «Por el método inverso de las fluxiones descubrí en el año 1667 la demostración de la proposición astronómica de Kepler, a saber, que los planetas se mueven en elipses, incluida como Proposición XI del libro primero de los Principios; y en el año de 1683, urgido por el doctor Halley reanudé la consideración del tema, y añadí algunas otras Proposiciones sobre el movimiento de los cuerpos celestes, que fueron por él comunicadas a la Royal Society y entraron en su registro el invierno siguiente; y ante su requerimiento en el sentido de que tales cosas pudieran publicarse, escribí el Libro de Principios en los años 1684, 1685 y 1686, y al escribirlo utilicé mucho el método de fluxiones, pero sin exponer los cálculos en el Libro mismo, porque fue redactado con arreglo al método de composición, como debe hacerse con toda Geometría. Y este Libro fue el primer espécimen hecho público del uso de ese método en los problemas más difíciles.» El propio Newton tachó dos líneas adicionales, extremadamente significativas: «Y desde que escribí ese Libro he estado olvidando los métodos por cuya mediación lo escribí.»

de tal manera que esos incrementos positivos o negativos son «momentos» y no «partículas» [88]. Dichos momentos son «los principios entonces *(jamjam)* nacientes de magnitudes finitas», donde el contenido es «la primera proporción». En esa medida, son idénticos a las velocidades, o a cualesquiera cantidades finitas proporcionales a esas velocidades. Aplicando la «generada» a cualquiera de los «lados generantes», se obtiene una cantidad que es el coeficiente de ese lado.

La consecuencia de todo ello es el propio Lema II del Libro II: «El momento de la generada es igual a los momentos de cada lado generante multiplicados por los índices de las potencias de esos lados y por sus coeficientes continuamente».

Este Lema y la sección primera del Libro primero son los únicos lugares de los *Principia* donde se aborda directamente la teoría del cálculo integral y diferencial [89]. Newton no suministra en ninguno de esos lugares su notación, y como observó F. Cajori, «no se sabe de nadie que partiendo de los *Principia* haya logrado un conocimiento operativo de las fluxiones» [90]. El Escolio que cierra la mencionada sección del Libro primero trata el problema desde otra perspectiva, pero insiste en el mismo concepto principal, aquí enunciado como límite *(limes)* dentro de «un método de las primeras y últimas razones». Tras aseverar que el procedimiento de los indivisibles permite abreviar mucho los sistemas antiguos de reducción al absurdo, y que su propio método llega a los mismos resultados, considera que la construcción de Cavalieri es más áspera *(durior)* y *minus geometrica,* porque concibe los infinitésimos como cantidades determinadas en sí mismas, y, por tanto, como elementos fijos o «partículas», mientras el método de las primeras y últimas razones evita precisamente ese atropello a la lógica.

«Si en lo sucesivo fuese a considerar las cantidades formadas a partir de partículas constantes, o usase curvas mínimas como rectas, ha de recordarse que quiero decir, siempre, no indivisibles sino cantidades divisibles evanescentes; no las sumas y razones de partes determinadas, sino siempre los límites de sumas y razones [...]. Las últimas razones con las que se desvanecen las cantidades no son realmente las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los

---

[88] *Particulae finitae non sunt momenta, sed quantitates ipsae ex momentis genitae;* esto es: «las partículas finitas no son momentos, sino las cantidades mismas generadas a partir de ellos».

[89] Con todo, el Lema II del Libro tercero menciona por dos veces «una cantidad fluyente cuya fluxión es...»

[90] *Op. cit.,* vol. II, p. 654, n. 31.

que convergen siempre las razones de cantidades sin límite, y hacia los que se aproximan más que por cualquier diferencia dada, pero sin jamás sobrepasar ni alcanzar, hasta reducirse las cantidades *in infinitum.*»

Esta distinción es fundamental. Por el hecho de que se den relaciones últimas (o primeras) de magnitudes evanescentes (o nacientes) no puede concluirse que se den magnitudes últimas (o primeras), esto es, indivisibles. Se obtiene así una relación *cualitativa* de determinaciones *cuantitativas,* pero de tal manera que la determinación de tales límites resulta ser «un problema estrictamente geométrico», pues «por razón última de cantidades evanescentes ha de entenderse la razón de las cantidades no antes ni después de desvanecerse, sino aquélla con la cual se desvanecen [...]. Hay un límite que la velocidad al final del movimiento puede alcanzar pero no exceder. Esta es la velocidad última. Y hay un límite semejante en todas las cantidades y proporciones que comienzan y cesan».

Sólo nueve años después de morir, en 1736, aparece el *Método de las fluxiones y las series infinitas,* obra compuesta a instancias de Barrow en 1671, quince lustros antes. Para entonces sus procedimientos y su notación [91] han sido alcanzados y superados en muchos puntos. En vez de buscar definiciones y símbolos permanentes, Newton usó el cálculo como un instrumento de trabajo casi privado, y por eso los *Principia* se limitan a entrar en el único aspecto verdaderamente «teórico» del asunto, sin descender a detalles ni proporcionar notación alguna. En este sentido, como en otros, su actitud es más respetable que la de su competidor Leibniz, centrado desde el comienzo en generalizar y sistematizar, aunque siempre corto de tiempo para aplicar concretamente la herramienta matemática descubierta. Mientras Leibniz se pregunta todavía hacia 1680 si $d(xy) = dxdy$, para acabar respondiendo negativamente, Newton sabe hace más de diez años que $z = xy$ implica $\dot{z} = \dot{x}y + x\dot{y}$, «pero no se molesta en decirlo nunca, considerándolo un caso particular, indigno de mención, de su regla para diferenciar una relación entre fluyentes» [92].

Esto explica por qué el Escolio siguiente al ya analizado Lema II del Libro segundo sufrió nada menos que tres redacciones. La primera, correspondiente a la edición de 1687, decía: «En cartas cruzadas con el eximio geómetra G. W. Leibniz, diez años atrás, cuando le hice saber que conocía un método para determinar máxi-

---

[91] $\dot{x}$ para $\frac{dx}{dt}$ $\ddot{x}$ para $\frac{d^2}{dt^2}$ etc.

[92] Bourbaki, *op. cit.*, pág. 264.

mos y mínimos, trazar tangentes y cosas análogas [...] este hombre notabilísimo repuso que también él había hallado un método del mismo tipo y me comunicó un procedimiento que apenas difería del mío, excepto de sus formas verbales y símbolos».

La segunda redacción, correspondiente a la edición de 1713, cuando había comenzado ya la controversia sobre prioridad en la invención del *calculus differentialis,* mantuvo el mismo texto, pero con una precisión que revela la finura intelectual de Newton, pues tras afirmar que el método de Leibniz sólo difería del suyo por las expresiones y la notación, añade «*y en el concepto de la generación de cantidades*». Con ello se destaca el elemento más original del cálculo newtoniano, el hecho de no partir de cantidades «infinitamente pequeñas» o indivisibles, como el diferencial fijo leibniziano, sino de «cantidades divisibles evanescentes» o «momentos». En 1704, en la introducción a su *Quadratura curvarum,* Newton había dicho que no consideraba allí «las cantidades matemáticas formadas por partes muy pequeñas, sino como descritas por un movimiento continuo [93].

Más tarde, cuando Leibniz en una carta al abate Conti pretende tomar la referencia de los *Principia* como reconocimiento de su invención del cálculo, el anciano e indignado Newton decide rehacer por completo el Escolio para la tercera edición (1726), omitiendo cualquier referencia al antes *peritissimo geometra Leibnitio,* y dejando sentado que en 1672 —más de medio siglo antes— había expuesto por carta al matemático J. Collins «un método general [...] no sólo para trazar tangentes [...] sino para resolver problemas más abstrusos sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad de curvas, etc. [...], no limitado a ecuaciones libres de cantidades irracionales».

Por lo que respecta al concepto mismo del infinito, conviene recordar que en alguien como Kepler es todavía una noción negativa, de acuerdo con la idea griega —aristotélica sobre todo— de que perfección y finitud son una misma coas, y de que no cabe pensar un infinito en acto, sino sólo *in fieri* o sucesivo. La filosofía cartesiana representó un vigoroso impulso para la idea de infinitud actual, que —por otra parte— está implícita en el principio de inercia, si bien Descartes reservaba el infinito para Dios y atribuía a la extensión una magnitud «indefinida» [94]. Sólo con Spinoza comienza a

---

93 Cf. F. Cajori, *op. cit.*, vol. II, p. 656.

94 La *afirmación* de la infinitud debe atribuirse al cristianismo y, en origen, a la teología del Antiguo Testamento, obsesionada por evitar cualquier *determinación* para Yahvéh. Según la teología cristiana, la finitud no es el

pensarse cualitativamente el infinito, y refiriéndose sin duda a Cavalieri la *Etica* [95] considera «absurdo admitir que los cuerpos están compuestos de superficies, las superficies de líneas y las líneas de puntos». Acto seguido se traza una diferencia entre la falsa o mala infinitud «de la imaginación», identificada con el «progreso indefinido», y la infinitud del pensamiento, que se concibe como afirmación incondicionada de una naturaleza.

Spinoza esbozó una teoría general del infinito, que a través de Oldenburg —presidente de la Royal Society entonces y corresponsal suyo— bien pudo llegar directa o indirectamente a oídos de Newton. Su conclusión fue que «[...] ciertas cosas son infinitas por su naturaleza y no pueden en modo alguno concebirse como finitas; ciertas cosas lo son en virtud de la causa de la cual dependen, aunque cuando se conciben abstractamente pueden dividirse en partes y ser consideradas como finitas; ciertas otras, por último, pueden decirse infinitas o —si preferís— indefinidas, porque no pueden igualarse a número alguno, si bien quepa concebirlas como mayores o menores» [96].

Newton no es ajeno a este punto de vista, y por los mismos años está escribiendo: «Si, por otra parte, alguien dijese que sólo concebimos lo indefinido por la negación de los límites de lo finito, y que se trata de un concepto negativo y por tanto sin valor, lo niego. Muy al contrario, es el concepto de límite lo que contiene una negación, y así la «infinitud», como negación de una negación (es decir, de la finitud) será una palabra [...] muy positiva aunque gramaticalmente parezca negativa» [97].

La infinitud que Newton entrecomilla no depende de la inmensurabilidad, sino de su dimensión ontológica: no ser la negación de un ser sino la negación de un no-ser y, por lo mismo, afirmación absoluta. Dado que esos pasos lógicos no son en Newton tales pasos, y no se consideran momentos de una reorganización cósmica (como en Böhme), sino en términos de una verdad intemporal, fi-

---

ser completo y perfecto de una substancia, como en Aristóteles, sino la huella de la imperfección y el pecado. Por consiguiente, no hay en ella el famoso horror a la «irracionalidad», tan característico del pitagorismo, dado que el inacabamiento o ilimitación es en sí un signo de «racionalidad» precisamente. Sin embargo, hasta Nicolás de Cusa esos postulados teológicos no se aplican a la cosmología, y los escasos matemáticos anteriores no sueñan siquiera con pasar al límite.

[95] Lib. I, Escolio a la Prop. XV.

[96] Carta a Meyer, de 20/4/1663; cf. *Oeuvres,* ed. Appuhn, Garnier-Flammarion, vol. 4, pp. 160-161.

[97] Hall, *op. cit.*, p. 101.

ja, identificada con la naturaleza divina, la consecuencia más importante a nivel filosófico es una pérdida de valor para lo limitado, que ha de juzgarse no-ser en vez de ente perfecto, como pensaba Aristóteles. Si lo infinito ha de ser afirmado, lo finito ha de ser negado [98].

Ahora bien, la forma universal de ser negado lo finito es la famosa fuerza inactiva, la masa inercial que define al destino *mecánico* de lo corpóreo, regido así por las leyes matemáticas de un Amo. La peculiaridad de tales leyes matemáticas es en Newton formularse como ecuaciones diferenciales, cosa que confiere al principio causal un formidable refuerzo. Esa expresión matemática concreta no vincula simplemente, sino que al medir con la derivada la tasa de cambio vincula momentos infinitesimales de un sistema inercial, cuyo estado puede determinarse *exactamente* con eso sólo. Una vez construida, la ecuación prevé cualquier instante siguiente del sistema a partir del actual, medido en posición y momento. Por su parte, el coeficiente diferencial se adapta a intervalos finitos de tiempo usando el método de integración perfeccionado por el propio Newton y, sobre todo, por sus sucesores.

Esto obligaba al físico a convertirse en un matemático puro, porque la integración no logra automatizarse y permanece en muchos casos como un arte, asequible sólo a una afortunada intuición analítica. Pero fundamentalmente le ataba a un nuevo concepto de *necesidad;* la aproximación infinitesimal lleva consigo un peculiar concepto causal, donde la causa pasa a ser desarrollo serial de una función, previsibilidad. La función define la fuerza, y la fuerza es la causa del cambio —aunque no sea fuerza «física» sino sólo «matemática»—, y la prueba de todo ello es que podemos prever ese cambio si hallamos los valores adecuados para las fuerzas en juego.

Como es sabido, la teoría cuántica ha dejado de admitir semejante relación rigurosa, y un dato sobre posición o velocidad no permite por eso inferir el momento siguiente sino usando procedimientos *estadísticos.* Pero ya antes de la mecánica cuántica y el principio de indeterminación había leyes físicas inexpresables mediante ecuaciones diferenciales, por ejemplo en teoría de la elasticidad, donde

---

[98] En su conocido libro sobre los fundamentos metafísicos de la ciencia moderna, E. A. Burtt insiste en que la física newtoniana, comparada con el concepto antiguo y medieval, suprime la «importancia» del hombre y la conciencia en el mundo, pero la tesis es incorrecta para todo el período posterior a la consolidación del cristianismo, dado que es la Biblia —y no la mecánica clásica— quien necesita llamar *polvo* y *gusano* al hombre. El concepto newtoniano del infinito es sencillamente «ortodoxo».

la evolución de un sistema no siempre se define sólo por su estado inicial.

4. EL CONCEPTO DE GRAVITACION Y LA HIPOTESIS DEL ETER

Una de las importantes adiciones en la segunda edición de los *Principia,* que cierra el comentario a la tercera Regla, es una puntualización de Newton: «Sin embargo, no afirmo en lo más mínimo que la gravedad sea esencial a los cuerpos. Entiendo por fuerza ínsita solamente la fuerza de inercia, que es inmutable. La gravedad disminuye aumentando la distancia desde la Tierra».

Esta puntualización se aclara en una carta a Bentley [99], nunca bastante recordada: «Una gravedad innata, inherente y esencial a la materia, por la cual un cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia a través de un vacío [...] me parece un absurdo tan grande que no creo que pueda incurrir en él nadie con una facultad competente de pensamiento en temas filosóficos. La gravedad debe ser causada por un agente que actúe de modo constante según ciertas leyes, pero dejo a la consideración de mis lectores si es material o inmaterial».

Bentley plantea entonces una cuestión delicada: ¿podría —si partimos de una distribución inicial uniforme de materia en el espacio— acabar resultando por causas meramente naturales el sistema del mundo? En la pregunta se contiene un cierto forzamiento de la respuesta, y Newton responde que «los movimientos actuales de los planetas no podrían provenir sólo de una causa natural, sino que requieren ser impresos por un Agente inteligente». Más aún, ese Agente ha de regirlo constantemente por medio de su voluntad. La cosmología cartesiana poseía una indudable fluidez genética, gracias a la cual el caos se reconducía por sí mismo al orden mediante una física de vórtices; Descartes pensaba en soles que se apagaban,

[99] En *Works of Richard Bentley,* vol. III, Londres, 1838, p. 211, carta del 17/1/1693. Joven predicador con mucho futuro, notable filólogo y mente abierta a la modernidad científica, Bentley iba a inaugurar las *Boyle Lectures,* series de ocho sermones proferidos en varias iglesias de Londres para demostrar que «la nueva ciencia no lleva al materialismo, esto es, al ateísmo». Al solicitar ayuda a Newton para el empeño, obsequió al mundo con una opinión de sir Isaac sobre aquello de que no había hablado y no volvió a hablar. Sobre Newton y el movimiento de los *latitude men* o latitudinaristas (secta epicopaliana con adeptos como Boyle y Barrow) puede consultarse E. Rada, *La correspondencia Leibniz-Clarke,* pp. 24 y ss.

que se convertían en cometas, y éstos en planetas, etc. «Nada de ello tiene lugar en mi sistema», aclarará Newton, «y es obviamente erróneo». Dios creó al mundo tal como es ahora, por el acto de «dar impenetrabilidad a ciertas partes del espacio», tras de lo cual distribuyó racionalmente los momentos de cada sector. El mundo *infinito* nace por eso mismo *entero*, lo cual supone una contradicción no poco instructiva; el hallazgo de las «fuerzas matemáticas» determina una deducción que detiene cualquier genealogía.

Eso es precisamente crear en un tiempo absoluto, lo más lejano a la idea de una evolución en la Naturaleza. Newton legó por ello un sistema del mundo puramente casual, arbitrario, que sus epígonos se esforzaron por estabilizar. Lagrange primero, demostrando que todos los cambios orbitales son periódicos, y Laplace después, pretendiendo demostrar que las irregularidades periódicas se encuentran sometidas a una ley eterna que les impide exceder cierta cantidad, se propusieron reducir las funciones del Agente y edificar una física puramente objetiva. Pero Newton tenía una idea cataclísmica del universo, ajena por completo a la convicción del estado continuo en sus variadas facetas. Uno de los memorándums de D. Gregory, fechable a comienzos de 1694 [100], aclara su actitud: «Newton dice que se requiere un milagro continuo para evitar que el Sol y las estrellas fijas se precipiten conjuntamente por obra de la gravedad; que la gran excentricidad de los cometas, en direcciones distintas y contrarias a los planetas, indica una mano divina, e implica que los cometas están destinados a un uso distinto al de los planetas. Los satélites de Júpiter y Saturno pueden tomar los lugares de la Tierra, Venus y Marte si resultasen destruidos, conservándose así en reserva para una nueva creación».

Por lo mismo, el mundo surgió de repente y sucumbirá de repente. Sólo porque el demiurgo lo impide —y mientras así sea, desde luego por poco tiempo— no se han producido colisiones astrales, que a la larga son inevitables. La génesis que Laplace intenta del sistema solar, con su hipótesis de la nebulosa, parte de energías materiales hallando sucesivos estados de equilibrio, por mero juego de probabilidad dentro de ciertas condiciones. Para Newton, semejante orientación implica reducir todo a «fatalidad y naturaleza», y es una creencia de la caterva descreída, contraria a toda «razón», como se ocupa de precisar el Escolio General [101].

---

[100] Cf. I. B. Cohen, *Introduction...*, p. 192.

[101] ¿Creía eso *realmente?* Con certeza, semejante opinión no iba a granjearle problemas en su época y en la cromwelliana Inglaterra. Sin embargo, Newton parece profesar un extraño panteísmo que no se reconoce tal. Mu-

Sin embargo, es imposible entender el concepto newtoniano de ravitación sin tomar en cuenta sus ideas sobre el éter. En 1675, oce años antes de publicar los *Principia,* Newton defiende en su *ſipótesis sobre las propiedades de la luz* un sistema rigurosamente ıecánico apoyado sobre el «medio etéreo». Una carta al entonces

---

ıos años antes de publicar los *Principia* había escrito: «Es claro que Dios eó el mundo sin otra acción que la de querer, tal como nosotros por la ıla acción volitiva movemos nuestros cuerpos» (Hall y Hall, *Unpublished...,* 107).

De hecho, Henry More había mantenido que el espíritu, aunque incorpó-o, participa de la extensión y debe considerarse una cosa extensa. Newton ı un paso al añadir que el origen del movimiento en general es volitivo por tanto, no *mecánico.* Interponiendo entre Dios y el universo el teatro finito del espacio, cree que: «La analogía entre las facultades divinas y s nuestras es mayor de lo que han visto hasta ahora los filósofos. La Sa-ada Escritura atestigua que hemos sido creados a imagen de Dios» (Hall Hall, *op. cit.,* p. 141).

Tal como nosotros no somos un conjunto de huesos y músculos, sino los nos o señores de una anatomía, así el demiurgo no es el conjunto de áto-os y relaciones, sino el *dominus* universal. Dicho de otro modo, si ha de ıber para nosotros moldes genéricos de intuición —en particular el espa-o y el tiempo—, ha de haber para el ser divino como formas absolutas ıralelas el Espacio y el Tiempo, *donde* desplegar su voluntad omnipotente duradera sobre la «materia»; el alma humana requiere del mismo modo ı cuerpo y unas categorías para legislar en el reducido marco de un espíri-ı finito.

Estos textos de juventud contrastan con la declaración expresa de los *Prin-pia* en el Escolio General, donde Newton se preocupa de aclarar que su mo no es el «alma del mundo» —referencia al *Timeo*—, porque no rige ›bre sí sino sobre sus siervos, es decir: porque carece radicalmente de sede cuerpo.

Con la distancia permitida por los siglos, se observa una ambivalencia ı el Amo newtoniano. Un lado corresponde al pietismo ortodoxo, a la ado-ıción servil en el sentido más autoconsciente. El otro es una comprensión esapasionada de la Naturaleza como cosa dominada por una voluntad, como ıte sometido a «programa», donde por lo mismo persiste un elemento de tanismo baconiano: «En la medida en que conozcamos por filosofía natu-ıl cuál es la primera causa, qué poder tiene sobre nosotros y qué benefi-os obtenemos de ella, en esa misma medida se nos aparecerá con luz natu-ıl cuál es nuestro deber hacia ella, así como hacia nosotros mismos» *(Op-ca,* Cuestión, 31, p. 350).

A la especie le incumbe por eso precisar —gracias a la «ciencia»— qué oder específico ejerce ese Dueño sobre ella, y qué beneficios le reporta la bediencia. Sólo entonces podrá fijarse un «deber» o actitud hacia la Natu-ıleza, que es precisamente la sierva del Amo y el campo de operaciones ara el hombre. La «analogía de facultades» entre el *Dominus* y la especie

presidente de la Royal Society, H. Oldenburg [102], resume sus tesis: «Debe suponerse que hay un medio etéreo, de constitución en gran medida análoga al aire pero mucho más raro, sutil y fuertemente elástico [...]. Pero no debe suponerse que este medio sea una materia uniforme, sino algo compuesto en parte por el cuerpo flemático principal y en parte por otros varios espíritus etéreos [...], pues los efluvios eléctricos y magnéticos, y el principio gravitatorio, parecen postular semejante variedad. Quizá todo el marco de la naturaleza no sea sino diversas contexturas de ciertos espíritus o vapores etéreos, condensados por así decir mediante precipitación, tal como los vapores se condensan en agua y las exhalaciones en substancias más densas, aunque no tan fácilmente condensables, y llevados tras la condensación a diversas formas, primero por la mano inmediata del Creador y desde entonces por el poder de la naturaleza. Así quizá pudieron originarse todas las cosas a partir del éter [...]. De este modo puede ser causada la atracción gravitatoria de la tierra por la condensación continua de algún espíritu etéreo semejante, no del cuerpo principal de éter flemático sino de algo difundido a través de ello muy fina y sutilmente, quizá de una naturaleza untuosa, gomosa, tenaz y elástica [...]. Pues si semejante espíritu etéreo puede condensarse en cuerpos que fermentan o arden, o coagularse de otro modo en los poros de la tierra y el agua como alguna especie de materia húmeda activa para los usos continuos de la naturaleza (adhiriéndose a los lados de esos poros tal como los vapores se condensan en los lados del recipiente), el vasto cuerpo de la Tierra, que puede hallarse en perpetuo funcionamiento hasta su centro mismo, puede continuamente condensar una cantidad suficiente de este espíritu como para hacerlo descender desde arriba con gran celeridad para su suministro; en cuyo descenso puede arrastrar consigo los cuerpos atravesados por él con fuerza proporcional a las superficies de todas las partes sobre las que actúa, causando la naturaleza una circulación por el lento ascenso de otro tanto de materia desde las entrañas de la Tierra en una forma aérea [...]. Pues la naturaleza es un perpetuo trabajador circulatorio, que genera fluidos a partir de sólidos y sólidos a partir de fluidos, cosas fijas a partir de otras volátiles y a la inversa, sutiles a partir de densas y a la inversa [...]. Y al igual que la Tierra, quizá también el

humana es una implícita orientación hacia el dominio de la materia mediante la «filosofía natural». A tales efectos, conviene recordar que una de las aplicaciones directas de la dinámica gravitacional, entre otras muchas, son los satélites artificiales, previstos expresamente en el ep. 3 del *Sistema del Mundo*.

[102] Cf. Brewster, *op. cit.*, I, pp. 390 y ss.

Sol puede embeber copiosamente este espíritu, para conservar su brillo y evitar que los planetas se alejen más de él; y quienes quieran pueden suponer también que este espíritu lleva consigo en esa dirección el combustible solar y el principio material de la luz, y que los vastos espacios etéreos entre nosotros y las estrellas son un depósito para alimento del Sol y los planetas.»

Apenas tres años más tarde escribe a Robert Boyle otra misiva que perfila sus ideas sobre el tema aún más, si bien antepone a las reflexiones el juicio de que son «meras conjeturas»: «En cuanto a la causa de la gravedad, supondré que el éter consiste en partes que difieren unas de otras por infinitos grados de *sutileza;* que en los poros de los cuerpos hay menos éter denso, comparado con el más fino, que en las regiones del aire; y que el éter aún más denso en el aire afecta a las regiones superiores de la Tierra, y el éter más fino en la Tierra a las regiones inferiores del aire, de tal manera que desde la parte más alta del aire hasta la superficie de la tierra, y nuevamente desde la superficie de la Tierra hasta su centro, el éter es insensiblemente más y más sutil. Imagine ahora cualquier cuerpo suspendido en el aire, o yaciendo sobre la Tierra; siendo por la hipótesis más denso el éter de los poros que se encuentran en las partes superiores del cuerpo que en las inferiores, y siendo ese éter más denso menos apto para insertarse en tales poros que el éter más sutil situado debajo, se esforzará por salir y dejar paso al éter más sutil situado debajo, cosa imposible salvo que los cuerpos desciendan y le hagan lugar donde ir» [103].

Viene tras toda esta concepción el largo intermedio de los *Principia,* que postulan el vacío y atacan directamente la idea cartesiana del éter, si bien hay algunas referencias aisladas en el tratado al medio etéreo, sobre todo a propósito del «espíritu sutilísimo» con el cual concluye la obra. No obstante, la Optica vuelve con renovados bríos sobre el concepto, y la Cuestión 21 calcula incluso la fuerza elástica del éter, manteniendo que ha de ser 490.000.000.000 veces superior a la del aire [104].

---

[103] Brewster, *op. cit.*, I, pp. 409 y ss.

[104] «¿Acaso este medio no es mucho más raro en el interior de los cuerpos densos del Sol, estrellas, planetas y cometas que en los espacios celestes vacíos que se hallan entre ellos? ¿Acaso al alejarse a grandes distancias de ellos no se torna continuamente más y más denso, causando con ello la gravedad de esos grandes cuerpos entre sí y de sus partes hacia los cuerpos, al intentar cada uno de tales cuerpos alejarse de las partes más densas del medio hacia las más raras? [...]. Aun cuando este aumento de densidad pueda ser extremadamente lento a grandes distancias, la fuerza elástica de ese medio puede ser extremadamente grande, como para empujar a los cuerpos de las

Evidentemente, los *Principia* han descubierto una ley absoluta para los movimientos planterios partiendo de «medios no resistentes», y tanto la física como la teología de Newton se basan en una extensión principalmente vacía [105]. Con todo, sin un éter *transmisor* de los movimientos e impulsos no cabe una explicación «física» de los procesos, sino sólo «matemática». Más aún, desde la perspectiva de Newton podría decirse que sin un medio semejante estaremos en un universo regido por fuerzas inmateriales y, en última instancia, por el *dominus pantocrator*. Sin un éter, el Amo «concierne ciertamente a la filosofía natural» [106], las atracciones habrán de ser consideradas —falazmente— como impulsos, el vacío será ocupado por potencias incorpóreas y, en definitiva, la ciencia no podrá construir una teoría del todo «científica», basada en sus propios postulados. De ahí su carta a Leibniz, antes de desatarse la polémica: «Puesto que todos los fenómenos de los cielos y de nuestro mar obedecen con precisión —en cuanto he podido percibir— exclusivamente a la gravedad obrando de acuerdo con las leyes por mí descritas, y como la naturaleza es muy simple, he deducido que deben rechazarse todas las otras causas, y que los cielos deben ser despojados en lo posible de toda materia [...]. Pero si entretanto alguien explicase la gravedad y sus leyes por la acción de cierta materia sutil, y mostrase que el movimiento de los planetas y cometas no será perturbado por dicha materia, estaré lejos de objetar» [107].

Newton espera con los brazos abiertos cualquier explicación «me-

---

partes más densas del medio a las más raras con esa potencia que llamamos gravedad» *(Optica,* p. 304).

[105] Hay para el newtonianismo *infinitamente* más espacio que materia. Como dirá Voltaire, siguiendo esa teoría «no estamos seguros de que haya una pulgada cúbica de materia sólida en el universo». La materia, cuya substancia es incognoscible y de la que sólo podemos conocer propiedades, ni existe necesariamente ni puede ser infinita, mientras el espacio sí existe necesariamente y es infinito (cf. *Eléments de la philosophie de Newton,* Amsterdam, 1738, cap. XVII., pp. 210 y 214). La razón última es, obviamente, que el ser divino no puede en ningún caso comportar cuerpo. Una materia infinita y necesaria limitaría en grado sumo el poderío del Dueño.

[106] Fatio refiere que Newton consideraba su hipótesis de un movimiento rectilíneo de las partículas etéreas como «única explicación mecánica de la gravitación», pero no deja de señalar que sir Isaac decía sentirse «inclinado a pensar que la gravitación tiene como único fundamento la arbitraria voluntad de Dios» (N. Fatio de Duillier, *De la cause de la pesanteur,* memoria presentada a la Royal Society 26/2/1690, en *Notes y Records of the Royal Society of London,* vol. VI, p. 117).

[107] Cf. *The Correspondence of Isaac Newton,* Cambridge Univ. Press, vol. III, 1961, pp. 286-287.

cánica» de la gravitación, intenta una y otra vez *deducirla de los átomos.* ¿Por qué? Nótese que sólo así se mantiene el estatuto *inerte* de los cuerpos, rasgo éste absolutamente decisivo para la transformación de la física aristotélica en sistema inercial de coordenadas, es decir, para el paso de un cosmos poblado por cuerpos con un impulso espontáneo a la acción o «vivientes» a un mundo infinito de objetos regidos por el medio y, en consecuencia, inanimados [108]. Los desterrados ánimos serán las «fuerzas», o entes como el «espíritu eléctrico y elástico», pero siempre con el carácter de agentes externos que actúan por impresión y causan de ese modo el movimiento [109]. Semejante principio de objetividad cumplía además el

[108] «El sapientísimo y todopoderoso Autor de la naturaleza [...] no sólo fue capaz de ver el estado presente de las cosas que había hecho, sino de prever todos los efectos que los cuerpos particulares caracterizados de tal y cual modo, y actuando con arreglo a las leyes del movimiento establecidas por él, podrían ejercer unos sobre otros en tales y cuales circunstancias; así, por el mismo poder omnisciente, fue capaz de proyectar todo el entramado, y todas sus partes, de tal manera que mientras su concurso general mantenía el orden de la naturaleza, cada parte de esa gran máquina, el mundo, sin intención ni conocimiento, obraría regular y constantemente hacia la realización de los fines respectivos para los cuales fue creada, como si realmente comprendiese y persiguiese dichos fines» (Boyle, *op. cit.*, vol. V, p. 413).

[109] Llevada a su concepto, la *fuerza* es el acontecer de la cosa inerte *(forzada)* misma como cierto número. La diferencia entre fuerza pluvial y lluvia es que la lluvia conlleva —entre muchas otras— una nota de cantidad, mientras la fuerza pluvial se refiere a eso exclusivamente. La fuerza es invisible, pero su contenido es lo visible. La fuerza es el fenómeno en cuanto tal, inmediato, pero que se presenta como fundamento. La gravedad, un puro y manifiesto *hecho,* aparece como factor activo universal tan pronto como proporciona un número para el fenómeno planetario. La razón de lo que acontece entonces es que acontece, siempre que ofrezca medidas estables.

Por lo mismo, la fuerza es una idea débil, puramente transaccional. Ya Huyghens y Leibniz opusieron una «fuerza viva» (mv^2) —lo hoy llamado «energía»— a la *vis impressa* newtoniana. Pero el ataque en profundidad a las ambigüedades y limitaciones del concepto aparece sobre todo desde D'Alembert, quien en el prefacio a su *Traité de dynamique* no vacila en considerarlo «oscuro y metafísico», añadiendo que si a veces lo menciona es «para evitar circunloquios». En efecto, ya desde la pura forma se observa una contradicción en los *Principia,* no asumida, entre la fuerza externa y la fuerza interna (inercial). I. B. Cohen comenta que es como si Newton «no pudiera separarse completamente de la larga tradición donde se pensaba que todo movimiento exigía un moviente o una fuerza motriz» *(The newtonian revolution,* p. 192).

silogismo religioso decisivo: si la materia no puede moverse a sí misma, y si hay un inmenso universo en movimiento armoniosamente regular, se prueba el gobierno continuo de un demiurgo espiritual. Ahora bien, la gravitación *no es deducible de los átomos,* o por lo menos no lo fue para Newton. Si el atraerse recíproco salvando vacíos permitía una explicación «matemática» de los movimientos locales, era sólo al precio de una subterránea animación de las masas, socavando así los cimientos de aquello que Huyghens llamaba los «principios matemáticos y mecánicos» [110].

Sin embargo, el paso de los siglos ha verificado una completa inversión de este planteamiento. Los sucesores de Newton y el público ilustrado —ya desde Voltaire y Maupertuis— no perciben nada misterioso en la *actio distans* y, al contrario, van percibiendo más y más los problemas aparejados a la conciliación de éter y vacío. El proceso culmina, al menos en una de sus fases, cuando la mecánica relativista rechaza la noción de medio etéreo y, a la vez, la idea de la gravitación como fuerza. Para eso ha sido necesario que Riemann, sin abandonar la geometría, descubriese un espacio no euclidiano; gracias a su construcción, la gravedad podrá aparecer en la teoría einsteiniana como una incurvación del continuo espacio temporal motivada por la presencia de agregados materiales y proporcional a éstos. Se vuelve con ello al rigor de la explicación mecánica, prescindiendo tanto de las atracciones como del éter mismo. Sin embargo, nadie parece haber visto con tanta claridad el fondo de la cuestión como D'Alembert, en su artículo Atracción de la *Enciclopedia:* «Si Newton pretendió haber tomado en cuenta la impulsión para explicar la gravedad, podemos creer que fue una especie de tributo que quiso pagar al prejuicio o a la opinión general de su siglo».

D'Alembert añade que, puesto en la alternativa de elegir entre fuerzas impulsivas y una fuerza interna como causa de la gravedad, él elegiría lo segundo, «porque no es aún posible explicar los fenómenos celestes mediante el principio de impulsión, y porque la imposibilidad de explicarlo mediante este principio se basa en pruebas muy fuertes, si es que no en demostraciones» [111]

[110] «Ese principio de Atracción (de Newton) me parece absurdo [...] y me he preguntado a menudo cómo ha podido tomarse tanto trabajo haciendo tan numerosas investigaciones y difíciles cálculos fundados exclusivamente sobre dicho principio» (Carta de Huyghens a Leibniz, del 18/11/1690, en *Oeuvres,* vol. XXII, p. 538). Para Huyghens había además una falta de necesidad en el principio atractivo, «pues he mostrado que aun no existiendo la Tierra los cuerpos no dejarían de tender hacia un centro por aquello que llamamos gravedad» (*Oeuvres,* vol. XXI, p. 471).

[111] Voltaire también percibe el matiz en uno de sus sarcasmos: «Entre

En realidad, el aspecto propiamente dramático del dilema, para Newton, está en que no hay *ni* vacío *ni* éter. El vacío es siempre vacío relativo, sumamente relativo, como extensión atravesada por ondas y poblada de átomos. El éter, por su parte, tampoco es sino ese vacío mal llamado tal, o bien una pura hipótesis donde —como en la carta a Oldenburg— la Tierra y los astros son animales dotados de metabolismo, movidos por vapores, exhalaciones, cuerpos flemáticos y variados espíritus, es decir, donde el aspecto «experimental», abierto o explicaciones sensibles y no sólo matemáticas, conduce de inmediato a conjeturas que el propio Newton expresa sin la menor convicción.

5. HIPOTESIS Y HALLAZGOS

En lo precedente ha habido ocasión de indicar el curioso estatuto del concepto «hipótesis» en la obra de Newton. Tras su *Hipótesis sobre las propiedades de la luz,* y de acumular muchas en la primera edición de los *Principia,* Newton desarrolla una creciente aversión al término, que le lleva a rebautizar con otros nombres cualquier construcción teórica de esa índole, si bien la *Optica* —llamándolas «cuestiones» *(queries)*— incluye casi medio centenar en la última parte del Libro III.

«Desearía que se suspendieran cualesquiera objeciones apoyadas sobre hipótesis» [112].

En el contexto concreto de la frase, esto significa que Newton sólo admite de buena gana objeciones contra sus experimentos o nuevos experimentos que los contradigan. Pero la observación tiene un sentido más profundo también. No es tanto que se excluyan las hipótesis —por «no provenir de los fenómenos»—, como evitar que se razone sobre algo desde la perspectiva de quien dice: «bueno, esto podría ser así, pero ¿qué hacemos entonces con la hipótesis tal, que resulta contradicha?» Por ejemplo, a las órbitas elípticas propuestas por Kepler, que son un descubrimiento *(invention)* sólo

---

vosotros, cartesianos, todo sucede por impulso del que nada se comprende; en el Sr. Newton es por una atracción que no se conoce mejor» (*Cartas filosóficas,* XIV, p. 117). Sin embargo, no es del todo justo comparar —como incomprensibles en términos físicos— los impulsos con las atracciones, los fenómenos de contacto (como la percusión, la presión, etc.) con las acciones a distancia. Por lo demás, la física del impulso no tiene su origen en Descartes ni mucho menos, sino que se remonta al siglo VI, con la obra de Juan Filopón.

[112] Newton, en Burt, *op. cit.,* p. 216.

se puede objetar con otro descubrimiento , o demostrando que los datos y observaciones de Kepler son incorrectos. Ahora bien, es sabido que *todas* las objeciones suscitadas en tiempos de Kepler contra la elipticidad derivan de querer conservar la hipótesis del movimiento circular uniforme.

Siguiendo una vez más a Bacon, Newton avanza la tesis de que no es posible refutar —filosófica o científicamente— *ningún* descubrimiento por el hecho de que parezca contradecir o contradiga un principio general, un postulado, un sistema o cualquier otra «hipótesis» [113]. Así entendido, Newton está dando un paso liberador que lo distingue tajantemente de todos sus ilustres predecesores, apegados en mayor o menor medida al razonamiento «hipotético». Desde Aristóteles a Leibniz, pasando por Copérnico, Galileo y el propio Kepler, ningún constructor de ciencias o métodos está libre de certezas a priori. Hay desde luego la salvedad de Bacon de Verulam y sus inmediatos seguidores (Huyghens y Hooke en primera línea), pero ninguno construyó un sistema del mundo como Newton. Por lo mismo, sir Isaac pudo con toda justicia considerarse *Aufhebung* de toda la reacción antiaristotélica. Por una parte, cumplía rigurosamente la exigencia baconiana: estar abierto a las cosas y evitar cualquier prejuicio. Por otra, no se restringía sólo a lo particular, ni caía en una investigación inconexa y orientada hacia fines exclusivamente prácticos.

Esto no quiere decir que fuese consciente por completo de lo implicado en su *hypothesis non fingo*. El hecho de mencionar la cuestión siempre en contextos metodológicos inclina a pensar que no se sabía como el primer genio científico des-prejuiciado y sistemático a la vez. Con el paso del tiempo, las inconsecuencias conceptuales del materialismo ingenuo, anterior a Einstein, sumadas a la trivialidad de la crítica neopositivista, han sepultado lo más positivo del antihipotetismo. Parecería que sólo hay dos caminos: el de los experimentos y el de las especulaciones por vía hipotética. Sin

[113] No parece haber problema con los axiomas, porque en el raro supuesto de que alguno contradijese un descubrimiento impecable, dejaría automáticamente de ser axiomático y pasaría a ser mera hipótesis. Por otra parte, los axiomas reflejan modalidades operativas del entendimiento (humano), y como tales reflejos de categorías estructurales no pueden verse contradichos por los descubrimientos, certezas que los hombres alcanzan usando aquellas categorías de las cuales surgen los propios axiomas. A pesar de todo, la frontera entre principios y axiomas, *en física,* sigue siendo un asunto pavorosamente delicado. Piénsese, por ejemplo, en el «principio» de identidad, tal como se formula en Whitehead *(Science and the modern world,* cap. I).

embargo, es ridículo pretender construir una ciencia físico-matemática sobre bases puramente experimentales, y jamás ha habido proceso científico sostenido a partir de meras mediciones y recogida de datos singulares. Siendo el experimento, desde Galileo, una pregunta hecha a la Naturaleza, es evidente que el acto de interrogar —con astucia y rigor suficientes para obtener respuestas objetivas, en vez de limitarse a legalizar ídolos personales del investigador y hacer profecías autocumplidas— no puede estar libre de «especulación» en múltiples y obligados puntos.

Lo importante es que la especulación no sea «hipotética». La oposición no se establece entre hipótesis y experimentos, sino entre descubrimiento y convencimiento. Que Newton lo percibía de algún modo así queda probado por la indignación con la cual contesta a los comentarios de Hooke y otros miembros de la Royal Society sobre su «hipótesis de la refrangibilidad de la luz». Esa refrangibilidad es un hallazgo *(inventio),* replica. Nosotros podemos añadir: un hallazgo propiciado conjunta e inseparablemente por unas inferencias teóricas y unos experimentos *ad hoc.* Newton sabe, como el griego, que no sabe nada indiscutible. Ese es su punto de partida. De hecho, no sólo sabe que no sabe; sabe que únicamente llamará saber a lo que tenga el carácter del hallazgo, donde la experimentación y la *theoreia* se vigilen y fecunden recíprocamente [114]. Sospecha también que el experimento contiene una dois inevitable de subjetivismo, y por eso recomienda una crítica concreta de los propios experimentos. Pero lo que finalmente sabe es que nunca afirmará o negará algo «hallado» porque eso conlleve afirmar o negar otra cosa de las «bien sabidas».

Quizá el motivo de que todo el tema del método newtoniano padezca tan profunda ambigüedad —prescindiendo de la dialéctica inherente a cualquier construcción conceptual— haya de conectarse con el pietismo del autor. No custodiar certezas a priori contiene un margen muy considerable de impiedad. Se asemeja en bastantes sentidos a la actitud del apóstol escéptico, que no creerá mientras no vea y toque, mientras no sienta la cosa propuesta. Esta actitud es «el coraje de la verdad» ya mencionado por Platón, que el movimiento científico asumió como noble divisa y que, cuando falta, impone al pensamiento una secuencia fatal de credulidad, superstición y fanatismo. Con todo, Newton era un hombre que rezaba y asistía a oficios religiosos, que se arrepentía de pecar —como ates-

[114] Una «revelación», como la sufrida por Descartes o Pascal, está más cerca del *hallazgo* que mil experimentos sin pensamiento, aunque por su carácter aparatosamente personal no exhiba el debido rigor.

tigua el texto emocionante del cuaderno Fitzwilliam antes mencionado—, y el coraje de buscar imparcialmente el qué del mundo, sin imponer determinaciones edificantes, le resulta tan necesario en un sentido como imposible en otro.

Hay una frescura, una sabia inocencia en el modo newtoniano de investigar la objetividad. El mayor genio matemático de todos los tiempos no va siquiera a pretender que el universo sea una obra geométrica, un sistema de números, ni que sea descifrable plenamente con métodos matemáticos. Como observa agudamente un historiador [115], para Newton «el mundo es lo que es; tanto mejor que podamos hallar en él leyes matemáticas exactas». Con Newton se cumple el dilatado ciclo que va desde la primera teoría físico-matemática (la música) hasta el primer sistema físico-matemático acabado del mundo. Los pitagóricos habían postulado la proporción como verdadero ser de las cosas. Cuando al fin la proporción se torna sistema científico de las últimas y primeras razones, haciéndose así *calculable* [116], ya no es necesaria siquiera esa convicción en la esencia matemática del universo. La certeza pitagórica ha fructificado hasta transformarse en una sucesión de descubrimientos que se siguen unos a otros en grata y renovada sorpresa. Es difícil imaginar una pureza metodológica que supere la del descubridor cuando no impone dogmas a lo descubierto, cuando simplemente exige un encuentro demostrable con razones objetivas. Newton ni siquiera pretende disponer del método idóneo. Se limita a «esperar» que sus *Principia* iluminen algo las operaciones de la Naturaleza «mediante éste o algún otro método más veraz de filosofar».

Y, con todo, este dejar ser al mundo y diligentemente estudiarlo contiene muchas hipótesis parciales y dos centrales. Una es un universo infinito sólo explicable mecánicamente como sistema inercial, que es otro modo de afirmar la falta de finalidad inmanente en los fenómenos. La segunda hipótesis —en los antípodas de la primera— es el *dominus,* el Programa o como quiera llamarse, la potencia «espiritual». Sopesar el grado de acuerdo —y el de oposición— que

[115] Burtt, *op. cit.,* p. 212. Para Burtt «la doctrina de Newton es un interesantísimo estadio de transición entre el providencialismo milagroso [...] y la tendencia posterior a identificar la deidad con el puro hecho del orden racional y la armonía» *(loc. cit.,* p. 299).

[116] Al comienzo de la decimoséptima de sus *Cartas filosóficas,* Voltaire define con rara precisión el cálculo: «arte de numerar y medir con exactitud aquello de lo que no se puede siquiera concebir la existencia» *(ed. cit.,* p. 139).

ambas hipótesis comportan sigue siendo un modo radical de plantear la cosmología [117].

[117] A la vista de las consideraciones anteriores, el lector quizá se pregunta: ¿cabe inferir legítimamente el sistema del mundo de una construcción matemática pura como el Libro I de los *Principia?* Para empezar, la matemática de Newton está sintetizada íntimamente desde el comienzo con nociones físicas, y ya en la Proposición inicial de los *Principia* el lector se enfrenta a un teorema geométrico articulado sobre condiciones materiales como el movimiento uniforme o la fuerza centrípeta. En consecuencia, la legitimidad de la analogía se hace depender de los resultados obtenidos por medios teóricos, resultados que se medirán por la cantidad y exactitud de predicciones verificables. Como esos resultados fueron magníficos, Newton y sus sucesores —estos últimos sobre todo— se sintieron legitimados no sólo para admitir una astronomía basada en una dinámica de atracciones, sino para considerar que la teoría total presentaba sencillamente la *verdad* del mundo físico.

Con todo, algunas cosas sugerían cautela. Prescindiendo de los problemas de la teoría lunar, ya aludidos en su momento, con los progresos en astronomía de observación se fue haciendo perceptible un avance en el perihelio de Mercurio, no predicho por la teoría newtoniana ni explicable a partir de ella. La discrepancia es muy pequeña —un grado de arco para cada ciento cincuenta años—, pero altera la posición calculada de Mercurio en algo más que su diámetro, cifra no despreciable. Como es sabido, Einstein predijo y explicó el fenómeno en el marco de la teoría de la relatividad. El segundo límite, mucho más obvio desde el comienzo, fue la incapacidad para resolver el problema de los tres cuerpos, que suponía ya una muy considerable idealización para objetos como el sistema solar, formados por gran número de ellos. Sin embargo, cualquier discrepancia entre datos de observación y teoría se atribuyó a perturbaciones de cada órbita por influencia de otras masas, como sucede señaladamente con el influjo de Júpiter sobre las revoluciones de Saturno. Esta ingeniosa forma de hacer frente a un problema matemáticamente irresoluble en general, instigó un análisis sistemático de las perturbaciones, y logró sus éxitos más resonantes prediciendo la existencia de nuevos planetas por irregularidades en las órbitas de otros cuerpos astrales ya conocidos. Para cuando —a mediados del siglo XIX— Adams y Leverrier deduzcan la existencia de Neptuno por anomalías en Urano, la mecánica celeste ha recibido ya aportaciones decisivas de Euler, Lagrange, Laplace, Gauss y tantos otros, pero en el origen de la confirmación permanece la teoría newtoniana prácticamente intacta.

Esto no debe enturbiar otro hecho, bien acorde con la personalidad de Newton, que es la manipulación de cifras, observaciones y experimentos, usando valores específicos e introduciendo factores arbitrarios para lograr una concordancia puntual entre datos y teoría. Según R. S. Westfall —apoyado por otros especialistas como C. Truesdell e I. B. Cohen— «parte importante en la persuasividad» de los *Principia* deriva de sutiles y deliberados arreglos hechos por Newton en ese sentido (cf. I. B. Cohen, *The Newtonian revolution,* p. 151).

Tras la teoría general de la relatividad y el desarrollo de la mecánica cuántica, la pregunta sobre la *verdad* del sistema newtoniano se enfrenta a objeciones de fondo y forma mucho más amplias, algunas expuestas en las notas a las definiciones newtonianas de masa, espacio, tiempo y movimiento absoluto. Reducido a una franja muy limitada del acontecer —fenómenos *macrofísicos* con *pequeñas* velocidades— el sistema de Newton comienza a ocupar con respecto a la teoría relativista y la cuántica una posición en alguna medida análoga a la que guardaba el sistema de Ptolomeo con respecto a él: predice bien ciertas cosas, es matemáticamente una gran obra, pero no se adapta del todo al verdadero estado de cosas *físico*.

Por su parte, la teoría general de la relatividad, tras los infructuosos esfuerzos de Einstein por construir una teoría del campo unificado, sigue apoyada en ecuaciones diferenciales que todavía equivalen a postulados y suposiciones solamente, apoyadas —eso sí— en algunas predicciones cumplidas por fenómenos. La mecánica cuántica, sin disfraz, presenta como principio el probabilismo y la indeterminación. En el terreno de la matemática pura no se ha zanjado la disputa entre cantorianos y pragmáticos, entre formalistas e intuitivos, y esa disputa concierne a las relaciones de la matemática con la lógica, a su validez como elemento «gnoseológico», tras varios siglos de expansión sin vacilaciones. Es un matemático de la talla de Weyl quien da testimonio de «un demonio oculto, la inconsistencia y falta de solidez de los cimientos sobre los cuales se construye todo el imperio» (cf. A. D'Abro, *The Rise of the New Physics,* vol. I, p. 208). Evidentemente, la duda y el desacuerdo ya no son patrimonio exclusivo de la filosofía. El movimiento que desde Newton se lanza con incontenible confianza a investigar el mundo ayudado por principios matemáticos es hoy un enorme poder social, heredero de la religión y aquejado por esa esterilidad tan propia de las instituciones en crisis. Lo que amenaza no es el viejo claustro de frailes y practicantes de ocultologías, sino el crecimiento interno de la institución victoriosa misma, unido a la falta de hallazgos con singular relevancia en el último medio siglo aproximadamente, salvo en campos antes menos atendidos como genética y teoría de la información. Además, desde la teoría atómica de Bohr no ha aparecido una sola visión, una sola idea conceptualizable en general de la realidad física. Las teorías siguientes son ya puras ecuaciones, obligadas para no tropezar con la masa de los «datos» a elevarse hasta grados cada vez mayores de abstracción.

Cabe esperar por eso que sea una crisis superable, y que la propia «filosofía de la Naturaleza», volviendo a visitar con las otras profesiones y oficios el templo baconiano —desde Nietzsche «voluntad de poderío»—, resuelva sus trastornos de crecimiento (sobre todo el muy marcado predominio de hallazgos *destructivos* en el conjunto) sin refugiarse en el hieratismo sacerdotal, tendencia desgraciadamente implícita en lo que tiene de burocracia establecida ya a nivel planetario. Aún en ese caso, y aceptando con humor las utopías negativas de la ciencia ficción, una dictadura de geómetras y algebristas no parece tan temible como una de abogados, arquitectos, militares o médicos, por no decir de santos en general.

AL LECTOR

Poner en castellano los *Principia* se parece algo a traducir una biblia que todos citan y nadie encuentra en su lengua, ni casi en la ajena. Ninguna obra tan fundamental ha sufrido en grado tan parejo el destino de una influencia abrumadora y una completa falta de presencia «física». Con el texto a mano, el lector paciente comprobará que Newton nunca sostuvo muchas de las tesis atribuidas a la llamada mecánica newtoniana y, a la inversa, que sí mantuvo otras muchas silenciadas o ignoradas.

Por lo demás, Newton tiene cierta responsabilidad en el extendido desconocimiento de su gran obra. Hay en ella un aspecto de oscuridad gustosamente acogida y, ante todo, hay una desmesura en el contenido; tras casi un millar de proposiciones y teoremas, algunos de extremada complejidad, el lector tiende a rendirse ante la potencia reflexiva que el autor despliega, y —si es persona con formación matemática— sentirá la tentación de acudir a exposiciones mucho más sintéticas de epígonos con la talla de Langrange y Laplace. En efecto, como manual de mecánica racional y de astronomía matemática, los *Principia* quedaron atrás bastante pronto. Sin embargo, el texto concreto del tratado está escrito con rigurosa meticulosidad, revisado interminables veces, todo él sembrado de «filosofía natural» no expuesta a la caducidad de las notaciones y procedimientos al uso.

Dos fuentes se han utilizado para la traducción. La primera es una impresión facsímil del texto latino original, tras la última revisión del autor en 1726, usando al efecto la edición *de variorum* de A. Koyré e I.B. Cohen, *Isaac Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Cambridge, Cambridge University Press, 1972, 2 vols.). La segunda fuente ha sido la primera versión inglesa de

Andrew Motte, aparecida en 1729, actualizada en algunos aspectos terminológicos por el matemático Florian Cajori (1.ª ed. California University Press, 1934, 2. vols.).

El texto latino se ha usado allí donde Newton sienta principios filosóficos, como es el caso de los Axiomas, las Definiciones, muchos Escolios, las Reglas para filosofar y algunas Proposiciones y Corolarios aislados. El de Motte-Cajori ha sido usado para lo demás, si bien evitando traducir del inglés términos que en castellano pueden verterse directamente desde el latín con mínima o nula modificación, prefiriéndose en tal caso el arcaísmo a la forma modernizada, como —por ejemplo— en la traducción de *vis insita* por fuerza *ínsita* en vez de «innata» *(innate)*.

Las versiones completas de los *Principia* hechas hasta la fecha son ocho. Se inician con la traducción de Motte en 1729 (B. Motte, Middle-Temple-Gate), seguida por la francesa de Madame de Chastellet con breve prólogo de Voltaire (más tarde aumentada con comentarios de Clairaut, reimpresa en Blanchard, París, 1966), la alemana de J. Ph. Wolfers en 1872 (Oppenheim, Berlín), una versión rusa de 1916 debida a A. N. Krilov (Vypusk, Petrogrado), una sueca de 1927 (Gleerups Förlag, Lund), una japonesa debida a Kunio Oka (Shunjusha, Tokio), una rumana, en 1956, de V. Marian (Editura Academiei Republicii Populare, Bucarest) y la italiana de A. Pala en 1966 (Editrice Torinese, Turín).

ACLARACION DE ALGUNAS EXPRESIONES MATEMATICAS

El lenguaje matemático utilizado por Newton en los *Principia* no presenta, en general, grandes dificultades para el lector familiarizado con los métodos propios de la geometría euclidiana. Por hacer más fluida la lectura, se han modernizado a veces ciertas expresiones del cálculo y la geometría (la potenciación y su inversa, por ejemplo), pero se ha preferido dejarlas tal cual cuando la comprensión no era difícil. Por eso, el lector tropezará frecuentemente con arcaísmos. Aclararemos ahora el significado de algunos de ellos.

En las operaciones con longitudes, un «rectángulo AB por (o en, o bajo) BC» es el área *ab*, siendo *a* la medida de AB y *b* la de BC, y un «sólido» una operación con longitudes, áreas, etc., que tiene las dimensiones de un volumen. «Aplicar» un área a una longitud equivale a dividir el número que expresa la primera por el número que expresa la segunda.

En las construcciones geométricas se han traducido los verbos *tango, touch,* por su equivalente castellano «tocar». Por eso un punto «toca a» una línea, superficie, etc., cuando está en o pertenece a la línea, superficie, etc. Dos rectas «se tocan» en un punto cuando se cortan en él, y también una recta o curva «toca a» una curva o superficie, cuando es tangente a la curva o superficie en ese punto.

Las figuras geométricas y sus elementos pueden darse «en especie», «en magnitud» o «en posición». Siguiendo las definiciones de Euclides en su libro de *Data,* «se dicen *dadas en especie* las figuras rectilíneas en las cuales los ángulos están dados independientemente, estando dadas las razones de los lados entre sí» (Euclides, *Data,*

Def. 3); ampliando esta definición para figuras no rectilíneas, una figura geométrica se dará «en especie» cuando se dé la clase de equivalencia de todas las que son semejantes entre sí. Para Euclides «se dicen *dados en magnitud* áreas, líneas y ángulos a los que podemos encontrar < magnitudes > iguales» (*ibid.*, Def. 1); por lo tanto, al dar una figura, etc., «en magnitud» la individualizamos en la clase de equivalencia antes mencionada, aunque sin determinar su posición en el espacio geométrico. Esta última determinación es la que se significa, por último, al dar «en posición»: «Se dicen *dados en posición* los puntos, líneas y ángulos que siempre ocupan el mismo lugar» (*ibid.*, Def. 4).

Las funciones trigonométricas habituales (seno, coseno, tangente, etc.) difieren de las que nosotros utilizamos en que no han sido reducidas a su expresión angular. Así, por ejemplo, el «seno del arco AB» será igual al seno del ángulo por el radio («seno de AB» = R sen α). Se utiliza también profusamente la función «seno verso». El «seno verso del arco AB» equivale al radio menos el «coseno del arco AB» («seno verso de AB» = R (1 — cos α)), es decir, es la flecha del arco doble.

En las operaciones con cónicas interviene con frecuencia el *latus rectum* (y a veces el *latus transversum*) de un punto o vértice de una cónica determinada. Si $2a$ es la longitud del eje que pasa por ese punto y $2b$ la del conjugado, el *latus transversum* será igual a $2a$, y el *rectum* igual a $2b^2/a$, si la cónica es una elipse o una hipérbola. Con respecto a estos dos ejes, la ecuación canónica de la elipse o hipérbola es $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$; por lo tanto, $\pm \frac{y^2}{(a + x)(a - x)} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{2b^2/a}{2a} = \frac{L_r}{L_t}$ = *latus rectum/latus transversum;* y el cuadrado de la ordenada será al producto de los segmentos determinados en el eje como el *latus rectum* al *latus transversum,* propiedad de ambas cónicas que Newton utilizará una y otra vez.

Si efectuamos un cambio de coordenadas $x' = x - a$, $\pm y^2 = \frac{b^2}{a^2} x' (x' + 2a)$; y en el caso de una elipse, $y^2 = Lx' \frac{x' + 2a}{2a}$.

Pero una parábola puede considerarse como el límite de una familia de elipses cuando el eje tiende a infinito. Por lo tanto, en la parábola

$y^2 = \lim_{a\to\infty} Lx' \frac{x' + 2a}{2a} = Lx'$. Es decir, si la parábola se da en la forma habitual $y^2 = 2px$, el *latus rectum* será igual a $2p$*.

Un pequeño número de veces aparece la expresión «la primera de dos medias proporcionales». Si construimos una progresión geométrica $a, m, m', b..$, en la que a sea el primer término y b el cuarto, m será esta «primera de dos medias proporcionales». Por tanto, $m = \sqrt[3]{a^2 b}$.

El lector encontrará, sin duda, otros arcaísmos y medidas hoy insólitas, pero que no presentan grandes problemas.

PABLO FERNÁNDEZ-FLÓREZ

* «Latus rectum» traduce el «ὀρθία», de Apolonio, el parámetro (παὰ ἣν δύναντται) de la cónica dependiente de las dimensiones del cono y de la posición con respecto a él del plano que lo secciona. En las proposiciones 11, 12 y 13 del Libro I del «Tratado de las secciones cónicas», Apolonio demuestra geométricamente que $y^2 = (x + a) L \pm L \frac{(x + a)^2}{2a}$, para elipse e hipérbola e $y^2 = Lx$ para la parábola. En la proposición 21 del Libro I demuestra la relación antes mencionada para la elipse y la hipérbola. En la Definición 11 hace $2b = \sqrt{L\, x\, 2a}$; por lo tanto, $L = \frac{2b^2}{a}$. En general, los cuatro primeros libros del «Tratado de las secciones cónicas» de Apolonio de Perga son la base geométrica del Libro I de los «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica».

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

D. BREWSTER: *Memoirs of the life, writings and discoveries of Sir Isaac Newton,* Johnson Reprint Corp., Londres, 1965.

E. A. BURTT: *The Metaphysical Foundations of Modern Science,* Doubleday Anchor, Nueva York, 1954.

H. BUTTERFIELD: *Los orígenes de la ciencia moderna,* Taurus, Madrid, 1971.

I. B. COHEN: *Introduction to Newton's Principia,* Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

— *The Newtonian Revolution,* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

A. R. y M. B. HALL (eds.): *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton,* Cambridge University Press, Cambridge, 1962.

J. HERIVEL, *The Background of Newton's Principia,* Clarendon, Oxford, 1965.

A. KOESTLER, *Les somnambules, Essai sur l'histoire des conceptions du monde,* Calmann-Lévy, París, 1960.

A. KOYRÉ, *Etudes newtoniennes,* Gallimard, París, 1968.

F. E. MANUEL, *A Portrait of Isaac Newton,* Harvard University Press, Cambridge (Mass.), 1968.

R. S. WESTFALL, *Force in Newton's Physics,* Macdonald, Londres, 1971.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

PRINCIPIOS MATEMATICOS DE LA FILOSOFIA NATURAL

Oda dedicada a Newton por Edmund Halley

AL MUY ILUSTRE VARON
ISAAC NEWTON
Y A ESTE SU TRABAJO FISICO-MATEMATICO,
SIGNO EGREGIO DE NUESTRO TIEMPO
Y NUESTRA ESTIRPE

Contempla tu penetrante mirada la pauta de los cielos
Y el equilibrio de las masas en cálculos divinos,
Traza las omnipresentes leyes que el creador violar
No quiso, tomando como cimientos de sus obras.
Ya no se oculta la fuerza que mueve el orbe más lejano,
Ganados al fin los lugares recónditos de los cielos.
Encaramado sobre su trono el Sol ordena a todas las cosas
Tender hacia él por inclinación y caída,
Y no padece que los cursos de las estrellas sean rectos
Mientras se mueven cruzando el vasto vacío;
Sino que consigo mismo como centro acelera los orbes
En inmóviles elipses. Conocemos ahora los rumbos
Bruscamente cambiantes de los cometas, otrora fuente
De pavor; no temblamos ya acobardados bajo apariencias
De astros barbados. Aprendimos al fin por qué la Luna
Pareció en otro tiempo viajar con pasos desiguales,
Como negándose –burlona– a someter a números su andadura,
Hasta hoy misteriosa para todo astrónomo; aprendimos
Por qué aunque las Estaciones se van y luego vuelven
Las Horas se mueven siempre adelante en su camino;
Y explicadas también están las fuerzas de lo profundo,
Cómo la errante Cyntia agita las mareas, por lo cual
La resaca, abandonando ahora los sargazos junto a la orilla,
Expone bancos de arena sospechados por los marinos,
Volviendo luego a lanzar sus altas olas sobre la playa.

Son contempladas ahora a la luz de la razón,
Disueltas al fin por la ciencia las nubes de ignorancia,
Cuestiones que humillaron la mente de antiguos sabios
Y a nuestros instruidos doctores suelen conducir
A pretensiones no por voceadas menos vanas. Aquellos
Sobre quienes el espejismo arroja su lóbrego manto de duda
Alzados ahora sobre las alas cedidas por el genio sublime
Pueden penetrar en las mansiones de los dioses
Y escalar las alturas del cielo.
Alzaos, hombres mortales, y apartando cuidados terrenos
Aprended la potencia de una mente de celeste linaje
Retirada del rebaño en su pensar y vivir.
Quien con las tablas de la ley prohibió el crimen,
El robo, el adulterio y los fraudes del perjurio,
Instalando a pueblos nómadas en urbes rodeadas de
Murallas fue el fundador del Estado.
Quien bendijo la raza con el don de Ceres,
Quien extrajo de las uvas un bálsamo curativo,
O mostró cómo sobre un tejido hecho de juncos
Que crecen en las márgenes del Nilo pueden grabarse
Símbolos de sonidos, presentando así la voz a la vista,
Ese hombre iluminó al humano lote aligerando
Las miserias de la vida con cierta felicidad.
Pero ved ahora que, admitidos al banquete de los dioses,
Contemplamos la política del cielo
Y haciendo patentes los secretos ocultos de la Tierra
Discernimos el orden inmóvil de las cosas
Y lo que decretaron en el pasado los siglos del mundo.

Venid, pues, los que sabéis deleitaros con el néctar
Celestial a celebrar conmigo en cánticos el nombre
De Newton, grato a las Musas, porque él
Abrió los tesoros ocultos de la verdad:
Tan caudalosamente derramó Apolo, el Sol, en su espíritu
Y en su pecho puro el resplandor de su propia divinidad.
Ningún mortal puede acercarse más a los dioses.

PREFACIO DE NEWTON A LA PRIMERA EDICION

Como los antiguos (según cuenta Pappus) *consideraban de la mayor importancia la mecánica para la investigación de las cosas naturales, y como los modernos –rechazando formas substanciales y cualidades ocultas– han intentado reducir los fenómenos de la naturaleza a las leyes matemáticas, he querido en este trabajo cultivar la matemática en tanto en cuanto se relaciona con la filosofía. Los antiguos consideraban dos aspectos en la mecánica: el racional, que procede con exactitud mediante demostraciones, y el práctico. A la mecánica práctica pertenecen todas las artes manuales, de las que tomó su nombre la mecánica. Pero como los artífices no trabajan con exactitud absoluta, llega a suceder que lo perfectamente exacto se llama geométrico, y mecánico lo no tan exacto. Sin embargo, los errores no están en el arte, sino en los artífices. Quien trabaja con menos precisión es un mecánico imperfecto; y si alguien pudiera trabajar con precisión perfecta sería el más exacto de los mecánicos, porque la descripción de las líneas rectas y los círculos sobre la cual se basa la geometría pertenece a la mecánica. La geometría no nos enseña a trazar esas líneas, aunque requiere que sean trazadas, pues exige que el aprendiz aprenda primero a describirlas con precisión antes de entrar en la geometría, mostrando luego cómo pueden resolverse los problemas de esas operaciones. Describir líneas rectas y círculos es un problema, pero no un problema geométrico. Se exige de la mecánica la solución de ese problema, y cuando está resuelto la geometría muestra la utilidad de lo aprendido; y constituye un*

título de gloria para la geometría el hecho de que a partir de esos pocos principios, recibidos de otra procedencia, sea capaz de producir tantas cosas. Por consiguiente, la geometría está basada en la práctica mecánica, no es sino aquella parte de la mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir. Pero como las artes manuales se emplean principalmente en el movimiento de cuerpos, resulta que la geometría se refiere habitualmente a su magnitud, y la mecánica a su movimiento. En este sentido, la mecánica racional será la ciencia de los movimientos resultantes de cualesquiera fuerzas, y de las fuerzas requeridas para producir cualesquiera movimientos, propuestas y demostradas con exactitud. Esta parte de la mecánica –en tanto en cuanto se extiende a los cinco poderes relacionados con las artes manuales– fue cultivada por los antiguos, que sólo consideraron la gravedad (no siendo un poder manual) a la hora de mover pesos mediante esos poderes. Pero yo considero la filosofía más que las artes, y no escribo sobre potencias manuales, sino naturales, tomando ante todo en cuenta las cosas que se relacionan con gravedad, levedad, fuerza elástica, resistencia de fluidos y fuerzas semejantes, tanto atractivas como impulsivas; por consiguiente, ofrezco esta obra como principios matemáticos de la filosofía, pues toda la dificultad de la filosofía parece consistir en pasar de los fenómenos de movimiento a la investigación de las fuerzas de la Naturaleza, y luego demostrar los otros fenómenos a partir de esas fuerzas; a ello se enderezan las proposiciones generales de los dos primeros Libros. En el tercero proporciono un ejemplo de esto en la explicación del Sistema del Mundo; pues mediante las proposiciones matemáticamente demostradas en los Libros precedentes, deduzco en el tercero de los fenómenos celestes las fuerzas de gravedad con las cuales los cuerpos tienden hacia el Sol y los diversos planetas. Luego, a partir de esas fuerzas, mediante otras proposiciones igualmente matemáticas, deduzco los movimientos de los planetas, los cometas, la Luna y el mar. Me gustaría que pudiésemos deducir el resto de los fenómenos de la Naturaleza siguiendo el mismo tipo de razonamiento a partir de principios mecánicos. En efecto, muchas razones me inducen a sospechar que todos ellos pueden depender de ciertas fuerzas en cuya virtud las partículas de los cuerpos –por causas hasta hoy desconocidas– se ven mutuamente impelidas unas hacia otras y se unen en figuras regulares, o son repelidas y se alejan unas de otras. Siendo desconocidas estas fuerzas, los filósofos han investigado en vano la Naturaleza hasta hoy; pero espero que los principios aquí expues-

os arrojarán cierta luz sobre este método de filosofar, o sobre lguno más veraz.

En la publicación de esta obra el excepcionalmente perspicaz y ruditísimo señor Edmund Halley *no sólo me ayudó a corregir los rrores de imprenta y a preparar las figuras geométricas, sino que l libro únicamente ha llegado a aparecer debido a su insistencia; uando obtuvo de mí las demostraciones sobre la figura de las rbitas celestes, me urgió continuamente a comunicarlo a la* Royal ociety, *quien más tarde –debido a su amable estímulo y a sus uegos– me comprometió a la publicación. Pero después de haber mpezado a considerar las desigualdades de los movimientos unares, y entrado en algunas otras cosas relacionadas con las eyes y medidas de la gravedad y otras fuerzas; y las figuras que lescribirán cuerpos atraídos de acuerdo con leyes dadas; y el novimiento de cuerpos plurales entre sí; el movimiento de cuerpos n medios resistentes; las fuerzas, densidades y movimientos de los nedios; las órbitas de los cometas y cosas semejantes, postpuse la ublicación hasta haber investigado esas materias y poder enun- iar todo el conjunto. Lo relacionado con los movimientos lunares imperfectos como son) está reunido en los corolarios de la Proposi- ión LXVI, para evitar verme obligado a proponer y demostrar nítidamente las diversas cosas allí contenidas con un método más rolijo de lo que el tema merecía, interrumpiendo la serie de las tras Proposiciones. Algunas cosas, descubiertas después que el resto, preferí insertarlas en lugares menos idóneos, antes que cambiar el número de las proposiciones y citas. De corazón suplico que lo aquí expuesto pueda ser leído con indulgencia; y que mis trabajos en un tema tan difícil puedan examinarse no tanto desde la perspectiva de la censura como para remediar sus defectos.*

IS. NEWTON

Cambridge, Trinity College, mayo 8, 1686.

PREFACIO DE NEWTON A LA SEGUNDA EDICION

En esta segunda edición de los Principia *se han hecho varias correcciones y algunas adiciones. En la segunda sección del Libro primero se hace más fácil y se amplía la determinación de las fuerzas en cuya virtud los cuerpos pueden describir órbitas dadas. En la sección séptima del segundo Libro se ha estudiado con más minuciosidad la teoría de la resistencia de los fluidos, confirmándose con nuevos experimentos. En el tercer Libro la teoría lunar y la precesión de los equinoccios se ha deducido más plenamente de sus principios; y la teoría de los cometas ha sido confirmada por más ejemplos del cálculo de sus órbitas, hechos también con mayor exactitud.*

Is. Newton

Londres, marzo 28, 1713.

PREFACIO DEL EDITOR A LA SEGUNDA EDICION

Te presentamos aquí, lector benévolo, la muy deseada edición le la nueva filosofía newtoniana, *ahora grandemente corregida e ncrementada. Las materias principales de esta obra celebérrima ueden colegirse del Indice adjunto. Lo que ha sido añadido o nodificado se indica en el Prefacio del autor. Unicamente nos ueda añadir algunas cosas sobre el método de esta filosofía.*

Los que han abordado la filosofía natural pueden reducirse a res clases aproximadamente. De entre ellos, algunos han atribuido a las diversas especies de cosas cualidades ocultas y específicas, de acuerdo con lo cual se supone que los fenómenos de cuerpos particulares proceden de alguna manera desconocida. El conjunto le la doctrina escolástica, derivada de Aristóteles *y los* peripatéti-cos, *se apoya en este principio. Estos autores afirman que los liversos efectos de los cuerpos surgen de las naturalezas particula-res de esos cuerpos. Pero no nos dicen de dónde provienen esas naturalezas y, por consiguiente, no nos dicen nada. Como toda su preocupación se centra en dar nombres a las cosas, en vez de buscar en las cosas mismas, podemos decir que han inventado un modo filosófico de hablar, pero no que nos hayan dado a conocer una verdadera filosofía.*

Otros han intentado aplicar sus esfuerzos mejor rechazando ese fárrago inútil de palabras. Suponen que toda materia es homogé-nea, y que la variedad de formas percibida en los cuerpos surge de algunas afecciones muy sencillas y simples de sus partículas componentes. Y procediendo de las cosas sencillas a las más

compuestas toman con certeza un buen camino, siempre que no atribuyan a esas afecciones ningún modo distinto del atribuido por la propia Naturaleza. Pero cuando se toman la libertad de imaginar arbitrariamente figuras y magnitudes desconocidas, situaciones inciertas y movimientos de las partes, suponiendo además fluidos ocultos capaces de penetrar libremente por los poros de los cuerpos, dotados de una sutileza omnipotente y agitados por movimientos ocultos, caen en sueños y quimeras despreciando la verdadera constitución de las cosas, que desde luego no podrá deducirse de conjeturas falaces cuando apenas si logramos alcanzarla con comprobadísimas observaciones. Los que parten de hipótesis como primeros principios de sus especulaciones –aunque procedan luego con la mayor precisión a partir de esos principios– pueden desde luego componer una fábula ingeniosa, pero no dejará de ser una fábula.

Queda entonces la tercera clase, que se aprovecha de la filosofía experimental. Estos pensadores deducen las causas de todas las cosas de los principios más simples posibles; pero no asumen como principio nada que no esté probado por los fenómenos. No inventan hipótesis, ni las admiten en filosofía, sino como cuestiones cuya verdad puede ser disputada. Proceden así siguiendo un método doble, analítico y sintético. A partir de algunos fenómenos seleccionados deducen por análisis las fuerzas de la naturaleza y las leyes más simples de las fuerzas; y desde allí, por síntesis, muestran la constitución del resto. Ese es el modo de filosofar, incomparablemente mejor, que nuestro célebre autor ha abrazado con toda justicia prefiriéndolo a todo el resto, por considerarlo único merecedor de ser cultivado y adornado por sus excelentes trabajos. Y del mismo nos ha proporcionado un ejemplo ilustrísimo mediante la explicación del Sistema del Mundo, deducida felicísimamente de la teoría gravitatoria. Otros sospecharon o imaginaron antes que el atributo de la gravedad se encontraba en todos los cuerpos, pero él ha sido el primer y único filósofo que pudo demostrarlo a partir de lo aparente, convirtiéndolo en un sólido cimiento para las especulaciones más nobles.

Sé que algunas personas –varones de gran nombre demasiado poseídos por ciertos prejuicios– se muestran renuentes a la hora de aceptar este nuevo principio, prefiriendo gustosamente nociones inciertas a las ciertas. No es mi intención menoscabar la reputación de esos hombres eminentes. Me limitaré a exponerte, lector benévolo, las consideraciones necesarias para que puedas por ti mismo ponderar equitativamente la cuestión.

Empecemos por eso nuestra argumentación con lo más sencillo y próximo, considerando un momento cuál es la naturaleza de la gravedad en los cuerpos terrestres, a fin de que podamos proceder con mayor seguridad cuando pasemos a considerar el tema en los cuerpos celestes que se encuentran a la distancia más remota. Hay acuerdo unánime hoy entre los filósofos en el sentido de que todos los cuerpos situados alrededor del planeta tienden por peso hacia la Tierra. Múltiples experiencias confirman que no se encuentran cuerpos sin peso. La levedad relativa no es verdadera levedad, sino sólo aparente, que brota de la gravedad preponderante de los cuerpos contiguos.

Más aún, tal como todos los cuerpos tienden por su peso hacia la Tierra, así también tiende la Tierra por peso hacia todos los cuerpos. Se prueba de este modo que la acción de la gravedad es mutua e igual para ambas partes. Dividamos la masa de la Tierra en dos partes cualesquiera, iguales o desiguales; si el peso recíproco de las partes no fuese igual, la de peso menor cedería a la de peso mayor, y las dos partes se moverían juntas indefinidamente en línea recta hacia el punto al cual tiende la de mayor peso, lo cual es totalmente contrario a la experiencia. Debemos decir, por consiguiente, que los pesos con los cuales las partes se atraen son iguales; es decir, que la acción de la gravedad es mutua e igual en direcciones contrarias.

Los pesos de cuerpos a iguales distancias del centro de la Tierra son como las cantidades de materia de los cuerpos. Esto se deduce de la aceleración idéntica de todos los cuerpos que caen desde un estado de reposo a causa de sus pesos, pues las fuerzas mediante las cuales cuerpos desiguales son igualmente acelerados deben ser proporcionales a las cantidades de materia a mover en cada caso. Ahora bien, que todos los cuerpos en caída tengan idéntica aceleración se muestra en que cuando es suprimida la resistencia del aire –como acontece con el aparato de vacío de Boyle– *describen espacios iguales en tiempos iguales; y, con todo, esto resulta probado aún más precisamente en los experimentos con péndulos.*

Las fuerzas atractivas de cuerpos a iguales distancias son como las cantidades de materia de los cuerpos. Como los cuerpos gravitan hacia la Tierra y la Tierra hacia los cuerpos con momentos iguales, el peso de la Tierra con respecto a cada cuerpo, o la fuerza con la cual el cuerpo atrae a la Tierra, será igual al peso del mismo cuerpo hacia la Tierra. Pero este peso se mostró que era la cantidad de materia en el cuerpo; por tanto, la fuerza

con la cual cada cuerpo atrae a la Tierra, o la fuerza absoluta del cuerpo, será como la misma cantidad de materia.

Por consiguiente, la fuerza atractiva de todos los cuerpos surge de y está compuesta por las fuerzas atractivas de las partes, pues –como acaba de mostrarse– si la masa de la materia se aumenta o disminuye, aumenta o disminuye ese poder. Debemos por eso sacar en conclusión que la acción de la Tierra está compuesta por las acciones unidas de sus partes y, en consecuencia, que todos los cuerpos terrestres deben atraerse recíprocamente los unos a los otros, con fuerzas absolutas que son proporcionales a la materia atrayente. Esta es la naturaleza de la gravedad sobre la Tierra; veamos ahora cuál es en los cielos.

Es una ley de la Naturaleza, recibida por todos los filósofos, que cualquier cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras no sea forzado a cambiar ese estado en virtud de una fuerza externa. Pero de esto se sigue que los cuerpos que se mueven en líneas curvas y que, en consecuencia, se ven continuamente desviados de las líneas rectas tangentes a sus órbitas, son retenidos en sus sendas curvilíneas por alguna fuerza continuamente actuante. Puesto que los planetas se mueven en órbitas curvilíneas, debe existir alguna fuerza en acción incesante responsable de su continuo desvío con respecto a las tangentes.

Hoy es evidente a partir de razonamientos matemáticos, y está rigurosamente demostrado, que todos los cuerpos que se mueven en cualquier línea curva descrita en un plano y que, mediante un radio trazado hasta cualquier punto –sea en reposo o movido de cualquier modo–, describen alrededor de ese punto áreas proporcionales a los tiempos, se ven urgidos por fuerzas dirigidas hacia ese punto. Esto, por lo mismo, ha de concederse. Como todos los astrónomos coinciden en que los planetas primarios describen alrededor del Sol, y los secundarios alrededor de los primarios, áreas proporcionales a los tiempos, se sigue que las fuerzas mediante las cuales se ven continuamente apartados de las tangentes rectilíneas, y obligados a girar en órbitas curvilíneas, se dirigen hacia los cuerpos que están situados en los centros de las órbitas. Por consiguiente, esta fuerza puede sin impropiedad llamarse centrípeta con respecto al cuerpo que gira, y atractiva con respecto al cuerpo central, sea cual fuere la causa de la que se imagina surgida.

Debe concederse además como matemáticamente demostrado que si diversos cuerpos giran en círculos concéntricos con un

ıovimiento uniforme, y los cuadrados de los tiempos periódicos ɔn como los cubos de las distancias a partir del centro común, las ıerzas centrípetas estarán en proporción inversa a los cuadrados e las distancias. O, si los cuerpos giran en órbitas casi circulares los ápsides de las órbitas están en reposo, las fuerzas centrípetas e los cuerpos que giran serán inversamente proporcionales a los uadrados de las distancias. Todos los astrónomos coinciden en ue esos hechos rigen para todos los planetas. Y así las fuerzas entrípetas de todos los planetas están en proporción inversa al uadrado de las distancias desde los centros de sus órbitas. lguien podría objetar que los ápsides de los planetas, y especial- ıente de la Luna, no están absolutamente en reposo, sino que se en arrastrados progresivamente por una especie de movimiento ento; pero podría respondérsele que –incluso aceptando que este ıovimiento muy lento surge de una leve desviación de la fuerza entrípeta con respecto a la ley del cuadrado de las distancias– ıodemos calcular matemáticamente la cantidad de esa aberración descubrir que es perfectamente despreciable. Pues incluso la azón de la propia fuerza centrípeta lunar, que es la más irregular le todas, variará inversamente como una potencia un poco superior l cuadrado de la distancia, pero se quedará sesenta veces más erca del cuadrado que del cubo de la distancia. Con todo, ıodemos dar una respuesta más verdadera diciendo que esta ɔrogresión de los ápsides no surge de una desviación con respecto la ley de los cuadrados inversos de la distancia, sino de una ɔausa bien distinta, como muy admirablemente se demuestra en sta obra. Es seguro entonces que las fuerzas centrípetas con las uales tienden los planetas primarios hacia el Sol y los planetas ecundarios hacia sus primarios son exactamente el inverso de los uadrados de sus distancias.

Partiendo de lo hasta aquí dicho, es obvio que los planetas son etenidos en sus órbitas por alguna fuerza que actúa continuamen- te sobre ellos; es obvio que esta fuerza se dirige siempre hacia los centros de sus órbitas; es obvio que su intensidad se ve incrementa- da al acercarse y reducida al alejarse del centro, y que es incrementada en la misma proporción en la que se disminuye el cuadrado de la distancia, y reducida en la misma proporción en la que se aumenta el cuadrado de la distancia. Veamos ahora si, haciendo una comparación entre las fuerzas centrípetas de los planetas y la fuerza de la gravedad, no descubrimos acaso que son de la misma especie. Ahora bien, serán de la misma especie si en ambas partes descubrimos las mismas leyes y los mismos atributos.

Consideremos entonces primero la fuerza centrípeta de la Luna, que es la más próxima a nosotros.

Los espacios rectilíneos que los cuerpos dejados caer a partir de un estado de reposo describen en un tiempo dado al comienzo mismo del movimiento, cuando los cuerpos se ven urgidos por cualesquiera fuerzas, son proporcionales a las fuerzas. Esto se sigue del razonamiento matemático. Por consiguiente, la fuerza centrípeta de la Luna girando en su órbita es a la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra como el espacio que describiría la Luna en un intervalo muy breve de tiempo, privada de toda su fuerza circular y descendiendo por su fuerza centrípeta hacia la Tierra, es al espacio que describiría un grave cayendo por la fuerza de su gravedad cerca de la Tierra en el mismo intervalo de tiempo. El primero de esos espacios es igual al seno verso del arco descrito por la Luna durante el mismo tiempo, porque ese seno verso mide la traslación de la Luna con respecto a la tangente producida por la fuerza centrípeta, y por eso mismo puede ser calculado teniendo el tiempo periódico de la Luna y su distancia a partir del centro de la Tierra. El último espacio se descubre mediante experimentos con péndulos, como mostró Huygens. *En consecuencia, haciendo un cálculo descubriremos que el primer espacio es al segundo –o que la fuerza centrípeta de la Luna será a la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra– como el cuadrado del semidiámetro de la Tierra es al cuadrado del semidiámetro de la órbita. Pero, por lo que se ha mostrado antes, se mantiene la misma proporción entre la fuerza centrípeta de la Luna girando en su órbita y la fuerza centrípeta de la Luna cerca de la superficie de la Tierra. Por consiguiente, la fuerza centrípeta cerca de la superficie de la Tierra es igual a la fuerza de gravedad. Por tanto, no se trata de dos fuerzas diferentes, sino de una sola, pues si fuesen diferentes al unirse harían que los cuerpos descendieran hacia la Tierra con el doble de la velocidad con la cual caerían debido a la fuerza de la gravedad solamente. Es obvio por eso que la fuerza centrípeta –mediante la cual la Luna se ve continuamente impelida o atraída fuera de la tangente y retenida en su órbita– es la fuerza misma de la gravedad terrestre extendiéndose hasta la Luna. Y es muy razonable creer que esta fuerza deba extenderse a grandes distancias, pues no encontramos disminución sensible de ella en la cumbre de las montañas más elevadas. Por consiguiente, la Luna gravita hacia la Tierra; pero, por otra parte, la Tierra gravita igualmente hacia la Luna por una acción recíproca, la cual resulta también abundantemente confirmada en la filosofía que*

e ocupa de las mareas y la precesión de los equinoccios, fenómenos urgidos por la acción tanto de la Luna como del Sol sobre la Tierra. Así descubrimos, por último, la ley en cuya virtud la fuerza le la gravedad disminuye a grandes distancias de la Tierra. Dado que la gravedad no es en modo alguno distinta de la fuerza centrípeta lunar, y dado que ella es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, se sigue que la fuerza de la gravedad disminuye en esa misma proporción.

Vayamos ahora a los otros planetas. Como las revoluciones de os planetas primarios alrededor del Sol y de los secundarios alrededor de Júpiter y Saturno son fenómenos afines a la revolución de la Luna en torno a la Tierra, y como se ha demostrado, además, que las fuerzas centrípetas de los planetas primarios se dirigen hacia el centro del Sol y las de los secundarios hacia los centros de Júpiter y Saturno, del mismo modo que se dirige la fuerza centrípeta de la Luna hacia el centro de la Tierra; y como, además, todas esas fuerzas están en proporción inversa al cuadrado de las distancias a partir de los centros, del mismo modo que la fuerza centrípeta de la Luna es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia con respecto a la Tierra, debemos evidentemente sacar en conclusión que la naturaleza de todo ello es la misma. Por consiguiente, así como la Luna gravita hacia la Tierra y la Tierra hacia la Luna, así también gravitarán todos los planetas secundarios hacia sus primarios, y los primarios a su vez hacia los secundarios, y todos los primarios hacia el Sol, y el Sol nuevamente hacia los primarios.

Por tanto, el Sol gravita hacia todos los planetas, y todos los planetas hacia el Sol. Porque los planetas secundarios, mientras acompañan a los primarios, giran al tiempo con los primarios en torno al Sol. Por tanto, siguiendo la misma argumentación, los planetas de ambos tipos gravitan hacia el Sol y el Sol hacia ellos. Que los planetas secundarios graviten hacia el Sol resulta, además, sobremanera claro por las desigualdades de la Luna, que encontraremos explicadas por una teoría exactísima y revelada con admirable sagacidad en el Libro tercero de esta obra.

Que la fuerza atractiva del Sol es propagada en todas direcciones hasta distancias prodigiosas, y se difunde a todos los rincones del amplio espacio a él circundante, lo muestra de manera evidente el movimiento de los cometas que, viniendo de lugares inmensamente distantes, se le aproximan mucho y casi llegan a tocarlo a veces en su perihelio. La teoría de esos cuerpos era totalmente desconocida para los astrónomos hasta que nuestro

excelente autor la descubrió tan felizmente, demostrando su veracidad con las observaciones más seguras. Por lo cual es hoy manifiesto que los cometas se mueven en secciones cónicas teniendo su foco en el centro del Sol, y que mediante radios trazados hasta el Sol describen áreas proporcionales a los tiempos. Pero por estos fenómenos se hace manifiesto y se demuestra matemáticamente que las fuerzas mediante las cuales son retenidos en sus órbitas los cometas se dirigen hacia el Sol y son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias con respecto a su centro. Los cometas gravitan hacia el Sol, por tanto, con lo cual la fuerza atractiva del Sol no sólo actúa sobre los cuerpos de los planetas, situados a distancias dadas y casi en el mismo plano, sino que alcanza también a los cometas en las partes más diferentes del cielo y a las distancias más diferentes también. Esa es, pues, la naturaleza de los graves: ejercer su fuerza sobre otros graves a todas las distancias. Pero de ello se sigue que todos los planetas y cometas se atraen recíprocamente y gravitan los unos hacia los otros, cosa confirmada también por la perturbación de Júpiter y Saturno, observada por los astrónomos, que brota de las acciones de esos planetas entre sí e igualmente de ese movimiento muy lento de los ápsides antes mencionado, surgido de una causa similar.

Llegados aquí es preciso reconocer que el Sol, la Tierra y todos los cuerpos celestes que acompañan al Sol se atraen recíprocamente los unos a los otros. En consecuencia, hasta las más pequeñas partículas de materia en cada cuerpo han de tener sus distintas fuerzas atractivas en proporción a sus cantidades de materia, como antes se mostró de los cuerpos terrestres. A diferentes distancias esas fuerzas serán también inversamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias, porque está demostrado matemáticamente que los globos que se atraen según esta ley están compuestos por partículas que se atraen siguiendo la misma ley.

Las conclusiones precedentes se apoyan en un axioma admitido por todos los filósofos: efectos de la misma especie, cuyas propiedades conocidas son idénticas, surgen de las mismas causas y tienen también las mismas propiedades desconocidas. Pues si la gravedad es la causa de la caída de una piedra en Europa, *¿quién duda de que será la causa de la misma caída en* América? *Si hay mutua gravitación entre una piedra y la Tierra en* Europa, *¿quién negará que lo mismo sea mutuo en* América? *Si en* Europa *la atracción de la Tierra se propagara a todo tipo de cuerpos y a*

todas las distancias, ¿por qué no podremos decir que se propaga de modo análogo en América? *Cualquier filosofía se apoya sobre esta regla, ya que en caso de ser quitada no podremos afirmar cosa alguna como verdad general. La constitución de cosas particulares es conocida por observaciones y experimentos, pero es imposible extraer de ellos conclusiones generales sobre la naturaleza de las cosas sin hacer uso de esa regla.*

Puesto que todos los cuerpos, terrestres o celestes, son pesados –como demuestra cualquier experimento u observación sobre ellos–, debemos ciertamente admitir que la gravedad se encuentra en todos los cuerpos universalmente. Y de modo semejante no debiéramos suponer cuerpos que no sean extensos, móviles e impenetrables, esto es: graves. La extensión, la movilidad y la impenetrabilidad de los cuerpos sólo se nos hacen conocidas mediante experimentos, y de idéntico modo se nos hace conocida su gravedad. Todos los cuerpos susceptibles de observación son extensos, móviles e impenetrables, deduciendo nosotros de ello que todos los cuerpos –incluyendo aquellos sobre los cuales no existen observaciones– son extensos, móviles e impenetrables. Descubrimos así que son pesados todos los cuerpos observables, deduciendo de ello que también lo son aquellos no observados. Si alguien dijese que los cuerpos de las estrellas fijas no son pesados porque su gravedad no ha sido observada aún, podría decir por la misma razón que no son extensos, móviles e impenetrables, pues esas propiedades de las estrellas fijas no se han observado aún. En resumen, o bien la gravedad ha de tener un lugar entre las cualidades primarias de todos los cuerpos, o bien la extensión, la movilidad y la impenetrabilidad no deben tenerlo. Y si la naturaleza de las cosas no se explica correctamente mediante la gravedad de los cuerpos, tampoco será explicada correctamente por su extensión, movilidad e impenetrabilidad.

Sé que algunos desaprueban esta conclusión, murmurando algo sobre cualidades ocultas. Nos reprochan continuamente que la gravedad es una cualidad oculta, y que las causas ocultas deben abolirse de la filosofía. Pero es fácil responder a eso, pues son causas ocultas aquellas cuya existencia es oculta e imaginada, jamás probada, no aquellas cuya existencia real es demostrada claramente por observaciones. En consecuencia, la gravedad no puede en modo alguno considerarse una causa oculta de los movimientos celestes, porque es obvio partiendo de los fenómenos que un poder semejante tiene existencia real. Quienes recurren a causas ocultas son los que explican esos movimientos mediante

remolinos de una materia completamente ficticia e imperceptible para nuestros sentidos.

Pero ¿acaso debemos considerar la gravedad una causa oculta y expulsarla de la filosofía porque su causa sea oculta y no haya sido aún descubierta? Los que afirman esto deben evitar caer en un absurdo capaz de trastocar los fundamentos de toda filosofía. Porque las causas suelen proceder en una cadena continua, desde las más compuestas hasta las más simples, y cuando llegamos a la más simple es imposible seguir progresando. Por consiguiente, no puede esperarse ni darse ninguna explicación mecánica de la causa más simple, pues si así fuese no sería la más simple. Esas causas más simples ¿acaso los llamaremos ocultas, rechazándolas? En tal caso deberemos rechazar las que dependen inmediatamente de ellas, y las que dependen de estas últimas, hasta que la filosofía quede desierta de todas las causas.

Algunos dicen que la gravedad es preternatural, y la llaman milagro perpetuo. Y como las causas preternaturales no tienen lugar en la física querrían rechazarla. No vale la pena gastar tiempo en responder a esta objeción ridícula que echa por tierra toda filosofía. Pues o bien negarán que la gravedad esté en los cuerpos, cosa insostenible, o bien la considerarán preternatural al no ser producida por las otras propiedades de los cuerpos y, en consecuencia, por causas mecánicas. Pero hay sin duda propiedades primarias de los cuerpos, y por el hecho mismo de ser primarias no dependen de las otras. Dejémosles considerar si todas éstas no son preternaturales de modo análogo y, por tanto, a descartar; entonces veremos qué clase de filosofía construirán.

Algunos se muestran contrarios a esta física celeste porque contradice las opiniones de Descartes *y parece difícil de reconciliar con ellas. Dejemos que disfruten con su propia opinión, pero pidamos que hagan ellos lo mismo, sin negarnos a nosotros la libertad que para sí exigen. Puesto que la filosofía* newtoniana *nos parece verdadera, concédasenos la libertad de abrazarla y retenerla, siguiendo causas probadas por los fenómenos, en vez de causas sólo imaginadas y sin probar todavía. El asunto de la filosofía verdadera es deducir las naturalezas de las cosas de causas realmente existentes y buscar aquellas leyes que el artífice máximo eligió como fundamento para su hermosísimo orden del mundo, en vez de aquellas mediante las cuales podría haber hecho lo mismo si hubiese querido. Es razonable suponer que puede surgir el mismo efecto de varias causas, algo distintas unas de otras, pero la causa verdadera será aquella de la que verdadera y realmente surge, y las*

otras no tienen lugar en la auténtica filosofía. El mismo movimiento de las manecillas del reloj puede ser ocasionado por una pesa o por un muelle encerrado dentro. Pero si cierto reloj fuese movido realmente por un peso, nos reiríamos de quien lo supusiese movido por un muelle y a partir de ese principio, asumido de repente sin más examen, se pusiese a explicar el movimiento de la manecilla. Ciertamente, el camino que debió haber emprendido es mirar efectivamente las partes internas de la máquina, si quería encontrar el verdadero principio del movimiento propuesto. Un juicio análogo debe hacerse de aquellos filósofos que pretenden llenar los cielos con una materia sutilísima, continuamente agitada en remolinos. Pues aun cuando pudieran explicar los fenómenos con la mayor precisión mediante sus hipótesis, no podríamos a pesar de todo decir que han descubierto una filosofía auténtica y las verdaderas causas de los fenómenos celestes, salvo que pudiesen demostrar o bien que esas causas existen realmente o, cuando menos, que no existen otras. Por consiguiente, si se hace obvio que la atracción de todos los cuerpos es una propiedad realmente existente en la naturaleza de las cosas, y si se muestra también cómo pueden resolverse mediante esa propiedad los movimientos de los cuerpos celestes, sería muy impertinente que alguien objetase que esos movimientos deberían ser explicados por remolinos, aunque admitamos que sea posible tal explicación de esos movimientos. Pero además no admitimos cosa semejante, pues los fenómenos no pueden en modo alguno ser explicados mediante remolinos, como prueba nuestro autor abundantemente partiendo de las razones más obvias. Por lo cual habremos de pensar que los hombres tienen un extraño apego por las quimeras, pues despilfarran su tiempo poniendo parches a una invención ridícula, dotándola con nuevos comentarios propios.

Si los cuerpos de los planetas y cometas se ven arrastrados alrededor del Sol en remolinos, los cuerpos así arrastrados y las partes de los remolinos de su entorno inmediato deberán ser arrastrados con la misma velocidad y la misma dirección, y tener la misma densidad y la misma inercia, obedeciendo a la masa de la materia. Pero está probado que los planetas y cometas, cuando se encuentran en las mismas partes de los cielos, son arrastrados con direcciones y velocidades diferentes. Así pues, se sigue necesariamente que las partes del fluido celeste situadas a las mismas distancias del Sol deben girar al mismo tiempo con velocidades diferentes en direcciones diferentes, pues se requiere un tipo de velocidad y dirección para el movimiento de los planetas, y otro

distinto para el de los cometas. Pero como esto no puede ser explicado, habremos de decir que todos los cuerpos celestes no son arrastrados por remolinos, o bien que sus movimientos no derivan de un mismo remolino, sino de varios distintos, que llenan y atraviesan los espacios circundantes al Sol.

Pero si varios remolinos están contenidos en el mismo espacio, suponiéndose que se interpenetran y giran con movimientos diferentes, como esos movimientos deben concordar con los de los cuerpos arrastrados por ellos –que son perfectamente regulares y realizados en secciones cónicas a veces muy excéntricas y en ocasiones casi círculos–, podríamos muy razonablemente preguntar cómo acontece que esos remolinos permanezcan íntegros y no hayan sufrido ningún tipo de perturbación en tantas eras por las acciones de la conflictiva materia. Ciertamente, si esos movimientos ficticios son más compuestos y difíciles de explicar que los verdaderos movimientos de los planetas y cometas, no parece tener sentido admitirlos en filosofía, pues toda causa debe ser más simple que su efecto. Permitiendo que los hombres se consientan sus propias fantasías, supóngase que alguien afirma que los planetas y cometas están rodeados de atmósferas como nuestra Tierra, hipótesis más razonable en principio que la de los remolinos; dejémosle entonces afirmar que estas atmósferas, por su propia naturaleza, se mueven alrededor del Sol y describen secciones cónicas, movimiento mucho más fácil de concebir que el de los remolinos interpenetrándose; supongamos por último que los planetas y los cometas son arrastrados alrededor del Sol por sus atmósferas, y aplaudamos entonces la sagacidad de ese hombre al descubrir las causas de los movimientos celestes. Pero quien rechace esta fábula ha de rechazar la otra, porque dos gotas de agua no son más parejas que esta hipótesis de las atmósferas y la de los remolinos.

Galileo *ha mostrado que, cuando una piedra lanzada se mueve en una parábola, su desviación del camino rectilíneo es ocasionada por la gravedad de la Tierra, esto es, por una cualidad oculta. Pero alguien, más astuto que él, puede llegar a explicar la causa de otra manera. Supondrá la existencia de cierta materia sutil, no discernible por ninguno de nuestros sentidos, que llena los espacios próximos y contiguos a la superficie de la Tierra, y que esta materia es arrastrada en direcciones diferentes y con movimientos diversos y a menudo contrarios, describiendo curvas parabólicas. Veamos entonces con cuánta facilidad puede explicar la desviación de la piedra antes mencionada. La piedra –dice– flota en este sutil fluido, y como sigue su movimiento no puede sino describir la*

misma figura. Pero el fluido se mueve en curvas parabólicas, por lo cual, naturalmente, la piedra ha de moverse en una parábola. ¿No se consideraría extraordinaria la sagacidad de este filósofo, capaz de deducir los fenómenos de la naturaleza a partir de causas mecánicas, materia y movimiento, de un modo clarísimo hasta para la mente más obtusa? O, por el contrario, ¿no nos reiríamos viendo que este nuevo Galileo *se tomaba tanto trabajo matemático para introducir causas ocultas en filosofía, de donde han sido tan felizmente excluidas? Pero me avergüenza demorarme tanto en fruslerías.*

Resumo en unas palabras el conjunto de la materia. El número de los cometas es ingente; sus movimientos son perfectamente regulares y observan las mismas leyes que los planetas. Las órbitas en las que se mueven son secciones cónicas muy excéntricas. Se mueven en todas direcciones hacia todas las partes de los cielos, pasan a través de las regiones planetarias con toda la libertad posible, y su movimiento es a menudo contrario al orden de los signos. Estos fenómenos se han visto confirmados con toda evidencia por observaciones astronómicas, y no pueden explicarse mediante remolinos. Más aún, resultan perfectamente inconciliables con los remolinos de los planetas. No puede haber lugar para los movimientos de los cometas, salvo que los espacios celestes se vean completamente despojados de esa materia ficticia.

Porque si los planetas son arrastrados alrededor del Sol en remolinos, las partes de los remolinos que rodean inmediatamente a cada planeta deben tener la misma densidad que el planeta, como se mostró antes. Por consiguiente, toda materia contigua al perímetro de la órbita terrestre debe tener la misma densidad que la Tierra. Pero el orbe terrestre y el de Saturno deben tener una densidad igual o mayor; pues para hacer permanente la constitución del remolino las partes de menor densidad deben estar cerca del centro y alejadas las de mayor densidad. Dado que los tiempos periódicos de los planetas están en razón de la potencia $\frac{3}{2}$ de su distancia con respecto al Sol, los períodos de las partes de los remolinos deben preservar igualmente la misma proporción. De ello se seguirá que las fuerzas centrífugas de las partes del remolino deben ser inversamente como los cuadrados de sus distancias. Así pues, las partes más alejadas del centro tratan de alejarse de él con menos fuerza, por lo cual –si su densidad es deficiente– deben ceder a la superior fuerza con la cual se esfuerzan por ascender las partes situadas más cerca del centro. Por tanto, las partes más densas ascenderán y las menos densas descenderán, produciéndose

un recíproco cambio de posición hasta que toda la materia fluida del remolino se disponga y ordene en un equilibrio de partes inmóviles. Si dos fluidos de diferente densidad están contenidos en el mismo recipiente, sucederá sin duda que el de mayor densidad se hundirá con respecto al de menor; por un razonamiento semejante se sigue que las partes más densas del remolino, debido a su mayor fuerza centrífuga, ascenderán a las partes más altas. Por consiguiente, toda aquella parte mucho mayor del remolino excéntrica al orbe terráqueo tendrá una densidad y, consecuentemente, una inercia correspondiente a la masa de la materia, que no puede ser inferior a la densidad e inercia de la Tierra. Pero de ello surgiría una poderosa resistencia al paso de los cometas, capaz de alterar mucho, por no decir de detener y absorber enteramente sus movimientos. Pero del movimiento perfectamente regular de los cometas se sigue que no sufren resistencia perceptible en el mínimo grado y, por tanto, que no se topan con materia de ningún tipo dotada de cualquier fuerza de resistencia ni, por consiguiente, de ninguna densidad o inercia. Porque la resistencia de los medios surge o bien de la inercia de la materia del fluido o bien de su falta de lubricidad. La que surge de la falta de lubricidad es muy pequeña, y resulta apenas observable en los fluidos conocidos habitualmente, salvo que sean muy tenaces como el aceite y la miel. La resistencia que encontramos en el aire, en el agua, en el azogue y en fluidos semejantes que no son tenaces es casi toda del primer tipo, y no puede ser reducida por un grado mayor de sutileza si se mantienen la densidad y la inercia a la que es proporcional esta resistencia, como demuestra del modo más evidente nuestro autor en su noble teoría de las resistencias incluida en el Libro segundo.

Al atravesar un fluido, los cuerpos comunican su movimiento poco a poco al ambiente, y mediante esa comunicación pierden su propio movimiento, y al perderlo se ven retrasados. Por consiguiente, el retraso es proporcional al movimiento comunicado, y el movimiento comunicado, estando dada la velocidad del cuerpo en movimiento, es como la densidad del fluido; por consiguiente, el retraso o resistencia será como la misma densidad del fluido; y tampoco podrá suprimirse, salvo que el fluido restaure el movimiento perdido volviendo a rodear las partes posteriores del cuerpo. Pero esto no puede producirse salvo que la impresión del fluido sobre las partes posteriores del cuerpo sea igual a la impresión de las partes anteriores del cuerpo sobre el fluido, esto es, salvo que la velocidad relativa con la cual el fluido empuja al cuerpo por detrás sea igual a la velocidad con la cual el cuerpo empuja al fluido; esto

es, salvo que la velocidad absoluta del fluido recurrente sea el doble de grande que la velocidad absoluta con la cual el fluido es empujado hacia adelante por el cuerpo, lo cual es imposible. Por consiguiente, no puede suprimirse por medio alguno la resistencia de fluidos que surge de su inercia. Por lo cual debemos deducir que el fluido celeste carece de inercia, dado que carece de fuerza de resistencia; que carece de fuerza para comunicar movimiento, porque no tiene inercia; que carece de fuerza para producir cualquier cambio en uno o más cuerpos, porque no tiene fuerza para comunicar ningún movimiento; que no tiene eficacia, pues carece de facultad para producir cambio de ningún tipo. En consecuencia, esta hipótesis puede considerarse en justicia ridícula e impropia de un filósofo, porque carece completamente de fundamento y no sirve de nada para explicar la naturaleza de las cosas. Quienes querrían llenar los cielos con una materia fluida, pero la suponen vacía de inercia, niegan de palabra el vacío, pero lo admiten de hecho. Pues como una materia fluida de este tipo no puede en modo alguno distinguirse del espacio vacío, la disputa se centra ahora en las palabras y no en las naturalezas de las cosas. Si algunos se encariñan tanto con la materia que en modo alguno admiten un espacio vacío de cuerpos, consideremos dónde desembocarán.

Una de dos: o bien dirán que esta constitución de un mundo lleno por todas partes proviene de la voluntad divina, con la finalidad de que las operaciones de la naturaleza puedan ser asistidas en todas partes por un éter sutilísimo que atraviesa y llena todas las cosas, cosa que, sin embargo, no puede afirmarse, pues partiendo de los fenómenos de los cometas hemos mostrado que este éter carece de eficacia; o bien dirán que llegó a ser así por la misma voluntad divina, aunque con alguna finalidad desconocida, cosa que no debería afirmarse, pues con la misma razón podría igualmente suponerse una constitución diferente; o bien, por último, dirán que no fue causada por la voluntad de Dios, sino por alguna necesidad de su naturaleza. En consecuencia, acabarán hundiéndose en el estiércol de ese rebaño inmundo que sueña que todas las cosas son gobernadas por el Hado y no por la Providencia, y que la materia existe siempre y en todas partes por la necesidad de su naturaleza, siendo infinita y eterna. Pero suponiendo esas cosas, debe ser también uniforme en todas partes, dado que la variedad de formas es totalmente incongruente con la necesidad. Debe ser también inmovida, pues si fuese necesariamente movida en alguna dirección determinada, con alguna velocidad

determinada, sería movida por una necesidad similar en una dirección diferente con una velocidad diferente; pero nunca puede moverse en direcciones diferentes con diferentes velocidades, por lo cual debe ser inmovida. Indudablemente este mundo, tan diversificado por la variedad de formas y movimientos que encontramos en él, sólo podía surgir de la voluntad perfectamente libre de dios[1]*, que todo lo dirige y preside.*

De esta fuente han manado todas las leyes que se dicen de la naturaleza, donde en efecto aparecen muchas huellas del más sabio de los planes, aunque ni el más leve rastro de necesidad. Por lo mismo, no debemos buscar esas leyes a partir de conjeturas inciertas, sino aprenderlas de observaciones y experimentos. Quien cree poder encontrar los verdaderos principios de la física y las leyes de las cosas naturales por la sola fuerza de su mente y la luz interna de su razón, debe suponer que el mundo existe por necesidad y por esa misma necesidad obedece las leyes propuestas, o bien –si el orden de la naturaleza fue establecido por la voluntad de dios– que él, un miserable reptil, puede decir qué era óptimo para la creación divina. Toda filosofía sensata y verdadera se basa en los fenómenos de las cosas, y si esos fenómenos nos llevan inevitablemente, contra nuestra voluntad, a principios que manifiestan del modo más obvio el plan óptimo y el dominio supremo del ente sapientísimo y potentísimo, no deben ser puestos de lado porque quizá disgustan a algunos hombres. Esos hombres pueden llamarlos milagros o cualidades ocultas, pero nombres maliciosamente atribuidos no pueden viciar las cosas mismas, salvo que esos hombres acaben diciendo que toda filosofía debe fundarse sobre el ateísmo. La filosofía no debe corromperse como esos hombres querrían, porque el orden de las cosas no se inmutará.

Así pues, jueces probos y equitativos dictarán sentencia en favor de esta razón filosófica excelentísima, que se funda en experimentos y observaciones. Y apenas puede decirse o imaginarse la luz y el esplendor otorgados a semejante método por la obra admirable de nuestro ilustre autor, cuyo genio feliz y sublime, resolviendo los problemas más difíciles y haciendo descubrimientos que antes parecían imposibles para la mente humana, es merecidamente admirado por todos quienes están algo más que superficialmente versados en estas materias. Las puertas están abiertas ahora, dejando expuestos los más hermosos misterios de las cosas. Tan claramente se muestra ante nuestros ojos la elegantísima

[1] Minúscula en el original. (*N. del T.*)

estructura del sistema del mundo, que si el rey Alfonso *viviera aún no se quejaría por falta de las virtudes de sencillez y armonía. Podemos en consecuencia presenciar más de cerca ahora las bellezas de la Naturaleza, gozándonos con la dulcísima contemplación, y ser incitados a venerar y honrar más encarecidamente al gran artífice y señor del universo, cosa que es el fruto ubérrimo de la filosofía. Ha de ser ciego quien, partiendo de las estructuras óptimas y sapientísimas de las cosas, resulta incapaz de ver la infinita sabiduría y bondad de su creador omnipotente, y debe ser demente e insensato quien se niega a reconocerlo.*

La obra eximia de Newton *será la protección más segura contra los ataques de los ateos, pues de ningún carcaj como éste podrán extraerse flechas para hostigar a la catérva de los impíos. Esto fue sentido hace mucho tiempo, y demostrado sorprendentemente por primera vez en discursos ingleses y latinos ilustrados por* Richard Bentley, *que, destacando en todos los géneros literarios y distinguiéndose como benefactor de las buenas artes, es un gran ornamento de este siglo y de nuestra academia, director dignísimo e irreprochabilísimo de nuestro* S. Trinity College. *Debo expresar mi deuda para con él por muchas razones, y tú tampoco –lector benévolo– le negarás la estima debida. Siendo amigo íntimo del celebrado autor durante muchos años (pues no pretendía sólo que el autor fuese respetado por sus sucesores, sino también que estos escritos infrecuentes gozaran de relieve entre los instruidos del mundo), cuidó tanto la reputación de su amigo como el progreso de las ciencias. Dado que las copias de la primera edición eran muy escasas y alcanzaban altos precios, persuadió con frecuentes ruegos y casi con reprensiones al hombre excelente, distinguido al mismo tiempo por su modestia y su erudición, para que le permitiese esta nueva edición, perfeccionada en todo el texto y enriquecida por nuevas partes, a expensas suyas y bajo su supervisión. A mí me asignó, estando en su derecho, la tarea no ingrata de cuidar como mejor pudiese de las correcciones.*

ROGER COTES
Miembro del Trinity College.
Plumian professor
de astronomía y filosofía experimental.

Cambridge, 12 de mayo de 1713.

PREFACIO DE NEWTON A LA TERCERA EDICION

En esta tercera edición, preparada con mucho cuidado por Henry Pemberton, *doctor en medicina y hombre peritísimo en estas materias, se explican más ampliamente algunas cosas del Libro Segundo sobre las resistencias de los medios, y se añaden nuevos experimentos sobre la resistencia de graves que caen en el aire. En el Libro Tercero se expone más plenamente la argumentación para probar que la Luna es retenida en su órbita por la gravedad; y se añaden allí nuevas observaciones hechas por el señor* Pound *sobre la proporción de los diámetros de Júpiter unos con otros. Se añaden también algunas observaciones sobre el cometa que apareció en* 1680, *hechas por el señor* Kirk *en Alemania durante el mes de noviembre y sólo llegadas a mis manos recientemente. Con su ayuda resulta manifiesto cómo responden a órbitas casi parabólicas los movimientos de los cometas. La órbita de ese cometa es determinada algo más exactamente que antes, según cálculos de* Halley, *en una elipse. Y se muestra que, en esta órbita elíptica, el cometa siguió su curso a través de los nueve signos de los cielos, con tanta precisión como los planetas se mueven en las órbitas elípticas definidas por la astronomía. También se añade la órbita del cometa aparecido en* 1723, *calculada por el señor* Bradley, *profesor de astronomía en* Oxford.

IS. NEWTON

Londres, 12 de enero de 1725.

DEFINICIONES

DEFINICIÓN PRIMERA

La cantidad de materia es la medida de la misma, surgida de su densidad y magnitud conjuntamente.

El aire de densidad doble, en un espacio doble igualmente, es cuádruple en cantidad, y séxtuple en un espacio triple. Lo mismo debe entenderse de la nieve y del polvo condensados por compresión o licuefacción, y de todos los cuerpos que por cualesquiera causas se condensan diversamente. No me ocupo aquí para nada de un medio –si existiera cosa tal– que llene libremente los intersticios de las partes. Es esa cantidad la que en lo sucesivo menciono bajo el nombre de masa o cuerpo. Lo mismo se da a conocer mediante el peso de cada cuerpo: pues la masa es proporcional al peso, como he descubierto por experimentos muy precisos con péndulos, cuya exposición se hará más adelante.

DEFINICIÓN II

La cantidad de movimiento es la medida del mismo, surgida de la velocidad y la cantidad de materia conjuntamente.

El movimiento del todo es la suma del movimiento en las partes singulares; en un cuerpo con cantidad doble e igual

velocidad el movimiento es doble, y cuádruple con velocidad doble.

DEFINICIÓN III

La fuerza insita de la materia es un poder de resistencia de todos los cuerpos, en cuya virtud perseveran cuanto está en ellos por mantenerse en su estado actual, ya sea de reposo o de movimiento uniforme en línea recta.

Esta fuerza es siempre proporcional a su cuerpo, y sólo difiere de la inactividad de la masa por el modo de concebirla. Debido a la inercia de la materia, un cuerpo no abandona sin dificultad su estado de reposo o movimiento. Por lo cual esa *vis insita* puede llamarse muy significativamente *vis inertiae*, fuerza de inactividad. Pero un cuerpo sólo ejerce esa fuerza cuando otra fuerza impresa en él trata de alterar su estado, y el ejercicio de esa fuerza puede considerarse como resistencia y como ímpetu. Es resistencia en tanto en cuanto el cuerpo se opone a la fuerza impresa para mantener su estado actual. Es ímpetu en tanto en cuanto el cuerpo, sin ceder fácilmente a la fuerza impresa de otro, se esfuerza por cambiar el estado de ese otro. La resistencia suele atribuirse a los cuerpos en reposo, y el ímpetu a los que están en movimiento, pero el movimiento y el reposo –tal como se conciben por lo general– sólo se distinguen de modo relativo, y no siempre se encuentran en auténtico reposo los cuerpos que suelen considerarse así.

DEFINICIÓN IV

La fuerza impresa es una acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado, bien sea de reposo o de movimiento uniforme en línea recta.

Esta fuerza consiste sólo en la acción, y no permanece en el cuerpo cuando la acción concluye. Porque un cuerpo persevera en cualquier estado nuevo que alcance, en virtud de su sola inercia. Pero las fuerzas impresas tienen orígenes diversos, como la percusión, la presión o la fuerza centrípeta.

DEFINICIÓN V

Fuerza centrípeta es aquella por la cual los cuerpos son arrastrados o impelidos, o tienden de cualquier modo hacia un punto como hacia un centro.

De este tipo es la gravedad, por cuya mediación los cuerpos tienden hacia el centro de la Tierra, como también la fuerza magnética que atrae el hierro al imán, y esa fuerza –sea la que fuere– en cuya virtud los planetas son continuamente apartados de los movimientos rectilíneos que de otra manera seguirían, y obligados a girar en órbitas curvas. Una piedra que da vueltas en una honda se esfuerza por alejarse de la mano que la hace girar, y por ese esfuerzo distiende la honda tanto más cuanto que con mayor velocidad gira, y sale volando tan pronto como es liberada. Llamo fuerza centrípeta a aquella que se opone a ese esfuerzo, y mediante la cual la honda atrae continuamente la piedra hacia la mano y la retiene en su órbita, porque se dirige hacia la mano como hacia el centro de la órbita. Y lo mismo debe entenderse de todos los cuerpos que giran en órbitas. Todos intentan alejarse de los centros de sus órbitas, y de no ser por la oposición de una fuerza contraria que se lo impide, manteniéndolos en sus órbitas, y que por eso llamo centrípeta, partirían en líneas rectas con un movimiento uniforme. Si no fuese por la gravedad, un proyectil no se desviaría hacia la Tierra, sino que continuaría en línea recta con un movimiento uniforme si se suprimiera la resistencia del aire. Es su gravedad quien le aparta continuamente de un curso rectilíneo, haciendo que se desvíe más o menos hacia la Tierra, de acuerdo con su gravedad y la velocidad de su movimiento. Cuanto menor sea su gravedad, o la cantidad de su materia, y cuanto mayor sea la velocidad con la cual fue proyectado, menos se desviará de su curso rectilíneo, y más lejos llegará. Si una esfera de plomo, proyectada desde la cumbre de una montaña por la fuerza de la pólvora, con una velocidad dada y una dirección paralela al horizonte, es arrastrada en una línea curva hasta una distancia de dos millas antes de caer al suelo, en caso de ser proyectada con una velocidad doble o diez veces superior volaría dos o diez veces más si se suprimiera la resistencia del aire. E incrementando la velocidad podemos aumentar a discreción la distancia hasta la cual podría proyectarse, y disminuir la curvatura de la línea que describiría, hasta que al fin caería a la distancia de 10,

30 ó 90 grados, o incluso circundaría toda la Tierra antes de caer o, más aún, lograría no caer jamás, encaminándose hacia los espacios celestes, continuando su movimiento indefinidamente. Y tal como un proyectil, por la fuerza de gravedad, puede hacerse girar en una órbita y circundar toda la Tierra, así también la Luna –bien por la fuerza de gravedad, si está dotada de gravedad, o por cualquier otra fuerza que la empuje hacia la Tierra– puede ser desviada continuamente del curso rectilíneo que seguiría por su fuerza ínsita y obligada a girar en su órbita actual, y sin esa fuerza la Luna no podría ser mantenida en su órbita. Si tal fuerza fuese demasiado pequeña, no bastaría para apartar a la Luna de un curso rectilíneo; si fuese demasiado grande sacaría a la Luna de su órbita, haciéndola caer sobre la Tierra. Es necesario que la fuerza tenga la magnitud justa, y pertenece a los matemáticos descubrir la fuerza capaz de servir exactamente para retener a un cuerpo en una órbita dada a una velocidad dada; y, a la inversa, descubrir la curva que por efecto de una fuerza dada describirá un cuerpo proyectado desde un lugar dado con una velocidad dada también.

La cantidad de cualquier fuerza centrípeta es de tres géneros: absoluta, acelerativa y motriz.

DEFINICIÓN VI

La cantidad absoluta de una fuerza centrípeta es una medida proporcional a la eficacia de la causa que la propaga desde el centro por las regiones circundantes.

Es así como la fuerza magnética resulta mayor o menor en un imán, según su tamaño e intensidad.

DEFINICIÓN VII

La cantidad acelerativa de una fuerza centrípeta es una medida proporcional a la velocidad que genera en un tiempo dado.

Es así como la fuerza del mismo imán resulta mayor a menor distancia y a la inversa; también la fuerza gravitatoria es mayor

ı valles y menor en las cimas de altísimas montañas, y menor ın (como más adelante se mostrará) a mayores distancias del obo terráqueo. Pero a iguales distancias es idéntica en todas artes, porque acelera igualmente la caída de todos los cuerpos ıesados y ligeros, grandes y pequeños), prescindiendo de la :sistencia del aire o descontándola.

DEFINICIÓN VIII

.a cantidad motriz de una fuerza centrípeta es una medida proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado.

Es así como el peso resulta mayor en un cuerpo mayor y ıenor en uno menor; y que, en el mismo cuerpo, sea mayor erca de la Tierra y menor en los cielos. Esta cantidad es la entripetencia o propensión de todo el cuerpo hacia el centro o como se dice– su peso; y es siempre conocida por la cantidad le una fuerza contraria e igual justamente suficiente para evitar l descenso del cuerpo.

Estas cantidades, en aras de la brevedad, pueden llamarse uerzas motrices, acelarativas y absolutas, y –en aras de la laridad– deben considerarse con respecto a los cuerpos que ienden hacia el centro, a los lugares de esos cuerpos y al centro le fuerza hacia el cual tienden; quiero decir que refiero la fuerza notriz al cuerpo como un esfuerzo y propensión del conjunto ıacia un centro, surgido de las propensiones de las diversas ıartes en su conjunto; la fuerza acelerativa al lugar del cuerpo, :omo cierto poder difundido desde el centro a todos los lugares :ircundantes para mover a los cuerpos que están en ellos; y la uerza absoluta al centro, como dotado de alguna causa sin la :ual las fuerzas motrices no se propagarían a través de los :spacios circundantes. Que esa causa sea algún cuerpo central (como el imán en el centro de la fuerza magnética o la Tierra en el centro de la fuerza gravitatoria) o alguna otra cosa cualquiera no es una cuestión sobre la que me pronuncie todavía. Pues aquí sólo pretendo dar una noción matemática de estas fuerzas, sin especular sobre sus causas y sedes físicas.

Por lo cual la fuerza acelerativa será a la motriz lo que la celeridad es al movimiento. Porque la cantidad de movimiento surge de la celeridad multiplicada por la cantidad de materia, y

la fuerza motriz surge de la acelerativa multiplicada por la misma cantidad de materia, pues la suma de las acciones de la fuerza acelerativa sobre las diversas partículas del cuerpo es la fuerza motriz del todo. Sucede por eso que cerca de la superficie de la Tierra, donde es idéntica en todos los cuerpos la gravedad acelerativa o fuerza gravitatoria, la gravedad motriz o peso es como el cuerpo; pero si ascendiéramos a regiones más altas, donde la gravedad acelerativa es menor, el peso disminuirá igualmente y seguirá siendo siempre como el producto del cuerpo por la gravedad acelerativa. Así pues, en las regiones donde la gravedad acelerativa se reduce a la mitad, el peso de un cuerpo dos o tres veces menor será cuatro o seis veces menor.

Llamo en el mismo sentido acelerativas y motrices a las atracciones e impulsos; y utilizo las palabras atracción, impulso o propensión de cualquier tipo hacia un centro de modo indiferente e intercambiable, pues considero esas fuerzas no física, sino matemáticamente. El lector no debe imaginar que mediante esas palabras pretendo definir la especie o modo de las acciones, ni sus causas o razones físicas, ni que atribuyo fuerzas en un sentido físico y auténtico a centros (que son sólo puntos matemáticos) cuando aludo a centros dotados de capacidad atractiva.

ESCOLIO

Hasta aquí he expuesto las definiciones de las palabras menos conocidas, explicando el sentido en el que deberían entenderse para lo sucesivo. Tiempo, espacio, lugar y movimiento son palabras conocidísimas para todos. Es de observar, con todo, que el vulgo sólo concibe esas cantidades partiendo de la relación que guardan con las cosas sensibles. Y de ello surgen ciertos prejuicios, para cuya remoción será conveniente distinguir allí entre lo absoluto y lo relativo, lo verdadero y lo aparente, lo matemático y lo vulgar.

I. El tiempo absoluto, verdadero y matemático, en sí y por su propia naturaleza sin relación a nada externo fluye uniformemente, y se dice con otro nombre duración. El tiempo relativo, aparente y vulgar es alguna medida sensible y exterior (precisa o desigual) de la duración mediante el movimiento, usada por el

vulgo en lugar del verdadero tiempo; hora, día, mes y año son medidas semejantes.

II. El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil. El espacio relativo es alguna dimensión o medida móvil del anterior, que nuestros sentidos determinan por su posición con respecto a los cuerpos, y que el vulgo confunde con el espacio inmóvil; de esa índole es la dimensión de un espacio subterráneo, aéreo o celeste, determinada por su posición con respecto a la Tierra. El espacio absoluto y el relativo son idénticos en aspecto y magnitud, pero no siempre permanecen numéricamente idénticos; por ejemplo, si la Tierra mueve un espacio de nuestro aire, que relativamente y con respecto a la Tierra permanece siempre idéntico, el aire pasará en cierto momento por una parte del espacio absoluto y en otro momento por otra, con lo cual cambiará continuamente en términos absolutos.

III. El lugar es la parte del espacio que un cuerpo ocupa, siendo relativo o absoluto en razón del espacio. Digo la parte del espacio, no la situación ni la superficie externa del cuerpo, porque los lugares de sólidos iguales son siempre iguales, pero sus superficies son a menudo desiguales por razón de sus distintos perfiles. Las posiciones no tienen propiamente cantidad, y no son tanto los lugares mismos como las propiedades de los lugares. El movimiento del todo es idéntico a la suma de los movimientos de las partes; en otras palabras, la traslación del todo a otro lugar es idéntica a la suma de las traslaciones de las partes a otro lugar, por lo cual el lugar del todo es idéntico a la suma de los lugares de las partes, y ésa es la razón de que sea interno y esté en todo el cuerpo.

IV. El movimiento absoluto es la traslación de un cuerpo desde un lugar absoluto a otro, y el movimiento relativo la traslación de un lugar relativo a otro. En un barco a toda vela el lugar relativo de un cuerpo es aquella parte del barco que el cuerpo posee, o aquella parte de la cavidad llenada por el cuerpo y que por eso mismo se mueve junto con el barco. El reposo relativo es la continuidad del cuerpo en el mismo lugar del barco o de su cavidad. Pero el reposo real, absoluto, es la continuidad del cuerpo en la misma parte de ese espacio inmóvil donde se mueve el barco mismo, su cavidad y todo cuanto contiene. Por lo cual, si la Tierra está realmente en reposo, el cuerpo que reposa relativamente en el barco se moverá real y absolutamente con la misma velocidad que el barco tiene sobre la Tierra. Pero

si la Tierra se mueve también, el movimiento verdadero y absoluto del cuerpo surgirá en parte del verdadero movimiento de la Tierra en el espacio inmóvil, y en parte del movimiento relativo del barco sobre la Tierra; y si el cuerpo se mueve también relativamente en el barco, su verdadero movimiento surgirá en parte del verdadero movimiento de la Tierra en el espacio inmóvil, y en parte de los movimientos relativos tanto del barco sobre la Tierra como del cuerpo sobre el barco; y de esos movimientos relativos surgirá el movimiento relativo del cuerpo sobre la Tierra. Si la parte de la Tierra donde se encuentra el barco fuese movida verdaderamente hacia el Este con una velocidad de 10010 partes, mientras el barco mismo, con las velas desplegadas a un vendaval, es arrastrado hacia el Oeste con una velocidad expresada por 10 de esas partes, pero un marinero camina en el barco hacia el Este con 1 parte de la velocidad mencionada, este hombre será movido verdaderamente en el espacio inmovido hacia el Este a una velocidad de 10001 partes, y relativamente sobre la Tierra hacia el Oeste con una velocidad de 9 partes.

En astronomía el tiempo absoluto se distingue del relativo por la ecuación, es decir, la corrección del tiempo aparente. Porque los días naturales son desiguales, por más que sean considerados iguales y usados como medida del tiempo. Los astrónomos corrigen esa desigualdad para poder medir los movimientos celestes con un tiempo más veraz. Es posible que no exista un movimiento uniforme con el cual medir exactamente el tiempo. Todos los movimientos pueden ser acelerados o retardados, pero el flujo del tiempo absoluto no puede ser alterado. La duración o perseverancia de las cosas existentes permanece incambiada, siendo los movimientos rápidos, lentos o nulos, y por eso debe distinguirse esta duración de lo que son sólo medidas sensibles suyas, a partir de las cuales es deducida mediante la ecuación astronómica. La necesidad de esta ecuación para determinar los tiempos de un fenómeno se hace evidente tanto a partir de los experimentos del reloj de péndulo como a partir de los eclipses de los satélites de Júpiter.

Tal como es inmutable el orden de las partes del tiempo, así sucede con el orden de las partes del espacio. Si esas partes fuesen movidas a salir de sus lugares, serían movidas (si vale la expresión) a salir de sí mismas. Porque los tiempos y los espacios son sus propios lugares y también los de todas las otras cosas. Todas las cosas están situadas en el tiempo según el orden

de sucesión y en el espacio según el orden de situación. Pertenece a su esencia el hecho de ser lugares, y es absurdo que los lugares primarios sean móviles. Estos son, pues, los lugares absolutos; y sólo son movimientos absolutos las traslaciones de unos a otros.

Pero como las partes del espacio no pueden verse o distinguirse unas de otras mediante nuestros sentidos, les aplicamos medidas sensibles. Pues por las posiciones y distancias de las cosas respecto de cualquier cuerpo que se considere inmovido definimos todos los lugares; y luego calculamos todos los movimientos, usando como referencia esos lugares y considerando a los cuerpos transferidos de unos a otros. Por lo cual usamos lugares y movimientos relativos en vez de absolutos, sin inconveniente alguno en los asuntos comunes, aunque en disquisiciones filosóficas debamos hacer abstracción de nuestros sentidos y considerar las cosas mismas, distinguiéndolas de sus medidas sensibles. Porque puede suceder que no haya cuerpo realmente en reposo, al cual referir los lugares y movimientos.

Pero podemos distinguir el reposo y el movimiento –tanto relativos como absolutos– por sus propiedades, causas y efectos. Es una propiedad del reposo el hecho de que los cuerpos realmente en reposo reposan los unos respecto de los otros. Y por eso es posible que en las regiones de las estrellas fijas, o aún más lejos, pueda existir algo que esté en absoluto reposo; pero, siendo imposible saber por la posición de los cuerpos unos respecto de otros en nuestras regiones si alguno mantiene la misma posición con respecto a ese cuerpo remoto, se sigue que el reposo absoluto no puede determinarse partiendo de la posición de los cuerpos en nuestras regiones.

Es una propiedad del movimiento que las partes que retienen posiciones dadas con respecto a sus totalidades compartan los movimientos de esas totalidades. Pues todas las partes de los cuerpos que giran sobre sí mismos se esfuerzan por alejarse del eje de movimiento, y el ímpetu de los cuerpos que se mueven hacia adelante surge del ímpetu combinado de todas las partes. Así pues, si los cuerpos circundantes son movidos, los que se encuentran relativamente en reposo dentro de ellos compartirán su movimiento. Por lo cual el movimiento verdadero y absoluto de un cuerpo no puede ser determinado por su traslación con respecto a aquellos que sólo parecen reposar, pues los cuerpos externos no sólo deberían parecer en reposo, sino estarlo realmente. En otro caso todos los cuerpos interiores no sólo

participarán de la traslación con respecto a los inmediatamente circundantes, sino del verdadero movimiento de éstos, y aunque esa traslación no tuviese lugar no estarían realmente en reposo, sino que sólo parecerían estarlo. Porque los cuerpos circundantes permanecen respecto de los circundados en la misma relación que la parte exterior de un conjunto guarda hacia la interior o la cáscara al núcleo. Ahora bien, si la cáscara se mueve el núcleo se moverá también, por ser parte de la totalidad, sin traslación alguna con respecto a la cáscara.

Una propiedad afín a la precedente es que si un lugar se mueve, todo lo allí situado se mueve con él; por consiguiente, un cuerpo que se mueve desde un lugar en movimiento participa también del movimiento de su lugar. Por lo cual todos los movimientos provenientes de lugares en movimiento no son sino partes de movimientos íntegros y absolutos, y cada movimiento íntegro está compuesto por el movimiento del cuerpo desde su primer lugar y el movimiento de ese lugar con respecto a su lugar, y así sucesivamente, hasta llegar a algún lugar inmovido, como en el ejemplo antes mencionado del marino. En esa medida los movimientos íntegros y absolutos sólo pueden determinarse mediante lugares inmovidos, y por tal razón referí antes esos movimientos absolutos a lugares inmovidos, refiriendo los relativos a lugares móviles. Ahora bien, sólo son inmovidos los lugares que retienen eternamente la misma posición dada unos respecto de otros, por lo cual deben permanecer para siempre inmovidos, constituyendo lo que llamo espacio inmóvil.

Las causas mediante las cuales se distinguen los movimientos relativos de los verdaderos son las fuerzas impresas en los cuerpos para generar el movimiento. El movimiento verdadero no es generado ni alterado sino por alguna fuerza impresa en el mismo cuerpo movido, pero el movimiento relativo puede ser generado o alterado sin fuerza alguna impresa en el cuerpo. Basta imprimir alguna fuerza en otros cuerpos con los cuales se compara para que, cediendo ellos, pueda cambiarse la relación en que consistía el movimiento o reposo de ese otro cuerpo. Por su parte, el movimiento verdadero padece siempre algún cambio debido a cualquier fuerza impresa en el cuerpo que se mueve, pero el movimiento relativo no sufre necesariamente ningún cambio debido a tales fuerzas. Porque si se imprimen las mismas fuerzas en aquellos otros cuerpos con los cuales se hace la comparación, de manera que pueda preservarse la posición relativa, se preservará la relación que determina el movimiento

relativo. Por consiguiente, cualquier movimiento relativo puede ser alterado cuando permanece inalterado el movimiento verdadero, y el relativo puede ser preservado cuando el verdadero sufre alguna alteración. De ahí que el verdadero movimiento no consista para nada en tales relaciones.

Los efectos que distinguen el movimiento absoluto del relativo son las fuerzas de alejamiento del eje del movimiento circular. No existen tales fuerzas en un movimiento circular puramente relativo, pero en un movimiento circular verdadero y absoluto son mayores o menores según la cantidad de movimiento. Si un cubo que cuelga de una cuerda larga es hecho girar hasta el punto de retorcer fuertemente la cuerda, luego llenado de agua y mantenido en reposo junto con el agua, inmediatamente –por la acción súbita de otra fuerza– comenzará a girar en dirección opuesta, y mientras la cuerda se desenrosca el cubo mantendrá durante algún tiempo ese movimiento. La superficie del agua será lisa al principio, como antes de que el cubo empezara a moverse, pero a medida que el cubo empiece gradualmente a comunicar al agua su movimiento, ésta comenzará a girar visiblemente, a alejarse poco a poco del centro y a ascender por las paredes del cubo formando una figura cóncava (como he observado yo mismo), y cuanto más rápido se haga el movimiento más subirá el agua hasta que al final, realizando sus revoluciones en sincronía con el cubo, pasará a estar en reposo relativo con respecto de él. Este ascenso del agua muestra su esfuerzo por alejarse del eje de su movimiento, y el movimiento circular verdadero y absoluto del agua, que aquí es de dirección contraria al relativo, se hace conocido y puede ser medido mediante ese esfuerzo. Al principio, cuando era máximo el movimiento relativo del agua en el cubo, no producía esfuerzo por alejarse del eje; el agua no mostraba tendencia hacia la circunferencia, ni ascenso alguno por las paredes del cubo, sino que permanecía lisa y, en consecuencia, no se había iniciado aún su verdadero movimiento circular. Pero después, una vez decrecido el movimiento relativo del agua, su ascensión por las paredes del cubo probó su esfuerzo por alejarse del eje; y este esfuerzo mostraba el verdadero movimiento circular del agua, en incesante crecimiento hasta haber adquirido su máximo cuando reposaba relativamente en el cubo. Por consiguiente, este esfuerzo no depende de ninguna traslación del agua con respecto a los cuerpos circundantes, ni puede definirse mediante esa traslación el verdadero movimiento

circular. Sólo hay un verdadero movimiento circular de cualquier cuerpo que gire sobre sí mismo, que corresponde a un único esfuerzo o conato por alejarse de su eje de movimiento como su propio y adecuado efecto; pero los movimientos relativos de un mismo cuerpo son innumerables, de acuerdo con las diversas relaciones que guarde con cuerpos externos, y esas relaciones carecen de efecto real alguno salvo que participen de ese único y verdadero movimiento circular. Así pues, en el sistema de aquellos que suponen que nuestros cielos giran bajo la esfera de las estrellas fijas y arrastran consigo a los planetas, las partes singulares de esos cielos y los planetas que reposan, relativamente por supuesto, en sus cielos próximos, no dejan de estar en un movimiento verdadero. Pues cambian de posiciones los unos respecto de los otros (cosa que nunca acontece con cuerpos realmente en reposo), y siendo arrastrados junto con sus cielos comparten sus movimientos, esforzándose por alejarse del eje de sus movimientos como partes de totalidades en revolución.

Por consiguiente, las cantidades relativas no son las cantidades mismas, cuyos nombres llevan, sino medidas sensibles de ellas (precisas o imprecisas) que se usan habitualmente en su lugar. Y si el sentido de las palabras debe ser determinado por su uso, por los nombres tiempo, espacio, lugar y movimiento debe entenderse propiamente sus medidas sensibles; y la expresión será infrecuente y puramente matemática si se significan las cantidades medidas en sí mismas. En consecuencia, violentan el lenguaje quienes toman esas palabras por las cantidades medidas en sí mismas, y así deberían precisarlo claramente. Y no contaminan menos la matemática y la filosofía quienes confunden las verdaderas cantidades con sus relaciones y medidas sensibles.

Es realmente dificilísimo descubrir y distinguir de modo efectivo los movimientos verdaderos y los aparentes de cuerpos singulares, porque las partes del espacio inmóvil donde se realizan esos movimientos no son observables por los sentidos. Con todo, esta pretensión no es enteramente desesperada; tenemos algunos indicios a seguir, en parte de los movimientos aparentes, que son las diferencias de los movimientos verdaderos, y en parte de las fuerzas, que son las causas y los efectos de los movimientos verdaderos. Por ejemplo, si dos globos mantenidos a una distancia dada mediante un hilo que los conecta fuesen hechos girar alrededor de su centro común de gravedad,

odríamos descubrir –mediante la tensión del hilo– el esfuerzo
e los globos por alejarse de su eje de movimiento, y a partir de
lo calcular la cantidad de sus movimientos circulares. Y si
ıerzas iguales cualesquiera se imprimieran simultáneamente
›bre las caras alternas de los globos para aumentar o disminuir
ıs movimientos circulares, por el incremento o reducción en la
ensión del hilo podríamos inferir el incremento o reducción de
ıs movimientos; y asimismo se descubriría sobre qué caras
ebieran imprimirse esas fuerzas para poder aumentar al máxi-
ıo los movimientos de los globos; esto es, podríamos descubrir
ıs caras posteriores o las caras que siguen a las otras en el
ıovimiento circular. Pero si conocemos las caras que van detrás
, en consecuencia, las opuestas que las preceden, deberíamos
or lo mismo conocer la determinación de sus movimientos. De
se modo podríamos descubrir tanto la cantidad como la deter-
ıinación de ese movimiento circular, incluso en una inmensidad
acía donde no hubiese nada externo o sensible con lo cual
omparar a los globos. Pero si en ese espacio estuviesen situados
uerpos remotos que mantuviesen siempre una posición dada
ntre sí, como sucede con las estrellas fijas en nuestras regiones,
ıo podríamos determinar por la traslación relativa de los globos
ntre esos cuerpos si el movimiento pertenecía a los globos o a
os cuerpos. Pero si observásemos el hilo, y si descubriésemos
ıue su tensión era exactamente la requerida por los movimien-
os de los globos, podríamos inferir que el movimiento está en
os globos, y que los cuerpos están en reposo; y luego, por
ıltimo, por la traslación de los globos entre los cuerpos
lescubriríamos la determinación de sus movimientos. Pero
ómo habremos de deducir los verdaderos movimientos a partir
le sus causas, efectos y diferencias aparentes, y la inversa, será
xplicado más extensamente en lo que sigue. Con ese fin
ompuse el presente trabajo.

AXIOMAS
O LEYES DEL MOVIMIENTO

LEY PRIMERA

Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas.

Los proyectiles perseveran en sus movimientos mientras no sean retardados por la resistencia del aire o impelidos hacia abajo por la fuerza de gravedad. Una peonza, cuyas partes se ven continuamente apartadas de movimientos rectilíneos por su cohesión, no cesaría de girar si no fuese retrasada por el aire. Los cuerpos mayores de los planetas y cometas, que encuentran menos resistencia en los espacios libres, preservan durante mucho más tiempo sus movimientos progresivos y circulares.

LEY II

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza.

Si una fuerza cualquiera genera un movimiento, una fuerza doble generará el doble de movimiento, una triple el triple, tanto si la fuerza es impresa entera y a la vez como si lo es gradual y sucesivamente. Y cuando el cuerpo se movía antes, este movi-

miento (dirigido siempre siguiendo a la fuerza generadora) se añade, se resta o se une oblicuamente al movimiento anterior, según coadyuve, se oponga o se vincule oblicuamente a él, componiendo así un nuevo movimiento formado por la determinación de ambos.

LEY III

Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes contrarias.

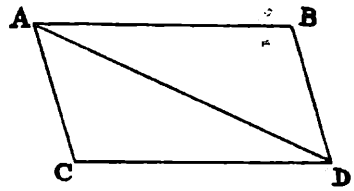
Cualquier cosa que arrastre o comprima a otra es igualmente arrastrada o comprimida por esa otra. Si se aprieta una piedra con el dedo, el dedo es apretado también por la piedra. Si un caballo arrastra una piedra atada a una cuerda, el caballo (por así decirlo) será también arrastrado hacia atrás: la cuerda distendida, debido al esfuerzo mismo por relajarse, arrastrará al caballo hacia la piedra tanto como a la piedra hacia el caballo, estorbando el progreso de uno tanto como promueve el progreso del otro. Si un cuerpo tropieza con otro y, debido a su fuerza, cambia el movimiento de éste, él también (debido a la igualdad de la presión mutua) sufrirá un cambio igual en su propio movimiento hacia la parte contraria. Los cambios producidos por esas acciones no son iguales en las velocidades, pero sí en los movimientos de los cuerpos, siempre que no se vean estorbados por ningún otro impedimento. Pues como los movimientos han cambiado igualmente, los cambios de las velocidades hechos hacia partes contrarias son inversamente proporcionales a los cuerpos. Esta ley tiene lugar también en las atracciones, como será probado en el próximo Escolio.

COROLARIO PRIMERO

Un cuerpo afectado simultáneamente por dos fuerzas describirá la diagonal de un paralelogramo en el mismo tiempo en que describiría los lados de ser afectado separadamente por esas fuerzas.

Si, en un momento dado, por la fuerza M impresa separadamente en el lugar A, un cuerpo fuese llevado con un movimiento

niforme desde A a B, y por la fuerza N impresa separadamente n el mismo lugar fuese llevado de A a C, completemos el aralelogramo ABCD y –con ambas fuerzas actuando a la vez– erá llevado en el mismo tiempo or la diagonal desde A a D. Dado que la fuerza N actúa en la lirección de la línea AC, paralela BD, esta fuerza (por la Ley II) o alterará para nada la velocidad generada por la otra fuerza M, mediante la cual el cuerpo es levado hacia la línea BD. En consecuencia, el cuerpo llegará a la inea BD en el mismo tiempo, esté impresa o no la fuerza N, y al erminar ese tiempo se encontrará en algún punto de la línea BD. Por el mismo argumento, al final del mismo tiempo se ncontrará en algún punto de la línea CD. En consecuencia, e encontrará en el punto D, donde ambas líneas se encuentran. Pero se moverá en línea recta desde A a D, por la Ley I.



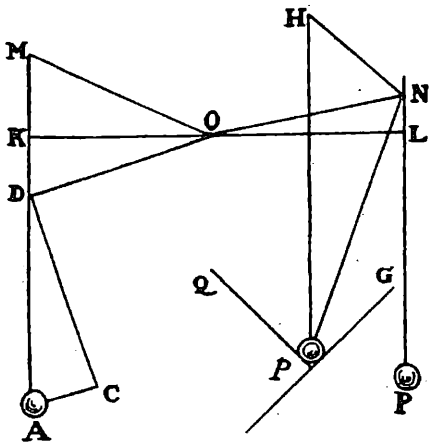
COROLARIO II

Y así es explicada la composición de cualquier fuerza directa AD, *partiendo de cualesquiera fuerzas oblicuas* AC *y* CD, *y a la inversa, la descomposición de cualquier fuerza directa* AD *en dos fuerzas oblicuas* AC *y* CD. *Tales composiciones y descomposiciones son abundantemente confirmadas por la mecánica.*

Como si los radios desiguales OM y ON trazados desde el centro O de cualquier rueda debieran sostener los pesos A y P mediante las cuerdas MA y NP, y se pidiesen las fuerzas de esos pesos requeridas para mover la rueda. Trácese por el centro O la recta KOL, que encuentra perpendicularmente a las cuerdas en K y L; y desde el centro O, siendo OL la mayor de las distancias OK y OL, describir un círculo con OL que encuentra la cuerda MA en D; y trazando OD hacer AC paralela y DC perpendicular a ella.

Siendo indiferente si los puntos K, L y D de las cuerdas están o no fijados al plano de la rueda, los pesos tendrán el mismo efecto tanto si están suspendidos desde los puntos K y L o desde

D y L. Hagamos que toda la fuerza del peso A sea representada por la línea AD, y hagamos que se descomponga en las fuerzas AC y CD, de las cuales la fuerza AC, tirando del radio OD directamente desde el centro, no tendrá efecto alguno a la hora de mover la rueda; pero la otra fuerza DC, tirando perpendicularmente del radio DO, tendrá el mismo efecto que si tirara perpendicularmente al radio OL igual a OD, esto es, tendrá el mismo efecto que el peso P, si ese peso es al peso A como la fuerza DC es a la fuerza DA,



pero como los triángulos ADC y DOK son semejantes,

$$\frac{DC}{DA} = \frac{OK}{OD} = \frac{OK}{OL}$$

Por consiguiente,

$$\frac{P}{A} = \frac{\text{radio OK}}{\text{radio OL}}$$

Como estos radios están en la misma línea recta serán equipolentes y permanecerán por eso mismo en equilibrio, que es la conocidísima propiedad de la balanza, la palanca y la rueda. Si cualquiera de los pesos es mayor que en esta proporción, su fuerza para mover la rueda será tanto mayor.

Si el peso $p = P$ es parcialmente suspendido por la cuerda Np y parcialmente sostenido por el plano oblicuo pG, trácese pH, NH, la primera perpendicular al horizonte y la segunda al plano pG; y si la fuerza del peso p que tiende hacia abajo es representada por la línea pH, puede descomponerse en las fuerzas pN, HN. Si hubiese algún plano pQ perpendicular a la cuerda pN, que corta el otro plano pG en una línea paralela al horizonte, y el peso p fuese soportado sólo por esos planos pQ, pG, oprimiría perpendicularmente esos planos con las fuerzas pN, HN; esto es, el plano pQ con la fuerza pN y el plano pG con

la fuerza HN. Y, por consiguiente, si el plano *p*Q fuese apartado con el fin de que el peso pudiese distender la cuerda, como la cuerda ahora sustentante ocupaba el lugar del plano suprimido, ésta se vería tensada por la misma fuerza *p*N que oprimía antes el plano. En consecuencia, la tensión de *p*N es a la tensión de PN como la línea *p*N es a la línea *p*H. Por tanto, si

$$\frac{P}{A} = \frac{OK}{OL} = \frac{\text{línea } pH}{\text{línea } pN}$$

los pesos *p* y A tendrán el mismo efecto a la hora de mover la rueda, y se sostendrán el uno al otro, como cualquiera puede descubrir mediante experimento.

Pero el peso *p* presionando sobre esos dos planos oblicuos puede considerarse como una cuña entre las dos superficies internas de un cuerpo hendido por ella; y así pueden determinarse las fuerzas de la cuña y el mazo, porque la fuerza con la cual el peso *p* presiona sobre el plano *p*Q es a la fuerza con la cual el mismo –por su propia gravedad o por el golpe de un mazo– es impelido en la dirección de la línea *p*H hacia ambos planos como *p*N es a *p*H; y a la fuerza con la cual oprime el otro plano *p*G como *p*N es a NH. Y así puede deducirse la fuerza del tornillo por una descomposición semejante de fuerzas, pues no es sino una cuña impelida con la fuerza de una palanca. Por consiguiente, el uso de este corolario abarca un campo amplísimo, y su verdad se ve ulteriormente confirmada a causa de ello. Pues de lo que ha sido dicho depende toda la doctrina de la mecánica variadamente demostrada por autores diferentes, dado que de esto se deducen fácilmente las fuerzas de máquinas compuestas de ruedas, poleas, tornillos, palancas, cuerdas y pesos que asciendan directa u oblicuamente, y otros poderes mecánicos, así como la fuerza de los tendones para mover los huesos de los animales.

COROLARIO III

La cantidad de movimiento, que se obtiene tomando la suma de los movimientos dirigidos hacia las mismas partes, y la diferencia de aquellos dirigidos hacia partes contrarias no sufre alteración por la acción de los cuerpos entre sí.

Pues la acción y su reacción contraria son iguales, de acuerdo con la Ley III, y en consecuencia –según la Ley II– producen en los movimientos cambios iguales hacia partes opuestas. Por tanto, si los movimientos son dirigidos hacia las mismas partes, lo que se añada al movimiento del cuerpo precedente será restado del movimiento del que le sigue, con lo cual la suma será la misma de antes. Si los cuerpos chocan con movimientos opuestos habrá una deducción igual de los movimientos de ambos, y por eso la diferencia de los movimientos dirigidos hacia partes opuestas permanecerá idéntica.

Así, si un cuerpo esférico A es tres veces mayor que el cuerpo esférico B, y tiene una velocidad 2, y B sigue en la misma dirección con una velocidad 10, el movimiento de A es al movimiento de B como 6 es a 10. Suponiendo que sus movimientos sean de 6 partes y de 10 partes, la suma será 16. Por tanto, si al encontrarse ambos cuerpos A adquiere 3, 4 ó 5 partes de movimiento B perderá otras tantas y, por lo mismo, tras la reflexión A proseguirá con 9, 10 ó 11 partes, y B con 7, 6 ó 5, manteniéndose siempre la suma de 16 partes como antes. Si el cuerpo A adquiere 9, 10, 11 ó 12 partes de movimiento, y por lo mismo tras el encuentro prosigue con 15, 16, 17 ó 18 partes, el cuerpo B –habiendo perdido tantas partes como ganó A– o bien proseguirá con 1 parte, tras perder 9, o se detendrá y permanecerá en reposo, por haber perdido todo su movimiento progresivo de 10 partes; o bien retrocederá con 1 parte, habiendo perdido no sólo todo su movimiento, sino (si así puede decirse) una parte más; o bien retrocederá con 2 partes, porque se ha detraído un movimiento progresivo de 12 partes. Y así las sumas de los movimientos coadyuvantes,

$$15+1 \quad \text{ó} \quad 16+0,$$

y las diferencias de los movimientos contrarios,

$$17-1 \quad \text{y} \quad 18-2,$$

serán siempre iguales a 16 partes, como eran antes del encuentro y la reflexión de los cuerpos. Pero siendo conocidos los movimientos con los cuales los cuerpos prosiguen tras la reflexión, también será conocida la velocidad de ambos estableciendo una proporción entre la velocidad posterior y la velocidad anterior a la reflexión y el movimiento posterior y el anterior. Como sucede en el último caso, donde el

$$\frac{\text{movimiento de A antes de la reflexión (6)}}{\text{movimiento de A después (18)}} = \frac{\text{velocidad de A antes (2)}}{\text{velocidad de A después } (x)};$$

esto es,

$$\frac{6}{18} = \frac{2}{x}, \quad x = 6.$$

Pero si los cuerpos no son esféricos, o si –moviéndose en líneas rectas diferentes– inciden oblicuamente el uno en el otro, y se piden sus movimientos tras la reflexión, debemos determinar primero la posición del plano tangente a los cuerpos en el punto de impacto, y luego el movimiento de cada cuerpo (por el Corolario II) debe descomponerse en dos, uno perpendicular a ese plano y otro paralelo a él. Una vez hecho esto, como los cuerpos actúan entre sí en la dirección de una línea perpendicular a este plano, los movimientos paralelos deben ser mantenidos sin alteración antes y después de la reflexión; y a los movimientos perpendiculares debemos asignar cambios iguales hacia las partes contrarias, de tal manera que la suma de los movimientos coadyuvantes y la diferencia de los movimientos contrarios pueda permanecer idéntica. De reflexiones semejantes surgen a veces también los movimientos circulares de cuerpos alrededor de sus propios centros. Pero no considero esos casos en lo que sigue, siendo demasiado tedioso demostrar cada caso particular relacionado con este tema.

COROLARIO IV

El centro común de gravedad de dos o más cuerpos no altera su estado de movimiento o reposo por las acciones de los cuerpos entre sí; por ello, el centro común de gravedad de todos los cuerpos interactuantes (excluyendo acciones externas e impedimentos) se encuentra o bien en reposo o moviéndose uniformemente en una línea recta.

Porque si dos puntos progresan con un movimiento uniforme en líneas rectas, y su distancia es dividida por una razón

dada, el punto divisorio estará o bien en reposo o moviéndose uniformemente siguiendo una línea recta. Esto se demuestra más adelante, en el Lema XXIII y su Corolario, cuando los puntos se mueven en el mismo plano; y por un razonamiento semejante puede demostrarse cuando los puntos no se mueven en el mismo plano. Por consiguiente, si cualquier número de cuerpos se mueven uniformemente en líneas rectas, el centro común de gravedad de dos cualesquiera de ellos se encuentra o bien en reposo o progresa uniformemente en línea recta, porque la línea que conecta los centros de esos dos cuerpos en movimiento es dividida en ese centro común por una razón dada. De modo semejante el centro común de esos dos cuerpos y un tercero está o bien en reposo o moviéndose uniformemente en línea recta, porque en ese centro la distancia entre el centro común de los dos cuerpos y el centro del tercero es dividida por una proporción dada. De modo semejante el centro común de los tres, y de un cuarto cuerpo, es dividido también por una razón dada, y así hasta el infinito. Por consiguiente, en un sistema de cuerpos donde no hay acción mutua alguna entre los cuerpos, ni fuerza ajena impresa en ellos desde el exterior, y que por lo mismo se mueven uniformemente en líneas rectas, el centro común de gravedad para todos ellos está en reposo o progresa uniformemente en línea recta.

Además, como en un sistema de dos cuerpos interactuantes las distancias entre sus centros y el centro común de gravedad para ambos son inversamente como los cuerpos, los movimientos relativos de esos cuerpos aproximándose o alejándose de ese centro serán iguales entre sí. Como las alteraciones de los movimientos son iguales y dirigidas hacia partes contrarias, el centro común de esos cuerpos, debido a su acción recíproca, no es acelerado ni retrasado, ni sufre cambio alguno en su estado de movimiento o reposo. Pero como en un sistema de diversos cuerpos el centro común de gravedad para dos cualesquiera de ellos interactuantes no sufre cambio en su estado por esa acción; y mucho menos el centro común de gravedad de los otros no afectados por aquella acción; y como la distancia entre esos dos centros es dividida por el centro común de gravedad de todos los cuerpos en partes inversamente proporcionales a las sumas totales de los cuerpos cuyos centros son: por tanto, mientras esos dos centros retengan su estado de movimiento o reposo el centro común de todos retiene también su estado: es manifiesto que el centro común de todos jamás sufre cambio alguno en su

estado de movimiento o reposo por las acciones de dos cuerpos cualesquiera entre sí. Pero en un sistema semejante todas las acciones de los cuerpos entre sí o bien acontecen entre dos cuerpos o están compuestas por acciones intercambiadas entre dos cuerpos y, por tanto, nunca producen ninguna alteración en el centro común de todos en cuanto a su estado de movimiento o reposo. Dado que, cuando los cuerpos no actúan unos sobre otros, ese centro se encuentra en reposo o progresa uniformemente en línea recta, prescindiendo de las acciones de los cuerpos entre sí, el centro permanecerá siempre en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vea perturbado por la acción de alguna fuerza impresa extrínsecamente a todo el sistema. De ahí que la misma ley se aplique en un sistema formado por muchos cuerpos tanto como en un cuerpo único, por lo que respecta al perseverar en el estado de reposo o movimiento. Porque el movimiento progresivo –sea de un solo cuerpo o de todo un sistema de cuerpos– debe siempre calcularse partiendo del movimiento del centro de gravedad.

COROLARIO V

Los movimientos de los cuerpos incluidos en un espacio dado son idénticos entre sí, ya se encuentre ese espacio en reposo o moviéndose uniformemente en línea recta sin movimiento circular alguno.

Porque las diferencias de los movimientos tendentes hacia las mismas partes, y las sumas de los tendentes a partes contrarias, son en principio (por hipótesis) idénticas; y de estas sumas y diferencias surgen las colisiones e impulsos que los cuerpos se infligen unos a otros. Mientras que (por la Ley II) los efectos de esas colisiones serán iguales en ambos casos, por lo cual los movimientos de los cuerpos entre sí en un caso permanecerán iguales a los movimientos de los cuerpos entre sí en el otro. Tenemos una prueba clara de esto en el experimento de un barco, donde todos los movimientos acontecen del mismo modo estando en reposo o siendo movido uniformemente en línea recta.

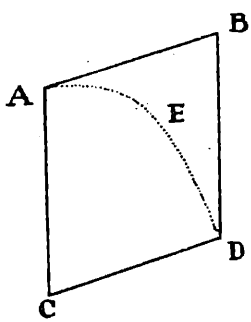
COROLARIO VI

Si cuerpos movidos de cualquier manera entre sí son impulsados por fuerzas aceleratívas iguales siguiendo líneas paralelas, continuarán todos moviéndose entre sí como si no hubiesen sido impulsados por esas fuerzas.

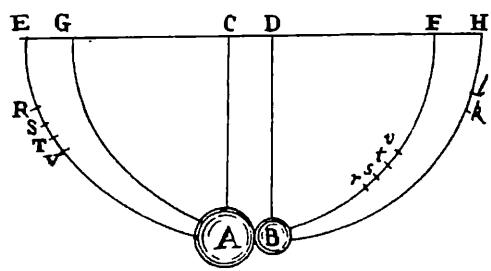
Como esas fuerzas actúan igualmente (con respecto a las cantidades de los cuerpos a mover) y siguiendo líneas paralelas, moverán igualmente a todos los cuerpos (en cuanto a velocidad) de acuerdo con la Ley II, y nunca producirán cambio alguno en las posiciones o movimientos de los cuerpos entre sí.

ESCOLIO

Hasta aquí he expuesto principios aceptados por los matemáticos y confirmados por experiencias múltiples. Por medio de las dos primeras Leyes y los dos primeros Corolarios, *Galileo* descubrió que la caída de los graves variaba como el cuadrado del tiempo, y que el movimiento de los proyectiles seguía la curva de una parábola, hallazgos ambos acordes con la experiencia considerando que tales movimientos se ven un poco retrasados por la resistencia del aire. Al caer un cuerpo, la acción constante de la fuerza uniforme de su gravedad imprime, en intervalos iguales de tiempo, fuerzas iguales sobre ese cuerpo, generando por eso mismo velocidades iguales; y en la totalidad del tiempo imprime una fuerza total, generando una velocidad total proporcional al tiempo. Y los espacios descritos en tiempos proporcionales son como el producto de las velocidades y los tiempos, esto es: como los cuadrados de los tiempos. Y cuando un cuerpo es lanzado hacia arriba, su gravedad uniforme imprime fuerzas y reduce velocidades en proporción a los tiempos; y los tiempos de ascender hasta las alturas máximas son como las velocidades y los tiempos, o como los cuadrados de las velocidades. Y si un cuerpo es proyectado en cualquier dirección, el movimiento que surge de su proyección está compuesto con el movimiento nacido de su gravedad. De este modo, si el cuerpo A pudiese describir por el solo movimiento de su proyección la línea recta



AB en un tiempo dado, y con el solo movimiento de caer pudiera describir en el mismo tiempo la altura AC, complétese el paralelogramo ABCD y por ese movimiento compuesto el cuerpo será encontrado al terminar ese tiempo en el lugar D; y la curva AED descrita por el cuerpo será una parábola, respecto de la cual la recta AB será una tangente en A, y cuya ordenada BD será como el cuadrado de la línea AB. De las mismas leyes y corolarios dependen las cosas que han sido demostradas sobre los tiempos de oscilación de péndulos, y confirmadas por los experimentos cotidianos con relojes de péndulo. Partiendo de esas leyes, y de la III, Sir *Christopher Wren*, el doctor *Wallis* y el señor *Huygens*, los mejores geómetras de nuestro tiempo, determinaron de diversos modos las reglas de impacto y reflexión de cuerpos duros, comunicando hacia las mismas fechas sus descubrimientos a la *Royal Society* con total unanimidad. De hecho, el doctor *Wallis* se anticipó un poco, siguiéndole Sir *Christopher Wren* y el señor *Huygens*. Aunque Sir *Christopher Wren* confirmó la verdad del asunto ante la *Royal Society* mediante los experimentos sobre péndulos, a los que poco después consideró oportuno dedicar todo un tratado *Mariotte*. Pero para llevar este experimento a un acuerdo exacto con la teoría hemos de tomar en cuenta tanto la resistencia del aire como la fuerza elástica de los cuerpos concurrentes. Hágase que los cuerpos esféricos A y B sean suspendidos por los hilos paralelos e iguales AC y BD desde los centros C y D. Alrededor de los centros, con esas longitudes como radios, trácense los semicírculos EAF y GBH, bisectados respectivamente por los radios CA y DB. Llévese el cuerpo A a cualquier punto R del arco EAF y (retirando el cuerpo B) permítase que parta desde allí, y tras una oscilación supongamos que regresa al punto V. RV será el retraso provocado por la resistencia del aire. Supóngase que ST es una cuarta parte de RV, situada en el medio, de tal manera que



$$RS = TV,$$

y

$$RS : ST = 3 : 2,$$

entonces ST representará muy aproximadamente el retraso durante el descenso desde S a A. Volvamos a poner el cuerpo B en su lugar y, suponiendo que se deje caer el cuerpo A desde el punto S, su velocidad en el lugar de reflexión A será, sin error sensible, la misma que si hubiera caído en el vacío desde el punto T. Debido a lo cual esta velocidad puede ser representada por la cuerda del arco TA. Es una proposición bien conocida por los geómetras que la velocidad de un cuerpo pendular en su punto más bajo es como la cuerda del arco que ha descrito en su caída. Tras la reflexión, supongamos que el cuerpo A llega al lugar *s* y el cuerpo B al lugar *k*. Retírese el cuerpo B y encuéntrese el lugar *v*, desde el cual el cuerpo A, una vez soltado, regresaría tras una oscilación al lugar *r*, siendo *st* una cuarta parte de *rv*, situada en su mitad para hacer iguales *rs* y *tv*; y hágase que la cuerda del arco *t*A represente la velocidad que el cuerpo A tenía en el lugar A inmediatamente después de la reflexión. Por lo que *t* será el verdadero y correcto lugar al que ascendería el cuerpo A suprimiendo la resistencia del aire. Del mismo modo debemos corregir el lugar *k* al que asciende el cuerpo B, encontrando el lugar *l* hasta el que habría ascendido de moverse en el vacío. De este modo todo puede someterse a experimento tal como si estuviésemos realmente situados en el vacío.

Una vez hecho esto debemos tomar el producto (si se me permite la expresión) del cuerpo A por la cuerda del arco TA (que representa su velocidad), para obtener su movimiento en el lugar A inmediatamente antes de la reflexión; y luego por la cuerda del arco *t*A, para obtener su movimiento en el lugar A inmediatamente después de la reflexión. Y del mismo modo debemos tomar el producto del cuerpo B por la cuerda del arco B*l*, a fin de obtener su movimiento inmediatamente después de la reflexión. Y de modo semejante, cuando se sueltan dos cuerpos a la vez desde lugares diferentes debemos encontrar el movimiento de cada uno, tanto antes como después de la reflexión; y entonces podremos comparar los movimientos entre sí y reunir los efectos de la reflexión. De este modo, intentándolo con péndulos de 10 pies, en cuerpos iguales tanto como desiguales, y haciendo que los cuerpos se encuentren tras recorrer largos espacios de 8, 12 ó 16 pies, he descubierto siempre, con un error máximo de 3 pulgadas, que cuando los cuerpos se encontraban directamente se producían cambios iguales en sus movimientos hacia las partes contrarias y, por

consiguiente, que la acción y la reacción eran siempre iguales. Si el cuerpo A chocaba contra el cuerpo B en reposo con 9 partes de movimiento y, perdiendo 7, proseguía tras la reflexión con 2, el cuerpo B era llevado hacia atrás con esas 7 partes. Si los cuerpos chocaban con movimientos contrarios, A con 12 partes de movimiento y B con 6, si A se alejaba con 2, B lo hacía con 8, es decir: con una deducción de 14 partes de movimiento en cada lado. Porque si del movimiento de A se substraen 12 partes no quedará nada; pero si se substraen 2 partes más se generará un movimiento de 2 partes hacia la dirección opuesta; y así, substrayendo 14 partes del movimiento del cuerpo B, que tiene 6 partes, se genera un movimiento de 8 partes hacia la dirección opuesta. Si se hace que ambos cuerpos se muevan en la misma dirección, A más rápidamente, con 14 partes de movimiento, y B más lento, con 5, y tras la reflexión A prosigue con 5, B proseguirá por lo mismo con 14, habiéndose transferido 9 partes de A a B. E igual sucede en los restantes casos. Por el encuentro y colisión de los cuerpos jamás se altera la cantidad de movimiento, obtenida por la suma de los movimientos concurrentes o por la diferencia de los contrarios. Porque el error de una pulgada o dos en las mediciones puede atribuirse fácilmente a la dificultad de ejecutar todo con precisión. No fue fácil soltar los dos péndulos tan exactamente a la vez como para que los cuerpos chocasen uno con otro en el lugar más bajo AB; ni marcar los lugares *s* y *k* hasta donde ascendieron los cuerpos tras el impacto. Todo lo contrario, y algunos errores pudieron producirse también por la desigual densidad de las partes de los cuerpos pendulares mismos, y por la irregularidad de la textura procedente de otras causas.

Pero para evitar una objeción que quizá pueda alegarse contra la regla para cuya prueba se hizo este experimento, como si esa regla supusiera que los cuerpos eran o bien absolutamente duros o al menos perfectamente elásticos (cuando no se encuentran cuerpos semejantes en la naturaleza), debo añadir que los experimentos descritos, en modo alguno dependientes de esa cualidad de dureza, se aplican igualmente a cuerpos blandos y duros. Porque si la regla quiere verificarse en cuerpos no perfectamente duros basta disminuir la reflexión en la proporción requerida por la cantidad de fuerza elástica. Según la teoría de *Wren* y *Huygens*, los cuerpos absolutamente duros se repelen a la misma velocidad con que se encontraron. Pero esto puede afirmarse con más certeza de cuerpos perfectamente elásticos. En

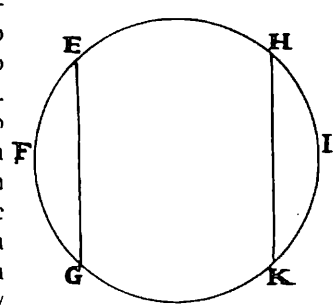
los cuerpos imperfectamente elásticos la velocidad de regreso debe disminuirse correlativamente a la fuerza elástica, porque esa fuerza (salvo cuando las partes de los cuerpos son abolladas por su impacto o sufren una extensión como sucede bajo los golpes de un martillo) es –hasta donde se me alcanza– una fuerza cierta y determinada, que hace a los cuerpos retroceder unos de otros con una velocidad relativa que se encuentra en una proporción dada con respecto a la velocidad relativa con la cual se encontraron. He intentado verificar esto con pelotas de lana muy densas y fuertemente comprimidas. Primero, soltando los cuerpos pendulares y midiendo su reflexión, determiné la cantidad de su fuerza elástica; y luego, de acuerdo con esa fuerza, calculé las reflexiones que se producirían en otros casos de impacto. Y otros experimentos realizados más tarde concordaron con ese cálculo; las pelotas se alejaban siempre una de la otra con una velocidad relativa, que era a la velocidad relativa con la cual se encontraron aproximadamente 5 a 9. Las pelotas de acero retrocedían casi con la misma velocidad, las de corcho con una velocidad algo inferior, pero en las bolas de cristal la proporción fue de 15 a 16 aproximadamente. De este modo la Ley III resulta probada, al menos en cuanto concierne a percusiones y reflexiones, por una teoría congruente con la experiencia.

En las atracciones demuestro la cosa del modo siguiente. Supongamos que se interpone un obstáculo para evitar el encuentro de dos cuerpos cualesquiera A y B que se atraen mutuamente. En ese caso, si uno de los cuerpos, digamos A, es más atraído hacia el otro cuerpo, B, que lo es ese otro cuerpo hacia A, el obstáculo se verá afectado más fuertemente por la presión del cuerpo A que por la presión del cuerpo B, por lo cual no permanecerá en equilibrio, sino que prevalecerá la presión más fuerte, haciendo que el sistema de los dos cuerpos y el obstáculo se mueva directamente hacia las partes ocupadas por B, y que en espacios libres progrese indefinidamente con un movimiento continuamente acelerado, cosa absurda y contraria a la Ley I. Porque según esa ley el sistema debe continuar en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme y, por tanto, los cuerpos deben presionar igualmente el obstáculo y ser igualmente atraídos el uno por el otro. Hice el experimento utilizando imán y hierro. Situando ambos materiales en recipientes especiales separados y haciéndolos flotar el uno junto al otro en agua estancada, ninguno impulsará al otro, sino que siendo

gualmente atraídos– soportará cada uno la presión del otro y ıcabarán reposando en un equilibrio.

Es mutua del mismo modo la gravitación entre la Tierra y us partes.

Hágase que la Tierra FI sea cortada por cualquier plano EG n dos partes EGF y EGI, y el peso de cada una de esas partes obre la otra será igual. Porque si mediante otro pano HK,)aralelo al anterior, la parte mayor EGI es cortada en dos)artes EGKH y HKI, de las cuales HKI es igual a la parte EFG egregada en primer lugar, es evi- lente que la parte media EGKH no endrá propensión por su específico)eso hacia ninguno de los lados. ino que reposará en un equilibrio uspendida entre ambos. Pero la)arte extrema HKI se apoyará con odo su peso y presionará a la parte nedia hacia la otra parte extrema :GF y, por tanto, la fuerza con la :ual EGI, suma de las partes HKI y :GKH, tiende hacia la tercera parte EGF es igual al peso de la)arte HKI, esto es: al peso de la tercera parte EGF. En :onsecuencia, los pesos de las dos partes EGI y EGF, una ·especto de la otra, son iguales, como pretendía probar. Y, en :fecto, si esos pesos no fuesen iguales, toda la Tierra, que flota en :l libre éter, cedería al peso mayor y –huyendo de él– se alejaría ndefinidamente.



Y tal como son equipolentes en el impacto y la reflexión aquellos cuerpos cuyas velocidades son inversamente como sus fuerzas innatas, así en el uso de instrumentos mecánicos son equipolentes y sostienen cada uno la presión contraria del otro aquellos agentes cuyas velocidades, calculadas de acuerdo con la determinación de las fuerzas, son inversamente como las fuerzas.

Así, tienen igual fuerza para mover los brazos de una balanza los pesos que durante la oscilación de la balanza son inversamente como sus velocidades ascendentes y descendentes; si el ascenso o descenso es directo, tienen igual fuerza los pesos que son inversamente como las distancias de los puntos en los cuales están suspendidos al eje de la balanza; pero si son desviados por la interposición de planos oblicuos u otros obstáculos, y obligados a ascender o descender oblicuamente, serán equipolentes aquellos cuerpos que son inversamente como

las alturas de su ascenso y descenso tomadas respecto a la perpendicular, y esto debido a la determinación descendente de la gravedad.

De modo semejante, en la polea o en una combinación de poleas la fuerza de una mano tirando directamente de la cuerda que sea al peso, ascendiendo directa u oblicuamente, como la velocidad del ascenso perpendicular del peso a la velocidad de la mano al tirar de la cuerda, sostendrá el peso.

En relojes e instrumentos similares, construidos a partir de una combinación de ruedas, las fuerzas contrarias que promueven e impiden el movimiento de las ruedas se sostendrán mutuamente unas a otras, si son inversamente como las velocidades de las partes de la rueda sobre la cual están impresas.

La fuerza con la que un tornillo presiona sobre un cuerpo es a la fuerza de la mano que gira las arandelas mediante las cuales se mueve como la velocidad circular de la arandela en la parte donde es impelida por la mano es a la velocidad progresiva del tornillo hacia el cuerpo presionado.

Las fuerzas mediante las cuales una cuña presiona o empuja las dos partes de la madera que abre son a la fuerza del mazo sobre la cuña como el progreso de la cuña en la dirección de la fuerza impresa en ella por el mazo es a la velocidad con la cual las partes de la madera ceden a la cuña, en direcciones perpendiculares a los lados de la cuña. Y la misma explicación puede darse para todas las máquinas.

La eficacia y el uso de las máquinas consiste solamente en que disminuyendo la velocidad podemos aumentar la fuerza, y al contrario; por lo cual en todos los tipos de instrumentos existe la solución de este problema: *mover un peso dado con una fuerza dada*, o con una fuerza dada superar cualquier otra resistencia dada. Porque si las máquinas están ideadas de manera tal que las velocidades del agente y el resistente son inversamente como sus fuerzas, el agente se limitará a sostener al resistente, pero con una mayor disparidad de velocidad lo superará. De este modo, si la disparidad de velocidades tiene una magnitud capaz de superar toda la resistencia que habitualmente surge de la fricción de cuerpos contiguos, de la cohesión de cuerpos continuos que han de ser separados, o de los pesos de los cuerpos a elevar, el exceso de fuerza subsistente tras superar todas esas resistencias producirá una aceleración de movimiento proporcional, tanto en las partes de la máquina como en el cuerpo resistente. Pero discurrir sobre mecánica no es mi

presente incumbencia. Mediante los ejemplos anteriores sólo pretendía mostrar la gran extensión y la certeza de la tercera Ley del movimiento. Pues si calculamos la acción del agente partiendo del producto de su fuerza por su velocidad, y de modo semejante la reacción del impedimento partiendo del producto de las velocidades de sus diversas partes por las fuerzas de resistencia surgidas de la fricción, cohesión, peso y aceleración de esas partes, se descubrirá siempre que en el uso de todo tipo de máquinas la acción y la reacción son siempre iguales entre sí. Y mientras la acción sea propagada por instrumentos intermedios y acabe imprimiéndose en el cuerpo resistente, su última acción siempre será contraria a la reacción.

LIBRO PRIMERO

EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

SECCION PRIMERA

Sobre el método de las primeras y últimas razones de cantidades, mediante el cual se demuestran las proposiciones siguientes.

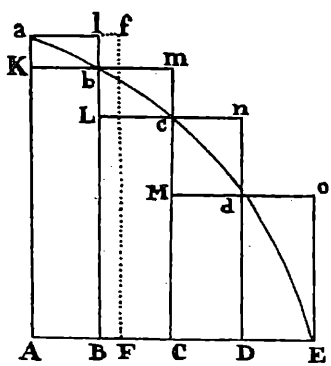
LEMA PRIMERO

Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales.

Si lo niegas, supón que son en última instancia desiguales, siendo D su diferencia última. Así pues, no pueden acercarse más a la igualdad que por esa diferencia dada, D, cosa contraria a la hipótesis.

LEMA II

Si en cualquier figura AaE, *delimitada por las líneas rectas* Aa, AE *y la curva* acE, *se inscriben cualquier número de paralelogramos* Ab, Bc, Cd, *etcétera, comprendidos bajo bases iguales* AB, BC, CD, *etc., y lados* Bb, Cc, Dd, *etc., paralelos al lado* Aa *de la figura, y se completan los paralelogramos* aKbl, bLcm, cMdn, *etc., si la anchura de esos paralelogramos se supone que irá disminuyendo y su número aumentando infinitamente, afirmo que las últimas razones que*



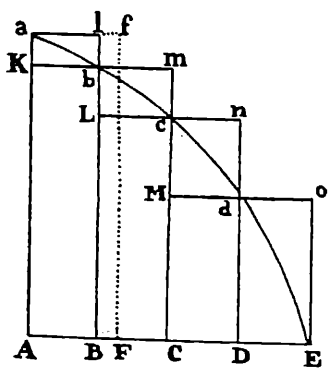
guardarán entre sí la figura inscrita AKbLcMdD, *la figura circunscrita* AalbmcndoE *y la figura curva* AabcdE *son razones de igualdad.*

Porque la diferencia de las figuras inscritas y circunscritas es la suma de los paralelogramos K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, esto es (por la igualdad de todas sus bases), el rectángulo bajo una de sus bases K*b* y de altura la suma de sus alturas A*a*, esto es, el rectángulo AB*la*. Pero este rectángulo, dado que su anchura AB se supone disminuida infinitamente, se hace menor que cualquier espacio dado. Y por tanto (según el Lema I) las figuras inscritas y circunscritas se hace en última instancia iguales entre sí, y mucho más la figura curva intermedia. Q.E.D.

LEMA III

Las mismas razones últimas son también razones de igualdad cuando las anchuras AB, BC, CD, *etc., de los paralelogramos son desiguales, y son todas ellas disminuidas infinitamente.*

Supongamos AF igual a la anchura mayor y complétese el paralelogramo FA*af*. Este paralelogramo será mayor que la diferencia de las figuras inscritas y circunscritas, pero como su anchura AF es disminuida infinitamente, se hará menor que cualquier rectángulo dado. Q.E.D.



COROLARIO I. En consecuencia, la suma última de esos paralelogramos evanescentes coincidirá en todas las partes con la figura curvilínea.

COROLARIO II. Mucho más coincidirá en última instancia la figura curvilínea con la figura rectilínea comprendida bajo las cuerdas de los arcos evanescentes *ab*, *bc*, *cd*, etc.

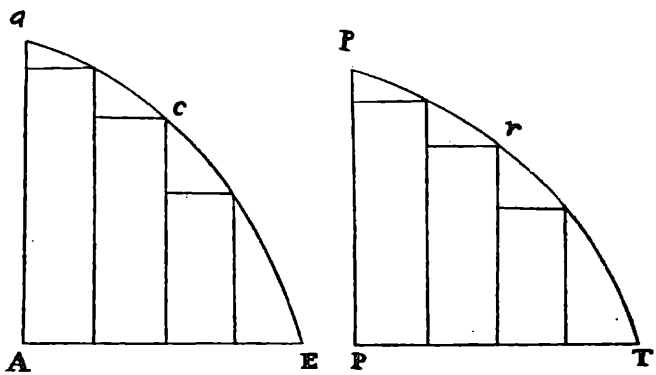
COROLARIO III. Y también la figura rectilínea circunscrita, comprendida bajo las tangentes de los mismos arcos.

COROLARIO IV. Y, por tanto, estas figuras últimas (en

cuanto a sus perímetros *ac*E) no son rectilíneas, sino límites curvilíneos de figuras rectilíneas.

LEMA IV

Si en dos figuras AacE *y* PprT *hay inscritas (como antes) dos series de paralelogramos, en número igual para cada serie, y sus anchuras se disminuyen hasta lo infinito, si las últimas razones de los paralelogramos en una figura con respecto a los de la otra, tomados uno a uno, son iguales, afirmo que esas dos figuras* AacE *y* PprT *se encuentran entre sí en esa misma razón.*



Pues tal como los paralelogramos son uno a uno, así (por composición) es la suma de todos los de una figura a la suma de todos en la otra, y así una figura a la otra; porque (por el Lema III) la primera figura respecto de la primera suma, y la segunda figura respecto de la segunda suma, se encuentran ambas en la razón de igualdad. Q.E.D.

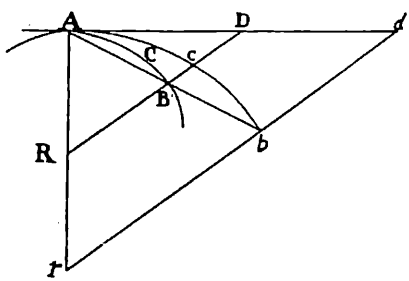
COROLARIO. En consecuencia, si dos cantidades de cualquier tipo son divididas de cualquier manera en un número igual de partes, y esas partes –cuando su número es aumentado y su magnitud disminuida hasta lo infinito–guardan una razón dada entre sí, la primera con la primera, la segunda con la segunda y así sucesivamente en orden, todas ellas tomadas conjuntamente guardarán entre sí esa misma razón dada. Porque si en las figuras de este Lema los paralelogramos son tomados entre sí en

la razón de las partes, la suma de las partes será siempre idéntica a la suma de los paralelogramos; y, en consecuencia, suponiendo que el número de los paralelogramos y las partes se aumenten y que sus magnitudes se disminuyan hasta lo infinito, esas sumas estarán en la última razón del paralelogramo de una figura al paralelogramo correspondiente de la otra, esto es (por hipótesis), en la última razón de cualquier parte de una cantidad a la parte correspondiente de la otra.

LEMA V

Todos los lados homólogos de figuras semejantes, curvilíneas o rectilíneas, son proporcionales; y las áreas son como los cuadrados de los lados homólogos.

LEMA VI



Si cualquier arco ACB, *en una posición dada, es subtendido por su cuerda* AB, *y en cualquier punto* A *situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta* AD *prolongada en ambos sentidos, si los puntos* A *y* B *se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que el ángulo* BAD *contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia.*

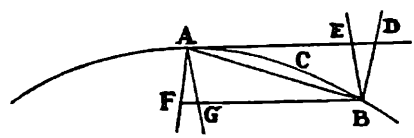
Porque si ese ángulo no desapareciese, el arco ACB contendría con la tangente AD un ángulo igual a algún ángulo rectilíneo y, por tanto, la curvatura en el punto A no será continua, cosa contraria a la hipótesis.

LEMA VII

Suponiendo las mismas cosas, afirmo que la última razón del arco, la cuerda y la tangente entre sí es la razón de igualdad.

Pues mientras el punto B se aproxima al punto A considére- siempre a AB y AD como prolongadas hasta los puntos ıotos *b* y *d*, y trácese *bd* paralela a la secante BD, siendo npre al arco A*cb* semejante al arco ACB. Entonces, suponien- que los puntos A y B coincidan, el ángulo *dAb* desaparecerá ún el Lema precedente; y, por consiguiente, coincidirán las tas A*b* y A*d* (que son siempre finitas) y el arco intermedio), haciéndose iguales entre sí. Así pues, las rectas AB, AD, y el o intermedio ACB (que son siempre proporcionales a los vios) desaparecerán, adquiriendo en última instancia la razón igualdad. Q.E.D.

COROLARIO I. Por lo cual si trazamos por B la recta BF ·alela a la tangente, que corta siempre cualquier recta AF que ;e por A en F, esa línea BF estará últimamente en la razón de aldad con el arco evanescente ACB, porque completando el ·alelogramo AFBD- está npre en una razón de igual- l con AD.



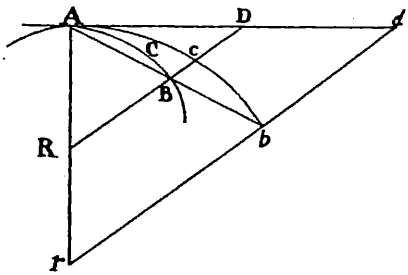
COROLARIO II. Y si se tra- ı por A y B más líneas tas, como BE, BD, AF y ;, que cortan la tangente AD y su paralela BF, la razón ima de todas las abcisas AD, AE, BF, BG y de la cuerda y el :o AB, los unos respecto de los otros, será la razón de ıaldad.

COROLARIO III. Y, por consiguiente, en toda nuestra argu- ntación sobre razones últimas podemos usar libremente ılquiera de esas líneas por cualquier otra.

LEMA VIII

las rectas AR, BR, *junto con el arco* ACB, *la cuerda* AB *y la gente* AD *constituyen tres triángulos* RAB, RACB, RAD, *y los ıtos* A *y* B *se aproximan y se encuentran, afirmo que la forma ma de esos triángulos evanescentes es la semejanza, y su última razón la igualdad.*

Pues mientras el punto B se aproxima hacia el punto A ısidérese siempre AB, AD y AR como prolongadas hacia los

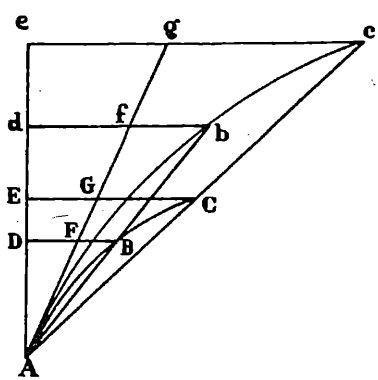


puntos remotos *b*, *d* y *r*, y *rbd* trazada paralelamente a RD, siendo el arco *Acb* siempre semejante al arco ACB. Entonces, suponiendo que los puntos A y B coincidan, el ángulo *bAd* desaparecerá; y, por tanto, los tres triángulos *rAb*, *rAcb*, *rAd* (que son siempre finitos) coincidirán, y debido a ello se harán a la vez semejantes e iguales. Y, en consecuencia, los triángulos RAB, RACB y RAD, que son siempre semejantes y proporcionales a ellos, se harán en última instancia semejantes e iguales entre sí. Q.E.D.

COROLARIO I. Y así en todas las argumentaciones sobre razones últimas podemos usar cualquiera de esos triángulos por cualquier otro.

LEMA IX

Si una línea recta AE *y una curva* ABC, *ambas con una posición dada, se cortan en un ángulo dado* A; *y a esa línea recta, en otro ángulo dado, se aplican ordenadamente* BD *y* CE *intersectando la curva en* B *y* C; *y los puntos* B *y* C *se aproximan y se encuentran en el punto* A, *afirmo que las áreas de los triángulos* ABD *y* ACE *serán respectivamente en última instancia como los cuadrados de lados homólogos.*



Pues mientras los puntos B y C se aproximan hacia el punto A, supongamos siempre que AD es prolongada hasta los puntos remotos *d* y *e*, de manera que A*d* y A*e* puedan ser proporcionales a AD y AE; y que las ordenadas *db* y *ec* se trazan paralelas a las ordenadas DB y EC, intersectando AB y AC en *b* y *c*. Siendo semejante la curva A*bc* a la curva ABC, trácese la recta A*g* que toca ambas curvas en A y corta las

ordenadas DB, EC, *db* y *ec* en F, G, *f* y *g*. Entonces, suponiendo que la longitud A*e* permanece idéntica, hágase que los puntos B y C se encuentren en el punto A. Al desaparecer el ángulo *c*A*g*, las áreas curvilíneas *Abd* y *Ace* coincidirán con las áreas rectilíneas A*fd* y A*ge*, y por tanto (según el Lema V) guardarán entre sí la razón de los lados A*d* y A*e* al cuadrado. Pero las áreas ABd y ACE son siempre proporcionales a esas áreas, tal como lo son los lados AD y AE a esos lados. Y, en consecuencia, las áreas ABD y ACE serán respectivamente en última instancia como los cuadrados de los lados AD y AE. Q.E.D.

LEMA X

Los espacios que un cuerpo describe siendo urgido por cualquier fuerza finita –sea ésta determinada e inmutable o bien aumentada o disminuida de modo continuo–son al comienzo mismo del movimiento como los cuadrados de los tiempos.

Represéntense los tiempos por las líneas AD y AE, y las velocidades generadas en esos tiempos por las ordenadas DB y EC. Los espacios descritos por esas velocidades serán como las áreas ABD, ACE descritas por esas ordenadas, esto es, al comienzo mismo del movimiento (por el Lema IX) como el cuadrado de los tiempos AD y AE. Q.E.D.

COROLARIO I. Y de esto puede inferirse fácilmente que los errores de cuerpos que describen partes semejantes de figuras semejantes en tiempos proporcionales, siendo generados por cualesquiera fuerzas iguales aplicadas de modo semejante a los cuerpos, y medidos por las distancias de los cuerpos respecto de aquellos lugares de las figuras semejantes donde hubiesen llegado los referidos cuerpos en esos tiempos proporcionales sin la acción de tales fuerzas son aproximadamente como los cuadrados de los tiempos en que se generaron.

COROLARIO II. Pero los errores que son generados por fuerzas proporcionales, aplicadas de modo semejante a los cuerpos en partes semejantes de las figuras semejantes, son como el producto de las fuerzas y los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO III. Lo mismo debe entenderse de cualesquiera espacios descritos por cuerpos empujados con diferentes fuerzas;

en el comienzo mismo, todos ellos son como el producto de las fuerzas y los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO IV. En consecuencia, las fuerzas son directamente proporcionales a los espacios descritos en el comienzo mismo del movimiento, e inversamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO V. Y los cuadrados de los tiempos son directamente proporcionales a los espacios descritos e inversamente proporcionales a las fuerzas.

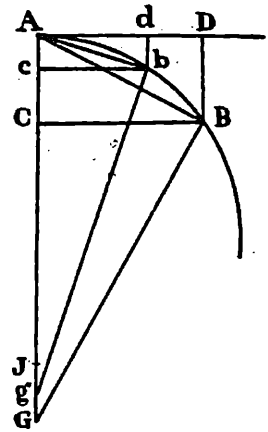
ESCOLIO

Si al comparar entre sí cantidades indeterminadas de diversos géneros de cualquiera de ellas se dice que es directa o inversamente como cualquier otra, el significado es que la primera es aumentada o disminuida en la misma razón que la segunda o como su inversa. Si de cualquiera se dice que es como cualesquiera otras dos o más, directa o inversamente, el significado es que la primera es aumentada o disminuida en la razón compuesta por las razones en que las otras, o las inversas de las otras, son aumentadas o disminuidas. De este modo, si se dice que A es a B directamente, a C directamente y a D inversamente, el significado es que A es aumentada o disminuida en la misma razón que $B \times C \times \frac{1}{D}$, esto es: que A y $\frac{BC}{D}$ guardan entre sí una razón dada.

LEMA XI

La subtensa evanescente del ángulo de contacto, en todas las curvas que en el punto de contacto tienen una curvatura finita, es en última instancia como el cuadrado de la subtensa del arco contérmino.

CASO 1. Sea AB ese arco, AD su tangente, BD la subtensa del ángulo de contacto perpendicular sobre la tangente y AB la subtensa del arco. Trácense BG perpendicular a la subtensa AB y AG perpendicular a la tangente AD, que se encuentran en G; hágase luego que los puntos D, B y G se acerquen a los puntos



d, *b* y *g*, y supóngase que J es la intersección última de las líneas BG y AG cuando los puntos D y B hayan llegado a A. Es evidente que la distancia GJ puede ser inferior a cualquier distancia asignable. Pero (por la naturaleza de los círculos que pasan por los puntos A, B, G, y por A, *b*, *g*), AB al cuadrado es igual a AG × BD, y A*b* al cuadrado es igual a A*g* × *bd*; y por esto la razón de AB al cuadrado a A*b* al cuadrado se compone de las razones AG a A*g* y BD a *bd*.

Pero como GJ puede suponerse de longitud inferior a cualquiera asignable, la razón de AG a A*g* puede ser de un orden que difiera de la unidad en menos de cualquier diferencia asignable; y, en consecuencia, la razón de AB al cuadrado a A*b* al cuadrado puede ser de un orden tal que difiera de la razón de BD a *bd* en menos de cualquier diferencia asignable. Así pues, de acuerdo con el Lema I, la razón última de AB al cuadrado a A*b* al cuadrado es igual a la razón última de BD a *bd*. Q.E.D.

CASO 2. Ahora inclínese BD hacia AD en cualquier ángulo dado, y la última razón de BD a *bd* será siempre la misma que antes y, por tanto, idéntica a la razón de AB al cuadrado a A*b* al cuadrado. Q.E.D.

CASO 3. Y si suponemos que el ángulo D no es dado, pero que la línea recta BD converge hacia un punto dado, o es determinada por cualquier otra condición, como los ángulos D y *d* están determinados por la misma Ley se acercarán siempre más y más a la igualdad, y se aproximarán más que por ninguna diferencia asignada y, en consecuencia, por el Lema I, acabarán siendo iguales, con lo cual las líneas BD y *bd* guardarán entre sí la misma razón que antes. Q.E.D.

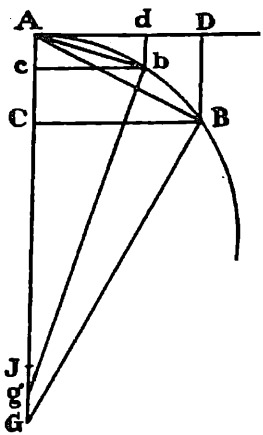
COROLARIO I. En consecuencia, como las tangentes AD, A*d*, los arcos AB y A*b* y sus senos BC y *bc* se hacen en última instancia iguales a las cuerdas A*b* y A*b*, sus cuadrados llegarán en última instancia a ser como las subtensas BD y *bd*.

COROLARIO II. Sus cuadrados son también en última instancia como los senos versos de los arcos, que bisectan las

cuerdas y convergen hacia un punto dado. Porque esos senos versos son como las subtensas BD y *bd*.

COROLARIO III. Y, por consiguiente, el seno verso es como el cuadrado del tiempo en el cual un cuerpo describirá el arco con una velocidad dada.

COROLARIO IV. La proporción última,



$$\Delta ADB : \Delta A db = AD^3 : Ad^3 = DB^{\frac{3}{2}} : db^{\frac{3}{2}},$$

se deriva de

$$\Delta ADB : \Delta A db = AD \times DB : Ad \times db$$

y de la proporción última

$$AD^2 : Ad^2 = DB : db.$$

Así también se obtiene en última instancia

$$\Delta ABC : \Delta A bc = BC^3 : bc^3.$$

COROLARIO V. Y puesto que DB y *db* son en última instancia paralelas y como los cuadrados de las líneas AD, A*d*, las últimas áreas curvilíneas ADB, A*db* serán (por la naturaleza de la parábola) dos tercios de los triángulos rectilíneos ADB y A*db*, y los segmentos AB y A*b* serán un tercio de los mismos triángulos. En consecuencia, esas áreas y esos segmentos serán como los cubos de las tangentes AD, A*d*, y también de las cuerdas y arcos AB y A*b*.

ESCOLIO

Pero hemos supuesto en todo lo precedente que el ángulo de contacto no es ni infinitamente grande ni infinitamente menor que los ángulos de contacto hechos por círculos y sus tangentes; esto es, que la curvatura en el punto A no es ni infinitamente pequeña ni infinitamente grande, y que el intervalo AJ tiene una magnitud finita. Porque DB puede tomarse como AD^3, en cuyo caso no es posible trazar ningún círculo por el punto A, entre la

tangente AD y la curva AB, por lo cual el ángulo de contacto será infinitamente menor que los de los círculos. Y, con un razonamiento similar, si DB es hecha sucesivamente como AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, etc., tendremos una serie de ángulos de contacto que progresa hasta lo infinito, en la cual cada término sucesivo es infinitamente menor que el previo. Y si DB es hecha sucesivamente como AD^2, $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, $AD^{7/6}$, etc., tendremos otra serie infinita de ángulos de contacto, el primero de los cuales es del mismo género que los de círculos, el segundo infinitamente mayor y cada ángulo sucesivo infinitamente mayor que el previo. Pero entre dos cualesquiera de esos ángulos puede interponerse otra serie de ángulos de contacto intermedios, que progresan hasta lo infinito en ambos sentidos, donde cada ángulo sucesivo será infinitamente mayor o infinitamente menor que el previo. Como si entre los términos AD^2 y AD^3 se interpusieran las series $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{8/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$, etc. Y nuevamente podrían interponerse entre dos ángulos cualquiera de esta serie una nueva serie de ángulos intermedios, diferenciados entre sí por intervalos infinitos. Y la naturaleza no conoce límites.

Las cosas que han sido demostradas sobre las líneas curvas, y las superficies que comprenden, pueden aplicarse fácilmente a las superficies curvas y los contenidos de los sólidos. Estos Lemas se enuncian como premisas para evitar el tedio de deducir largas demostraciones por el absurdo, siguiendo la costumbre de los antiguos geómetras. Pues el método de los indivisibles abrevia las demostraciones. Pero como la hipótesis de los indivisibles parece de alguna manera más ruda y, por ello, es considerada menos geométrica como método, he preferido reducir las demostraciones de las proposiciones siguientes a las primeras y últimas sumas y razones de cantidades nacientes y evanescentes, es decir, a los límites de esas sumas y razones, enunciando así del modo más breve posible como premisas la demostración de tales límites. Pues gracias a ello se prueba lo mismo que por el método de los indivisibles, y una vez demostrados esos principios podremos usarlos con mayor seguridad. Por consiguiente, si en lo sucesivo considerase las cantidades como formadas por partículas constantes o usara pequeñas curvas como rectas, no debe entenderse que me refiero a indivisibles, sino a divisibles evanescentes, ni a las sumas y razones de partes determinadas, sino siempre a los límites de sumas y razones; y que la fuerza de tales demostraciones

depende siempre del método expuesto en los Lemas precedentes.

Puede quizá objetarse que no hay proporción última de cantidades evanescentes; porque antes de haberse desvanecido las cantidades la proporción no es última, y cuando se han desvanecido no hay ninguna. Pero con el mismo argumento podría alegarse que al llegar un cuerpo a cierto lugar y detenerse allí carecerá de velocidad última, porque antes de llegar a ese lugar la velocidad no será su última velocidad, y una vez allí será nula. Sin embargo, la respuesta es fácil. Por última velocidad se entiende aquella con la cual es movido el cuerpo en el instante mismo de llegar, no antes ni después, es decir, aquella velocidad con la cual el cuerpo llega a su último lugar, y aquella con la cual cesa el movimiento. Y de modo semejante debe entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de las cantidades no antes de desvanecerse, ni después, sino aquella con la cual se desvanecen. De modo análogo, la primera razón de cantidades nacientes es aquella con la cual nacen. Y la primera o última suma es aquella con la cual comienzan o cesan (o aumentan o disminuyen). Hay un límite que puede alcanzar, pero no exceder, la velocidad en el fin del movimiento. Esa es la velocidad última. Y hay un límite semejante en todas las cantidades y proporciones que comienzan y cesan. Y como tales límites son ciertos y definidos, determinarlos es un problema estrictamente geométrico. Pero cualquier cosa geométrica puede usarse para determinar y demostrar cualquier otra cosa que sea geométrica también.

Puede objetarse también que si las razones últimas de cantidades evanescentes están dadas, también lo estarán sus magnitudes últimas, con lo cual todas las cantidades estarán formadas por indivisibles, cosa contraria a lo que demostró *Euclides* a propósito de los inconmensurables en el libro décimo de sus *Elementos*. Pero esta objeción se apoya sobre una suposición falsa. Porque esas razones últimas con las que se desvanecen las cantidades no son verdaderamente las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los que siempre convergen las razones de cantidades que decrecen sin límite, y a los cuales se aproximan más que por ninguna diferencia dada, pero sin ir más allá ni efectivamente alcanzarlo hasta disminuir infinitamente las cantidades. Esto resultará más evidente en cantidades infinitamente grandes. Si dos cantidades cuya diferencia es determinada se aumentan hasta lo infinito, la razón última de esas cantidades será determinada como razón de igualdad; pero

o se sigue de ello que las propias cantidades últimas o
láximas, de las cuales es razón, sean determinadas. Así pues, si
ara que sea más fácilmente entendido en lo sucesivo hablara
e cantidades mínimas, evanescentes o últimas, no debe supo-
erse que quiero decir con ello cantidades de cualquier magni-
ıd determinada, sino aquellas que se conciben disminuyendo
empre sin límite.

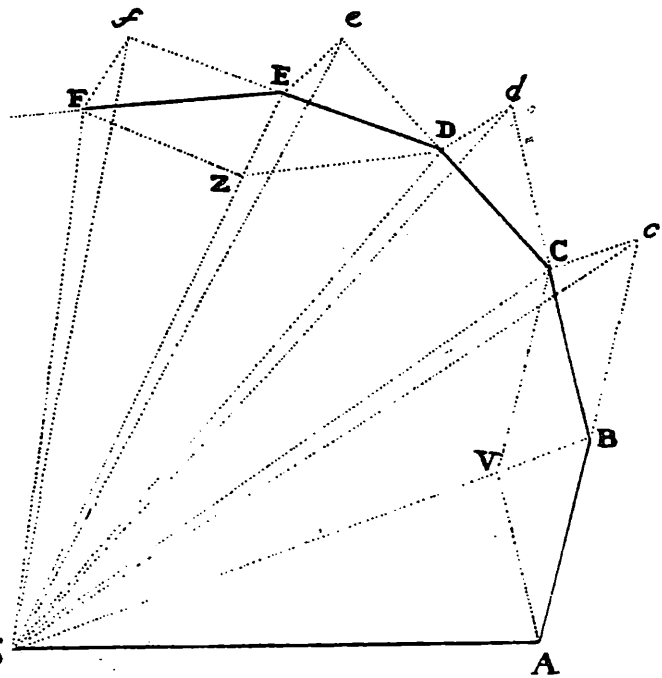
SECCION II

Sobre la determinación de fuerzas centrípetas

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I

Las áreas que los cuerpos en revolución describen mediante radios trazados hasta un centro de fuerza inmóvil se encuentran en los mismos planos inmóviles y son proporcionales a los tiempos en los que se describen.

Divídase el tiempo en partes iguales y hágase que en la primera parte de ese tiempo el cuerpo describa por su fuerza innata la línea recta AB. En la segunda parte de ese tiempo (por la Ley I) y en caso de no ser obstaculizado el cuerpo seguiría directamente hasta *c*, siguiendo la línea B*c* igual a AB; de tal manera que mediante los radios AS, BS y *c*S trazados hasta el centro se describirían las áreas iguales ASB y BS*c*. Pero cuando el cuerpo ha llegado a B supongamos que actúa una fuerza centrípeta con impulso instantáneo pero grande, y que desviando al cuerpo de la recta B*c* lo obliga a continuar su movimiento siguiendo la recta BC. Trácese *c*C paralela a BS, encontrándose con BC en C; y al terminar la segunda parte del tiempo el cuerpo (por el Corolario I de las Leyes) será encontrado en C, en idéntico plano que el triángulo ASB. Unase SC, y como SB y C*c* son paralelas, el triángulo SBC será igual al triángulo SB*c* y, en consecuencia, al triángulo SAB también. Argumentando de modo análogo, si la fuerza centrípeta actúa sucesivamente en C, D, E, etc., haciendo que en cada partícula singular de tiempo el cuerpo describa las líneas rectas CD, DE, EF, etc., todas ellas estarán en el mismo plano; y el triángulo SCD será igual al



triángulo SBC, y SDE a SCD, y SEF a SDE. Y, por consiguiente, en tiempos iguales se describen áreas iguales de un plano inmóvil; y, por composición, cualesquiera sumas SADS o SAFS de esas áreas serán respectivamente como los tiempos en los que se describieron. Aumentemos ahora el número de esos triángulos y disminuyamos su anchura hasta lo infinito; por el Corolario IV, Lema III, su perímetro último ADF será una línea curva, con lo cual la fuerza centrípeta que desvía continuamente al cuerpo de la tangente de esa curva actuará de modo continuo; y cualesquiera áreas descritas SADS, SAFS, proporcionales siempre a los tiempos de descripción, serán en este caso también proporcionales a tales tiempos. Q.E.D.

COROLARIO I. La velocidad de un cuerpo atraído hacia un centro inmóvil, en espacios libres de resistencia, es inversamente como la perpendicular abatida desde ese centro sobre la recta que toca la órbita. Porque las velocidades en esos lugares A, B, C, D, E, son como las bases AB, BC, CD, DE, EF, de triángulos

iguales; y esas bases son inversamente como las perpendiculares abatidas sobre ellas.

COROLARIO II. Si las cuerdas AB y BC de dos arcos, sucesivamente descritos en tiempos iguales por el mismo cuerpo en espacios libres de resistencia, se completan en el paralelogramo ABCV, la diagonal BV de ese paralelogramo pasará a través del centro de fuerza, si es prolongada en ambos sentidos, en la posición que adquiere en última instancia cuando los arcos son disminuidos hasta lo infinito.

COROLARIO III. Si las cuerdas AB, BC y DE, EF de arcos descritos en tiempos iguales en espacios no resistentes se completan en los paralelogramos ABCV y DEFZ, las fuerzas en B y E están entre sí en la razón última de las diagonales BV y EZ cuando esos arcos se disminuyen hasta lo infinito. Porque los movimientos BC y EF del cuerpo (por el Corolario I de las Leyes) están compuestos por los movimientos B*c*, BV y E*f*, EZ; pero BV y EZ, que son iguales a C*c* y F*f* en la demostración de esta Proposición, se generaron por los impulsos de la fuerza centrípeta en B y E, siendo por lo mismo proporcionales a dichos impulsos.

COROLARIO IV. Las fuerzas mediante las cuales los cuerpos, en espacios sin resistencia, son apartados de los movimientos rectilíneos y forzados a entrar en órbitas curvas, son entre sí como los senos versos de arcos descritos en tiempos iguales, que tienden hacia el centro de fuerza y bisectan las cuerdas cuando esos arcos se disminuyen hasta lo infinito. Pues esos senos versos son las mitades de las diagonales mencionadas en el Corolario III.

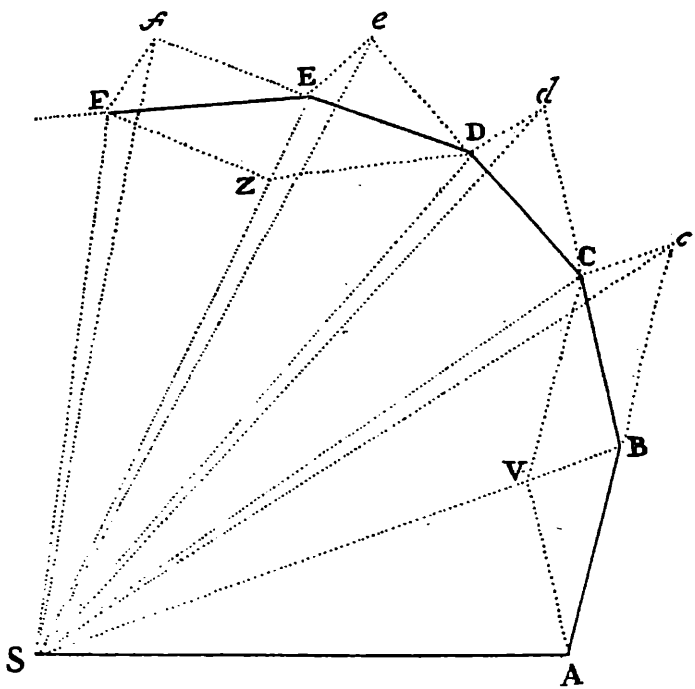
COROLARIO V. Y, por consiguiente, esas fuerzas son a la fuerza de gravedad como los mencionados senos versos son a las flechas perpendiculares al horizonte de los arcos parabólicos que describen en el mismo tiempo los proyectiles.

COROLARIO VI. Y todas estas cosas se mantienen, por el Corolario V de las Leyes, cuando los planos donde son movidos los cuerpos, junto con los centros de fuerza situados en esos planos, no están en reposo, sino que se mueven uniformemente hacia adelante en líneas rectas.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Todo cuerpo que se mueva en cualquier curva descrita en un plano y –mediante un radio trazado hasta un punto inmóvil o que progresa con movimiento rectilíneo uniforme– describa alrededor de ese punto áreas proporcionales a los tiempos es urgido por una fuerza centrípeta dirigida hacia ese punto.

CASO 1. Pues todo cuerpo que se mueva siguiendo una línea curva es (por la Ley I) desviado de su curso rectilíneo por la acción de alguna fuerza. Y esa fuerza mediante la cual el cuerpo es desviado de su curso rectilíneo y obligado a describir en tiempos iguales los mínimos triángulos iguales SAB, SBC, SCD, etc., alrededor del punto inmóvil S (por la Proposición XL, Libro I de los *Elementos* de *Euclides* y la Ley II), actúa en el lugar B siguiendo la dirección de una línea paralela a *c*C, es decir, en la dirección de la línea BS; y en el lugar C siguiendo la dirección de una línea paralela a *d*D, es decir, en la dirección de



la línea CS, etc.; y, por consiguiente, actúa siempre en la dirección de líneas dirigidas hacia el punto inmóvil S. Q.E.D.

CASO 2. Y (por el Corolario V de las Leyes) es indiferente que la superficie donde un cuerpo describe una figura curvilínea se encuentre en reposo o se mueva junto con el cuerpo, la figura descrita y su punto S uniformemente en línea recta.

COROLARIO I. En espacios o medios no resistentes, si las áreas no son proporcionales a los tiempos las fuerzas no están dirigidas hacia el punto donde se encuentran los radios, sino que se desvían desde allí a la parte hacia la que se dirige el movimiento, si la descripción de las áreas es acelerada, o alejándose de ella si es retrasada.

COROLARIO II. E incluso en medios resistentes, si se acelera la descripción de las áreas las direcciones de las fuerzas se desvían del punto en el cual se encuentran los radios, hacia la parte a la cual tiende el movimiento.

ESCOLIO

Un cuerpo puede ser urgido por una fuerza centrípeta compuesta por diversas fuerzas, en cuyo caso el significado de la Proposición es que la fuerza resultante de todas tiende hacia el punto S. Pero si cualquier fuerza actúa continuamente en la dirección de líneas perpendiculares a la superficie descrita, esa fuerza hará que el cuerpo se desvíe del plano de su movimiento; pero ni aumentará ni disminuirá el área de la superficie descrita, y por ello puede despreciarse en la composición de fuerzas.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA III

Todo cuerpo que mediante un radio trazado hasta el centro de otro cuerpo, movido como se quiera, describe alrededor de ese centro áreas proporcionales a los tiempos, es urgido por una fuerza compuesta por la fuerza centrípeta tendente hacia ese otro cuerpo y por toda la fuerza acelerativa con la cual es impelido ese otro cuerpo.

Sea L el primer cuerpo y T el segundo; por el Corolario VI de las Leyes, si ambos cuerpos son urgidos en la dirección de líneas paralelas por una nueva fuerza, igual y contraria a aquella

mediante la cual es urgido el segundo cuerpo T, el primer cuerpo L procederá a describir alrededor del cuerpo T las mismas áreas que antes. Pero la fuerza con la cual fue urgido ese cuerpo T será ahora destruida por una fuerza igual y contraria; en consecuencia, por la Ley I, el cuerpo T ahora librado a sí mismo o bien reposará o progresará uniformemente en línea recta. Y el cuerpo L, impelido por la diferencia de las fuerzas, esto es, por la fuerza restante, procederá a describir alrededor del cuerpo T áreas proporcionales a los tiempos. Así pues (por el Teorema II) la diferencia de las fuerzas se dirige hacia el otro cuerpo T como centro. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, si el cuerpo L, mediante un radio trazado hasta el cuerpo T, describe áreas proporcionales a los tiempos, y de la fuerza total que impulsa a L (ya sea simple o, según el Corolario II de las Leyes, compuesta por diversas fuerzas) substraemos (por el mismo Corolario) toda la fuerza acelerativa por la cual es urgido el otro, el conjunto de la fuerza restante mediante la cual es urgido el primer cuerpo tenderá hacia el otro cuerpo T como su centro.

COROLARIO II. Y si esas áreas son casi proporcionales a los tiempos, la fuerza remanente tenderá aproximadamente hacia el otro cuerpo T.

COROLARIO III. Y vice versa, si la fuerza remanente tiende aproximadamente hacia el otro cuerpo T, esas áreas serán aproximadamente proporcionales a los tiempos.

COROLARIO IV. Si el cuerpo L, por un radio trazado hasta T, describe áreas que comparadas con los tiempos son muy desiguales, y ese otro cuerpo T está en reposo o progresa uniformemente en línea recta, la acción de la fuerza centrípeta tendente hacia ese otro T es o bien nula o está mezclada y compuesta con acciones muy poderosas de otras fuerzas. Y la fuerza total compuesta, si son muchas, se dirige hacia otro centro (móvil o inmóvil). Lo mismo se obtiene cuando el otro cuerpo es movido por cualquier movimiento, si se toma la fuerza centrípeta remanente tras substraer toda la fuerza que actúa sobre el cuerpo T.

ESCOLIO

Puesto que la descripción regular de áreas indica que hay un centro hacia el cual tiende aquella fuerza por la que resulta más

afectado el cuerpo, y por la cual es apartado de su movimiento rectilíneo y retenido en su órbita, ¿por qué no utilizar en lo sucesivo la descripción regular de áreas como indicación de un centro, en torno al cual se realiza todo movimiento circular en espacios libres?

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA IV

Las fuerzas centrípetas de cuerpos que mediante movimientos regulares describen diferentes círculos tienden hacia los centros de esos círculos, y son entre sí como los cuadrados de los arcos descritos en tiempos iguales divididos respectivamente por los radios de esos círculos.

Esas fuerzas tienden hacia los centros de los círculos (por la Proposición II y el Corolario II de la Proposición I), y son entre sí como los senos versos de los arcos mínimos descritos en tiempos iguales (por Corolario IV, Proposición I); esto es, como los cuadrados de esos arcos divididos por los diámetros de los círculos (según el Lema XI); y, en consecuencia, puesto que tales arcos son como los arcos descritos en cualesquiera tiempos iguales, y los diámetros son como los radios, las fuerzas serán como los cuadrados de cualesquiera arcos descritos en el mismo tiempo divididos por los radios de los círculos. Q.E.D.

COROLARIO I. Puesto que esos arcos son como las velocidades de los cuerpos, las fuerzas centrípetas son como los cuadrados de las velocidades divididos por los radios.

COROLARIO II. Puesto que los tiempos periódicos son como los radios divididos por las velocidades, las fuerzas centrípetas son como los radios divididos por el cuadrado de los tiempos periódicos.

COROLARIO III. De ahí que si los tiempos periódicos son iguales, y las velocidades como los radios, las fuerzas centrípetas serán también como los radios; y a la inversa.

COROLARIO IV. Si los tiempos periódicos y las velocidades son ambos como las raíces cuadradas de los radios, las fuerzas centrípetas serán iguales entre sí; y al contrario.

COROLARIO V. Si los tiempos periódicos son como los radios y, en consecuencia, iguales las velocidades, las fuerzas centrípetas serán inversamente como los radios; y al contrario.

COROLARIO VI. Si los tiempos periódicos son como las po-

ıcias 3/2 de los radios y, por tanto, las velocidades inversa-
:nte como las raíces cuadradas de los radios, las fuerzas cen-
petas serán inversamente como los cuadrados de los radios.

COROLARIO VII. Y, en general, si el tiempo periódico es
mo cualquier potencia R^n del radio R, y la velocidad inversa-
:nte como la potencia R^{n-1} del radio, la fuerza centrípeta será
/ersamente como la potencia R^{2n-1} del radio; y al contrario.

COROLARIO VIII. Lo mismo se mantiene respecto de los
mpos, las velocidades y las fuerzas mediante las cuales los
erpos describen las partes semejantes de cualesquiera figuras
nejantes que tienen sus centros en una posición semejante con
;pecto a esas figuras, como se hace manifiesto aplicando la
mostración de los casos precedentes a éstos. Y la aplicación es
:il; basta poner la descripción regular de áreas en el lugar del
ɔvimiento regular, usando las distancias de los cuerpos res-
cto de los centros en vez de los radios.

COROLARIO IX. Se sigue de las mismas demostraciones que
arco descrito en cualquier momento por un cuerpo que gira
iformemente en círculo con una fuerza centrípeta dada es una
:dia proporcional entre el diámetro del círculo y el espacio
e el mismo cuerpo describiría en el mismo tiempo dado si
yese por la misma fuerza dada.

ESCOLIO

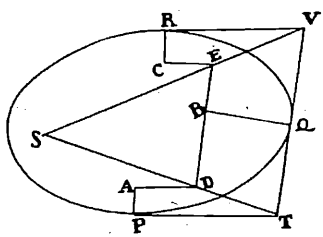
El caso del sexto Corolario se mantiene en los cuerpos
lestes (como han observado varias veces *Wren*, *Hooke* y
alley); por eso mismo pretendo en lo que sigue tratar más
npliamente lo que concierne a la fuerza centrípeta decreciente
mo los cuadrados de las distancias con respecto a los centros.

Además, mediante la Proposición precedente y sus Corola-
ɔs podemos descubrir la proporción de una fuerza centrípeta a
alquier otra fuerza conocida, como la gravedad. Pues si por
edio de su gravedad un cuerpo gira en un círculo concéntrico a
Tierra, esa gravedad es la fuerza centrípeta de tal cuerpo. Pero
or el Corolario IX de esta Proposición) está dado, partiendo
l descenso de los graves, el tiempo de toda una revolución y el
co descrito en cualquier momento. Y mediante esas proposi-
ɔnes *Huygens*, en su eximio tratado *De horologio oscillatorio*,
ı comparado la fuerza de gravedad con las fuerzas centrífugas
: cuerpos en revolución.

La Proposición precedente puede igualmente demostrarse de este modo. Supóngase que se inscribe en cualquier círculo un polígono con cualquier número de lados. Y si un cuerpo, movido con una velocidad dada siguiendo los lados del polígono, es reflejado desde el círculo en los diversos puntos angulares, la fuerza con la cual choca contra el círculo en cada reflexión será como su velocidad; y, por lo mismo, la suma de las fuerzas en un tiempo dado será como el producto de esa velocidad y el número de reflexiones; esto es (si es dada la especie del polígono) como la longitud descrita en ese tiempo dado, e incrementada o disminuida en razón de la misma longitud al radio del círculo; esto es, como el cuadrado de esa longitud dividido por el radio; y, en consecuencia, reduciendo sus lados hasta lo infinito, cuando el polígono coincide con el círculo, como el cuadrado del arco descrito en un tiempo dado dividido por el radio. Esta es la fuerza centrífuga con la cual el cuerpo impele al círculo, que es igual a la fuerza contraria en cuya virtud el círculo repele continuamente al cuerpo hacia el centro.

PROPOSICIÓN V. PROBLEMA I

Estando dada, en cualquier lugar, la velocidad con la cual un cuerpo describe una figura determinada mediante fuerzas dirigidas hacia algún centro común, encuéntrese ese centro.



Hágase que las tres líneas rectas PT, TQV y VR toquen la figura descrita en otros tantos puntos P, Q, R y se encuentren en T y V. Sobre las tangentes levántense las perpendiculares PA, QB y RC, inversamente proporcionales a las velocidades del cuerpo en los puntos P, Q y R desde los cuales se trazaron las perpendiculares; esto es, de manera que PA pueda ser a QB como la velocidad en Q a la velocidad en P, y QB a RC como la velocidad en R a la velocidad en Q. Por los extremos A, B, C de las perpendiculares trácese AD, DBE y EC en ángulos rectos, encontrándose en D y E. Las líneas rectas TD y VE prolongadas se encontrarán en S, el centro requerido.

Porque las perpendiculares trazadas desde el centro S sobre as tangentes PT, QT, son inversamente como las velocidades de os cuerpos en los puntos P y Q (por el Corolario I de la Pro- posición I) y, en consecuencia, por construcción, directamente :omo las perpendiculares AP y BQ; esto es, como las perpen- liculares abatidas desde el punto D sobre las tangentes. De lo :ual es fácil inferir que los puntos S, D y T están en una línea ·ecta. Y por razonamientos análogos los puntos S, E y V están ambién en una línea recta; por lo cual el centro S está en el ounto donde se encuentran las rectas TD y VE. Q.E.D.

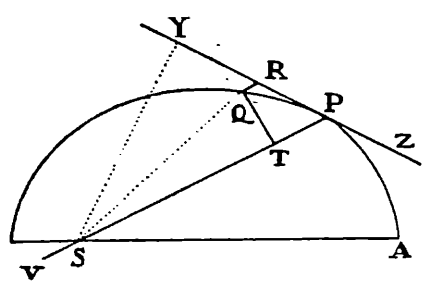
PROPOSICIÓN VI. TEOREMA V

En un espacio sin resistencia si un cuerpo gira en cualquier órbita alrededor de un centro inmóvil, y en el tiempo mínimo describe cualquier arco justamente entonces naciente, y el seno verso del arco se supone trazado bisectando la cuerda, y prolongado pasando por el centro de fuerza, entonces la fuerza centrípeta en la mitad del arco será directamente como el seno verso e inversamente como el cuadradó del tiempo.

Porque el seno verso en un tiempo dado es como la fuerza por el Corolario IV, Proposición I); y aumentando el tiempo en :ualquier proporción, como el arco será aumentado en la misma proporción, el seno verso será aumentado en el cuadrado de esa ·azón (por el Corolario II y III, Lema XI), y es por eso como la fuerza y el cuadrado del tiempo. Divídanse ambos lados por el :uadrado del tiempo y la fuerza será directamente como el seno verso e inversamente como el cuadrado del tiempo. Q.E.D.

Y la misma cosa puede también demostrarse fácilmente por el Corolario IV, Lema X.

COROLARIO I. Si un cuerpo P que gira alrededor del centro S describe una línea curva APQ, que una recta ZPR toca en cualquier punto P; y desde cualquier otro punto Q de la curva se traza QR paralela a la distancia SP, que encuentra a la tangente en R; y se traza



QT perpendicular a la distancia SP, la fuerza centrípeta será inversamente como el sólido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, si el sólido es siempre tomado de aquella magnitud que últimamente adquiere cuando coinciden los puntos P y Q. Porque QR es igual al seno verso del doble del arco QP, cuyo punto medio es P, y el doble del triángulo SQP, o $SP \times QT$ es proporcional al tiempo en el cual es descrito ese doble arco: y puede por eso ser usado para representar el tiempo.

COROLARIO II. Por un razonamiento semejante, la fuerza centrípeta es inversamente como el sólido $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$, si SY es una perpendicular desde el centro de fuerza a PR, la tangente de la órbita. Porque los rectángulos $SY \times QP$ y $SP \times QT$ son iguales.

COROLARIO III. Si la órbita es un círculo, o toca o corta concéntricamente un círculo, esto es, contiene con un círculo el mínimo ángulo de contacto o sección, teniendo la misma curvatura y el mismo radio de curvatura en el punto P; y si PV es una cuerda de ese círculo, trazada desde el cuerpo a través del centro de fuerza, la fuerza centrípeta será inversamente como el sólido $SY^2 \times PV$.

Porque PV es $\frac{QP^2}{QR}$.

COROLARIO IV. Suponiendo las mismas cosas, la fuerza centrípeta es como el cuadrado de la velocidad directamente, y como esa cuerda inversamente. Pues la velocidad es inversamente como la perpendicular SY, por el Corolario I, Proposición I.

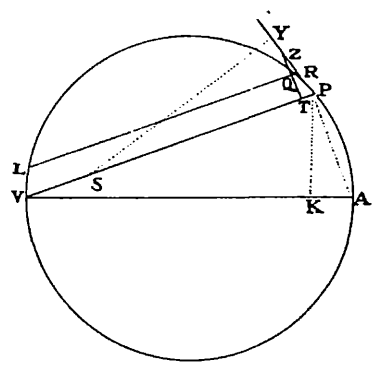
COROLARIO V. Así pues, si es dada cualquier figura curvilínea APQ, y dado también allí un punto S hacia el cual se dirige continuamente una fuerza centrípeta, podrá descubrirse aquella ley de la fuerza centrípeta en cuya virtud el cuerpo P será continuamente apartado de un curso rectilíneo y, retenido en el perímetro de esa figura, la describirá mediante una revolución continua. Esto es, debemos descubrir por cálculo o bien el sólido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ o el sólido $SY^2 \times PV$, inversamente proporcionales a esa fuerza. En los problemas siguientes daremos ejemplos de esto.

PROPOSICIÓN VII. PROBLEMA II

Si un cuerpo gira en la circunferencia de un círculo, se propone encontrar la ley de la fuerza centrípeta dirigida a cualquier punto dado.

Sea VQPA la circunferencia del círculo; S, el punto dado hacia el cual tiende la fuerza como hacia un centro; P, el cuerpo que se mueve en la circunferencia; Q, el próximo lugar hacia el que ha de moverse; y PRZ la tangente del círculo en el lugar precedente. Por el punto S trácese la cuerda PV, y el diámetro VA del círculo; únase AP, y trácese QT perpendicular a SP, encontrando a la tangente PR en Z; y, por último, por el punto Q trácese LR paralela a SP, intersectando el círculo en L y la tangente PZ en R. Debido a los triángulos semejantes ZQR, ZTP, VPA, tendremos

$$RP^2 : QT^2 = AV^2 : PV^2.$$



Puesto que $RP^2 = RL \times QR$,

$$QT^2 = \frac{RL \times QR \times PV^2}{AV^2}.$$

Multiplíquense esos iguales por $\frac{SP^2}{QR}$ y coincidiendo los puntos P y Q escríbase PV por RL; entonces

$$\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}.$$

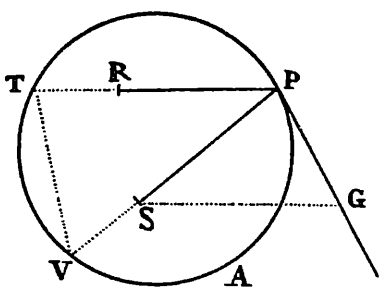
Y en consecuencia (por el Corolario I y el V, y la Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$; esto es (porque AV^2 es dada), inversamente como el producto de SP^2 por PV^3. Q.E.I.

Lo mismo de otro modo

Abátase sobre la tangente PR la perpendicular SY; y (debido a los triángulos semejantes SYP y VPA) tendremos AV a PV como SP a SY y, por consiguiente, $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, y $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = SY^2 \times PV$. Y, en consecuencia (por el Corolario III y el V, Proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$; esto es (porque AV es dada), inversamente como $SP^2 \times PV^3$. Q.E.I.

COROLARIO I. Por consiguiente, si el punto dado S, hacia el que siempre tiende la fuerza centrípeta, se sitúa en la circunferencia del círculo, como en V, la fuerza centrípeta será inversamente como la quinta potencia de la altura SP.

COROLARIO II. La fuerza mediante la cual el cuerpo P gira alrededor del centro de fuerza S, describiendo el círculo APTV,



es a la fuerza mediante la cual el mismo cuerpo P, en el mismo tiempo periódico, puede girar describiendo el mismo círculo alrededor de cualquier otro centro de fuerza R, como $RP^2 \times SP$ al cubo de la recta SG, que se traza desde el primer centro de fuerza S paralela a la distancia PR del cuerpo al segundo centro de fuerza R, intersectando la tangente PG de la órbita en G.

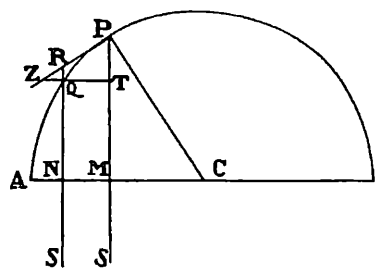
Porque por la construcción de esta Proposición la primera fuerza es a la segunda como $RP^2 \times PT^3$ a $SP^2 \times PV^3$; esto es, como $SP \times RP^2$ es a $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$; o (debido a los triángulos semejantes PSG y TPV) a SG^3.

COROLARIO III. La fuerza mediante la cual el cuerpo P gira en cualquier órbita alrededor del centro de fuerza S es a la fuerza en cuya virtud el mismo cuerpo podría girar en la misma órbita, y el mismo tiempo periódico, alrededor de cualquier otro centro de fuerza R como el sólido $SP \times RP^2$, contenido bajo la distancia del cuerpo al primer centro de fuerza S y el cuadrado

e su distancia al segundo centro de fuerza R, al cubo de la recta G trazada desde el primer centro de fuerza S, paralela a la istancia RP del cuerpo al segundo centro de fuerza R, que toca la tangente PG de la órbita en G. Pues la fuerza en esta órbita n cualquier punto P es la misma que en un círculo de la misma urvatura.

PROPOSICIÓN VIII. PROBLEMA III

i un cuerpo se mueve en la emicircunferencia PQA, *enuéntrese la ley de la fuerza entrípeta tendente hacia un unto* S, *tan remoto que todas as líneas* PS *y* RS *trazadas asta allí pueden considerarse paralelas.*



Desde C, centro del semicírculo, trácese el semidiámetro CA, cortando las paralelas en ángulos rectos en M y N, y úna- e CP. Debido a los triángulos semejantes CPM, PZT y RZQ endremos $CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2$. Partiendo de la naturaeza del círculo, $PR^2 = QR\ (RN + QN) = QR \times 2PM$, cuando oinciden los puntos P y Q. En consecuencia, $CP^2 : PM^2 = QR \times 2PM : QT^2$; y $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, y $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$ Por tanto (según los Corolarios I y V, Proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$; esto. es (desreciando la razón dada $\frac{2SP^2}{CP^2}$), inversamente como PM^3. Q.E.I.

Y lo mismo se infiere fácilmente de modo análogo a partir de a Proposición precedente.

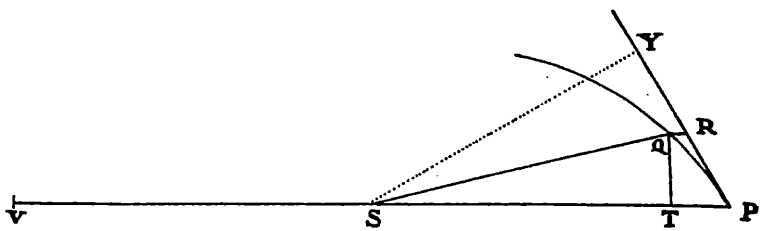
ESCOLIO

Por un razonamiento semejante, un cuerpo será movido en ma elipse, o incluso en una hipérbola o parábola, por una fuer-

za centrípeta que es inversamente como el cubo de la ordenada dirigida hacia un centro de fuerza infinitamente remoto.

PROPOSICIÓN IX. PROBLEMA IV

Si un cuerpo gira en una espiral PQS, *cortando todos los radios* SP, SQ, *etc., en un ángulo dado, encuéntrese la ley de la fuerza centrípeta tendente hacia el centro de esa espiral.*



Supóngase dado el ángulo indefinidamente pequeño PSQ; entonces, puesto que todos los ángulos están dados, estará dada en especie la figura SPRQT. En consecuencia, también está dada la razón $\frac{QT}{QR}$, y $\frac{QT^2}{QR}$ es como QT, esto es (porque la figura está dada en especie), como SP. Pero si el ángulo PSQ es variado de cualquier modo, la recta QR que subtiende al ángulo de contacto QPR (por el Lema XI) variará en la razón de PR^2 o QT^2. En consecuencia, la razón $\frac{QT^2}{QR}$ permanece igual que antes, esto es, como SP. Y $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ es como SP^3, y, en consecuencia (por los Corolarios I y V, Proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como el cubo de la distancia SP. Q.E.I.

Lo mismo de otra manera

La perpendicular SY abatida sobre la tangente, y la cuerda PV del círculo que corta concéntricamente la espiral, se encuentran en razones dadas con respecto a la altura SP; y, en consecuencia, SP^3 es como $SY^2 \times PV$, esto es (por los Corolarios III y V, Proposición VI) inversamente como la fuerza centrípeta.

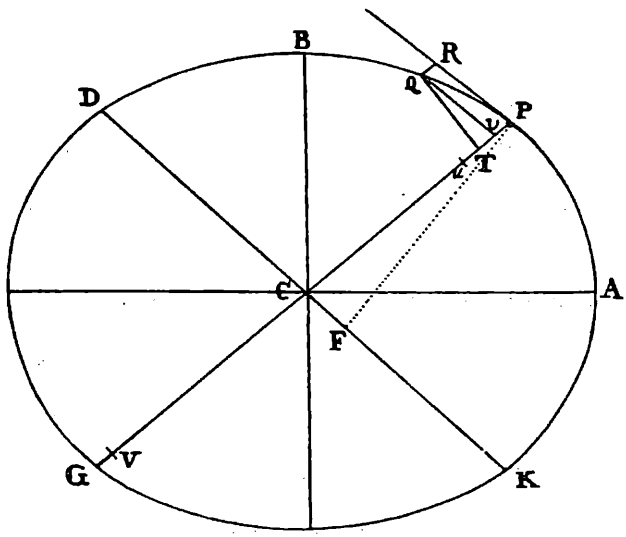
LEMA XII

Todos los paralelogramos circunscritos en torno a cualesquiera diámetros conjugados de una elipse o hipérbola dada son iguales entre sí.

Lo demuestran los tratadistas de secciones cónicas.

PROPOSICIÓN X. PROBLEMA V

Si un cuerpo gira en una elipse, encuéntrese la ley de la fuerza centrípeta tendente hacia el centro de la elipse.



Supongamos que CA y CB son semiejes de la elipse; GP y DK, diámetros conjugados; PF y QT, perpendiculares a esos diámetros; Qv, una ordenada al diámetro GP. Si el paralelogramo $QvPR$ se completa (por las propiedades de las secciones cónicas) $Pv \times vG : Qv^2 = PC^2 : CD^2$, y debido a los triángulos semejantes QvT y PCF, $Qv^2 : QT^2 = PC^2 : PF^2$; y eliminando Qv^2, $vG : \frac{QT^2}{Pv} = PC^2 : \frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Puesto que $QR = Pv$ y (por el Lema XIII) $BC \times CA = CD \times PF$, y que cuando los puntos P y Q

coinciden $2PC = vG$, multiplicando los extremos y los medios simultáneamente obtendremos

$$\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$$

En consecuencia (por el Corolario V, Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$; esto es (siendo dado $2BC^2 \times CA^2$) inversamente como $\frac{1}{PC}$; esto es, directamente como la distancia PC. Q.E.I.

Lo mismo de otro modo

En la recta PG y al otro lado de T tómese el punto u de tal manera que Tu pueda ser igual a Tv; tómese luego vV, de manera que $uV : uG = DC^2 : PC^2$. Puesto que, por las secciones cónicas, $Qv^2 : Pv \times vG = DC^2 : PC^2$, tenemos $Qv^2 = Pv \times uV$. Añádase $Pu \times Pv$ a ambos lados y el cuadrado de la cuerda del arco PQ será igual al rectángulo $PV \times Pv$; en consecuencia, un círculo que toque a la sección cónica en P, y pase a través del punto Q, pasará también a través del punto V. Hagamos ahora que se encuentren los puntos P y Q, y la razón de uV a vG, idéntica a la razón de DC^2 a PC^2, se convertirá en la razón de PV a PG, o PV a 2PC; y, en consecuencia, PV será igual a $\frac{2DC^2}{PC}$. Y, en consecuencia, la fuerza por la cual el cuerpo P gira en la elipse será inversamente como $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$ (por el Corolario III, Proposición VI); esto es (siendo dado $2DC^2 \times PF^2$), directamente como PC. Q.E.I.

COROLARIO I. Así pues, la fuerza es como la distancia del cuerpo al centro de la elipse; y viceversa, si la fuerza es como la distancia el cuerpo se moverá en una elipse cuyo centro coincide con el centro de fuerza, o quizá en un círculo donde puede degenerar la elipse.

COROLARIO II. Y serán iguales los tiempos periódicos de las revoluciones realizadas en todas las elipses alrededor del mismo centro. Porque esos tiempos serán iguales en elipses semejantes

(por los Corolarios III y VIII, Proposición IV); pero en elipses que tienen su eje mayor común son entre sí como las áreas totales de las elipses directamente, e inversamente como las partes de las áreas parciales descritas en el mismo tiempo; esto es, directamente como esos ejes menores e inversamente como las ordenadas al mismo punto de los ejes comunes; en consecuencia (por la igualdad de las razones directas e inversas) en la razón de igualdad.

ESCOLIO

Si la elipse degenera en una parábola al ser desplazado su centro a una distancia infinita, el cuerpo se moverá en esa parábola; y la fuerza, que ahora tiende hacia un centro infinitamente remoto, se hará constante. Este es el teorema de *Galileo*. Y si la sección parabólica del cono (cambiando la inclinación del plano que corta respecto del cono) degenera en una hipérbola, el cuerpo se moverá en el perímetro de esta hipérbola, transformándose su fuerza centrípeta en centrífuga. Y como en el círculo o en la elipse, si las fuerzas están dirigidas hacia el centro de la figura situado en la abcisa, incrementando o disminuyendo las ordenadas en cualquier razón dada, o incluso cambiando el ángulo de inclinación de las ordenadas a la abcisa, esas fuerzas son siempre aumentadas o disminuidas en proporción a las distancias desde el centro, siempre que los tiempos periódicos se mantengan idénticos; así pues, en todas las figuras, si las ordenadas son aumentadas o disminuidas en cualquier proporción dada, o se altera de cualquier modo su inclinación, permaneciendo idéntico el tiempo periódico, las fuerzas dirigidas hacia cualquier centro situado en la abcisa se ven en las diversas ordenadas aumentadas o disminuidas en proporción a las distancias desde el centro.

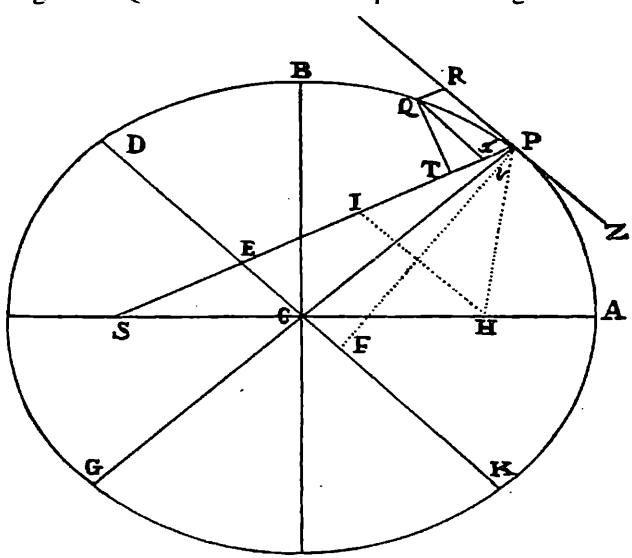
SECCION III

El movimiento de los cuerpos en secciones cónicas excéntricas

PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA VI

Si un cuerpo gira en una elipse: encuéntrese la ley de la fuerza centrípeta que tiende hacia el foco de la elipse.

Sea S el foco de la elipse. Trácese SP cortando el diámetro DK de la elipse en E, y la ordenada Qv en *x*; y complétese el paralelogramo Q*x*PR. Es evidente que EP es igual al semieje



mayor AC, pues trazando HI desde el otro foco H de la elipse paralela a EC, como CS y CH son iguales ES y EI serán iguales también; de manera que EP es la semisuma de PS y PI, esto es, de PS y PH (debido a las paralelas HI y PR, y los ángulos iguales IPR y HPZ), que tomadas conjuntamente son iguales a todo el eje 2AC. Trácese QT perpendicular a SP, y considerando a L como principal *latus rectum* de la elipse (o como $\frac{2BC^2}{AC}$) tendremos

$$L \times QR : L \times Pv = QR : Pv = PE : PC = AC : PC,$$

también $L \times Pv : Gv \times Pv = L : Gv$, y $Gv \times Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2$.

Por el Corolario II, Lema VII, cuando los puntos P y Q coinciden,

$$Qv^2 = Qx^2, \text{ y } Qx^2 \text{ o } Qv^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = CA^2 : PF^2,$$

y (por el Lema XII) $= CD^2 : CB^2$. Multiplicando entre sí términos correspondientes de las cuatro proporciones y simplificando tendremos

$$L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2 = 2PC : Gv,$$

puesto que $AC \times L = 2BC^2$. Pero coincidiendo los puntos P y Q, 2PC y Gv son iguales. Y, en consecuencia, las cantidades $L \times QR$ y QT^2, proporcionales a ellas, serán iguales también. Multiplíquense esos iguales por $\frac{SP^2}{QR}$ y $L \times SP^2$ se hará igual a $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$

Y, en consecuencia, por los Corolarios I y V, Proposición VI, la fuerza centrípeta es inversamente como $L \times SP^2$, esto es, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q.E.I.

Lo mismo de otro modo

Puesto que la fuerza tendente al centro de la elipse, en cuya virtud el cuerpo puede girar en ella, es (por el Corolario I, Proposición X) como la distancia CP del cuerpo desde el centro C de la elipse, trácese CE paralela a la tangente PR de la elipse; y la fuerza mediante la cual el mismo cuerpo P puede girar alrededor de cualquier otro punto S de la elipse, si CE y PS se

intersectan en E, será como $\frac{PE^3}{SP^2}$ (por el Corolario III, Proposición VII); esto es, si el punto S es el foco de la elipse y PE es dada como SP^2 inversamente. Q.E.I.

Podríamos hacer uso de la misma brevedad con la que redujimos el quinto Problema a la parábola y la hipérbola; pero debido a la dignidad del Problema y a su uso en lo sucesivo confirmaré los otros casos por demostraciones específicas.

PROPOSICIÓN XII. PROBLEMA VII

Supongamos que un cuerpo se mueve en una hipérbola; encuéntrese la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de esa figura.

Sean CA y CB los semiejes de la hipérbola; PG y KD otros diámetros conjugados; PF, una perpendicular al diámetro KD, y Qv una ordenada al diámetro GP. Trácese SP cortando el diámetro DK en E, y a la ordenada Qv en x, y complétese el paralelogramo $QRPx$. Es evidente que EP es igual al semieje transversal AC; porque trazando HI paralela a EC desde el otro foco H de la hipérbola, como CS y CH son iguales ES y EI lo serán también; de manera que EP es la semidiferencia de PS y PI; esto es (por las paralelas IH, PR, y los ángulos iguales IPR, HPZ), de PS y PH, cuya diferencia es igual a todo el eje 2AC.

Trácese QT perpendicular a SP; y considerando L como el *latus rectum* principal de la hipérbola (esto es, como $\frac{2BC^2}{AC}$) tendremos

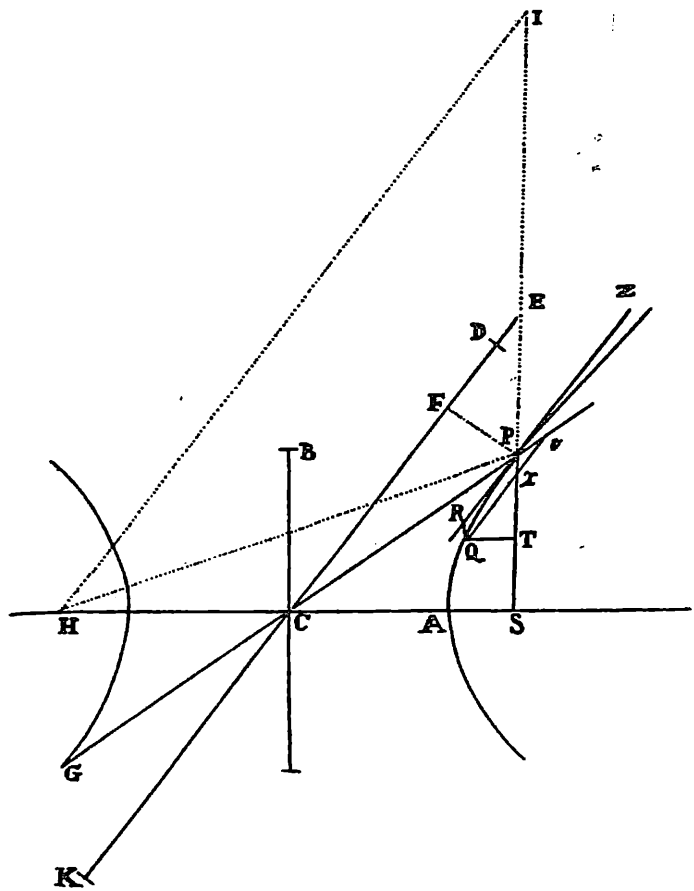
$$L \times QR : L \times Pv = QR : Pv = Px : Pv = PE : PC = AC : PC,$$

y también

$$L \times Pv : Gv \times Pv = L : Gv \quad \text{y} \quad Gv \times Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2.$$

Por el Corolario II, Lema VII, cuando P y Q coinciden $Qx^2 = Qv^2$, y

Qx^2 o $Qv^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = CA^2 : PF^2$, por Lema XII, $= CD^2 : CB^2$.



Multiplicando conjuntamente los términos correspondientes de las cuatro proporciones y simplificando,

$$L \times QR : QT^2 = AC \times L \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2 = 2PC : Gv,$$

puesto que $AC \times L = 2BC^2$. Pero si los puntos P y Q coinciden, 2PC y Gv son iguales. Y, en consecuencia, las cantidades $L \times QR$ y QT^2, proporcionales a ellos, serán iguales también. Multiplíquense esos iguales por $\frac{SP^2}{QR}$, y tendremos $L \times SP^2$ igual a

$\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Y, en consecuencia (por los Corolarios I y V, Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $L \times SP^2$, esto es, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q.E.I.

Lo mismo de otro modo

Descúbrase la fuerza que tiende al centro C de la hipérbola. Será proporcional a la distancia CP. Pero, en consecuencia (por el Corolario III, Proposición VII), la fuerza tendente al foco S será como $\frac{PE^3}{SP^2}$, esto es, porque PE está dada, inversamente como SP^2. Q.E.I.

Y del mismo modo puede demostrarse que si la fuerza centrípeta es sustituida por una fuerza centrífuga el cuerpo se moverá en la hipérbola conjugada.

LEMA XIII

El «latus rectum» de una parábola perteneciente a cualquier vértice es cuatro veces la distancia de ese vértice al foco de la figura.

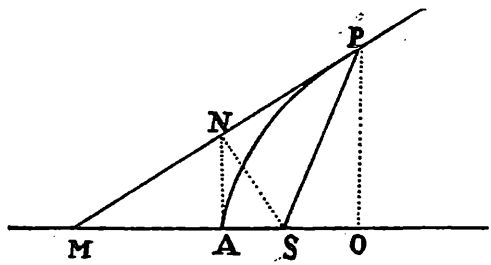
Lo demuestran los tratadistas de secciones cónicas.

LEMA XIV

La perpendicular abatida desde el foco de una parábola sobre su tangente es una media proporcional entre las distancias del foco al punto de contacto y al vértice principal de la figura.

Sea AP la parábola, S su foco, A su vértice principal, P el punto de contacto, PO una ordenada al diámetro principal, PM

ı tangente que encuentra el diámetro principal en M, y SN la erpendicular desde el foco sobre la tangente; únase AN, y por ıs líneas iguales MS y P, MN y NP, MA y O, las rectas AN y OP erán paralelas; y por lo ıismo el triángulo SAN erá rectángulo en A, y emejante a los triángu- ɔs iguales SNM y SNP; n consecuencia, PS es a N como SN es a SA.).E.D.



COROLARIO I. PS^2 es a SN^2 como PS es a SA.

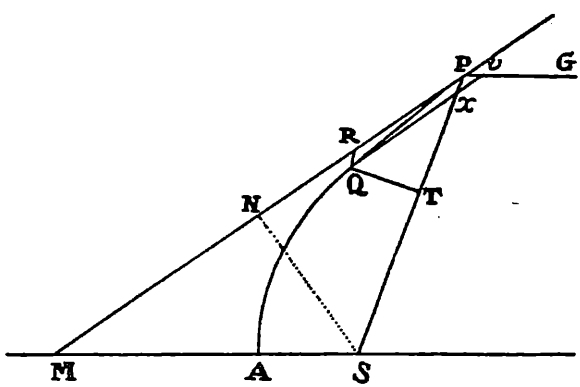
COROLARIO II. Y como SA está dada, SN^2 variará como PS.

COROLARIO III. Y la intersección de cualquier tangente PM on la recta SN, trazada desde el foco perpendicular a la angente, cae sobre la recta AN y toca la parábola en el vértice rincipal.

PROPOSICIÓN XIII. PROBLEMA VIII

i un cuerpo se mueve en el perímetro de una parábola, encuéntre- se la ley de la fuerza centrípeta dirigida a su foco.

Reteniendo la construcción del Lema precedente, sea P el uerpo en el perímetro de la parábola; y desde el lugar Q, donde



se encontrará próximamente, trácese QR paralela y QT perpendicular a SP, como también Qv paralela a la tangente, tocando al diámetro PG en v, y a la distancia SP en x.

Debido a los triángulos semejantes Pxv, SPM, y a los lados iguales SP y SM de uno, los lados Px o QR y Pv del otro serán también iguales. Pero (por las secciones cónicas) el cuadrado de la ordenada Qv es igual al rectángulo bajo el *latus rectum* y el segmento Pv del diámetro; esto es (por el Lema XIII), al rectángulo $4PS \times Pv$ o $4PS \times QR$; y coincidiendo los puntos P y Q (por el Corolario II, Lema VII), $Qx = Qv$. En consecuencia, Qx^2 se hace igual en este caso al rectángulo $4PS \times QR$. Pero (debido a los triángulos semejantes QxT y SPN),

$$Qx^2 : QT^2 = PS^2 : SN^2 = PS : SA \text{ (por el Corolario I, Lema XIV),}$$
$$= 4PS \times QR : 4SA \times QR.$$

En consecuencia (por la Proposición IX, Libro V de los *Elementos* de *Euclides*), $QT^2 = 4SA \times QR$. Multiplíquense esos iguales por $\frac{SP^2}{QR}$ y $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ se hará igual a $SP^2 \times 4SA$, y, en consecuencia (por los Corolarios I y V, Proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como $SP^2 \times 4SA$; esto es, pues 4SA está dada, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q.E.I.

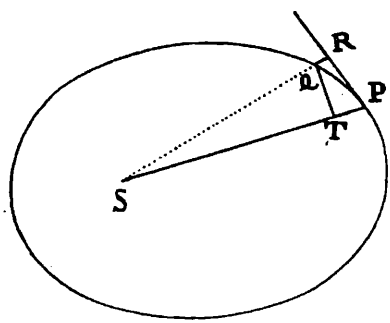
COROLARIO I. De las tres últimas proposiciones se sigue que si cualquier cuerpo P parte del lugar P con cualquier velocidad en la dirección de cualquier línea recta PR, y al mismo tiempo es urgido por la acción de una fuerza centrípeta que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares con respecto al centro, el cuerpo se moverá en una de las secciones cónicas, teniendo su foco en el centro de fuerza, y al revés. Porque estando dados el foco, el punto de contacto y la posición de la tangente, puede describirse una sección cónica con una curvatura dada en ese punto. Pero la curvatura está dada cuando lo están la fuerza centrípeta y la velocidad del cuerpo; y dos órbitas que se tocan una a la otra no pueden ser descritas por la misma fuerza centrípeta y la misma velocidad.

COROLARIO II. Si la velocidad con la cual el cuerpo abandona su lugar P es tal que en un momento temporal infinitamente pequeño la pequeña línea PR puede ser descrita; e igualmente la fuerza centrípeta en el mismo tiempo para desplazar el mismo cuerpo a través del espacio QR, el cuerpo se

overá en una de las secciones cónicas, cuyo principal *latus ctum* es la cantidad $\frac{QT^2}{QR}$ en su último estado, cuando las queñas líneas PR y QR son disminuidas hasta lo infinito. En los Corolarios considero el círculo como una elipse; y hago cepción en el caso donde el cuerpo desciende hacia el centro una línea recta.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA VI

arios cuerpos giran alrededor de un centro común y la fuerza ntrípeta es inversamente como el cuadrado de la distancia de los gares con respecto al centro, afirmo que los principales latera cta *de sus órbitas son como los cuadrados de las áreas que los ierpos describen por radios trazados hacia el centro en el mismo tiempo.*



Porque (por el Corolario . Proposición XIII) el *latus ctum* L es igual a la cantidad $\frac{QT^2}{QR}$ en su estado último, uando coinciden los puntos P Q. Pero la pequeña línea QR n un tiempo dado es como la ierza centrípeta generante: es- es (por suposición), inversa- ente como SP^2. Y, en conse- uencia, $\frac{QT^2}{QR}$ es como $QT^2 \times SP^2$; esto es, el *latus rectum* L es omo el cuadrado del área $QT \times SP$. Q.E.D.

COROLARIO. De ahí que todo el área de la elipse, y el ctángulo bajo los ejes, que es proporcional a ella, sea como el roducto de la raíz cuadrada del *latus rectum* y el tiempo eriódico. Porque todo el área es como el área $QT \times SP$, descrita n un tiempo dado, multiplicada por el tiempo periódico.

PROPOSICIÓN XV. TEOREMA VII

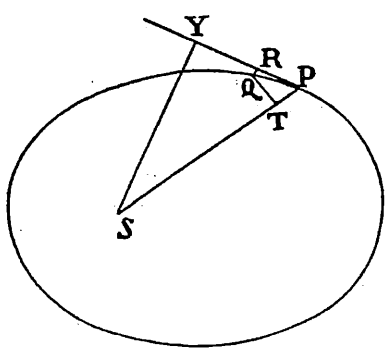
Suponiendo las mismas cosas, afirmo que los tiempos periódicos en elipses son como la potencia 3/2 (in ratione sesquiplicata) *de sus ejes mayores.*

Pues el eje menor es una media proporcional entre el eje mayor y el *latus rectum*, y, por tanto, el producto de los ejes es igual al producto de la raíz cuadrada del *latus rectum* y la potencia 3/2 del eje mayor. Pero el producto de los ejes (por el Corolario de la Proposición XIV) varía como el producto de la raíz cuadrada del *latus rectum* y el tiempo periódico. Divídanse ambos lados por la raíz cuadrada del *latus rectum* y se sigue que la potencia 3/2 del eje mayor varía como el tiempo periódico. Q.E.D.

COROLARIO. En consecuencia, los tiempos periódicos en elipses son los mismos que en círculos cuyos diámetros sean iguales a los ejes mayores de las elipses.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA VIII

Suponiendo las mismas cosas, y trazando líneas rectas por los cuerpos que tocarán las órbitas, y abatiendo perpendicularmente sobre esas tangentes desde el foco común, afirmo que las velocidades de los cuerpos varían inversamente como las perpendiculares y directamente como las raíces cuadradas de los principales latera recta.



Trácese SY desde el foco S perpendicular a la tangente PR, y la velocidad del cuerpo P varía inversamente como la raíz cuadrada de la cantidad $\frac{SY^2}{L}$. Pues esa velocidad es como el arco infinitamente pequeño PQ descrito en un momento de tiempo dado, esto es (por el Lema VII) como la tangente PR; esto es (debido a

a proporción PR : QT = SP : SY), como $\frac{SP \times QT}{SY}$; o inversamente como SY y directamente como SP × QT; pero SP × QT es como el área descrita en el tiempo dado, esto es (por la Proposición XIV) como la raíz cuadrada del *latus rectum*. Q.E.D.

COROLARIO I. Los *latera recta* principales varían como los cuadrados de las perpendiculares y los cuadrados de las velocidades.

COROLARIO II. Las velocidades de los cuerpos, en sus distancias mayores y menores con respecto al foco común, son inversamente como las distancias y directamente como la raíz cuadrada de los principales *latera recta*. Porque esas perpendiculares son ahora las distancias.

COROLARIO III. Y, en consecuencia, la velocidad en una sección cónica, a su distancia máxima o mínima del foco, es a la velocidad en un círculo, a la misma distancia del centro, como la raíz cuadrada del *latus rectum* principal al doble de esa distancia.

COROLARIO IV. Las velocidades de los cuerpos que giran en elipses son, en sus distancias medias respecto del foco común, las mismas que las de cuerpos girando en círculos a las mismas distancias, esto es (por el Corolario IV, Proposición IV), inversamente como la raíz cuadrada de las distancias. Porque las perpendiculares son ahora los semiejes menores, y éstos son como medias proporcionales entre las distancias y los *latera recta*. Multiplíquese la inversa de esta razón por la raíz cuadrada de la razón directa de los *latera recta* y tendremos la raíz cuadrada de la razón inversa de las distancias.

COROLARIO V. En la misma figura, o incluso en figuras diferentes con idénticos *latera recta* principales, la velocidad de un cuerpo es inversamente como la perpendicular abatida desde el foco sobre la tangente.

COROLARIO VI. En una parábola, la velocidad es inversamente como la raíz cuadrada de la razón de la distancia del cuerpo desde el foco de la figura; es más variable en la elipse, y menos en la hipérbola, que con arreglo a esta razón. Pues (por el Corolario II, Lema XIV) la perpendicular trazada desde el foco sobre la tangente de una parábola es como la raíz cuadrada de la razón de la distancia. En la hipérbola la perpendicular es menos variable; en la elipse más.

COROLARIO VII. En una parábola la velocidad de un cuerpo a cualquier distancia del foco es a la velocidad de un cuerpo que

gira en círculo a la misma distancia del centro como la raíz cuadrada de la razón del número 2 a 1; en la elipse es menor, y en la hipérbola mayor que con arreglo a esta razón. Pues (por el Corolario II de esta Proposición) la velocidad en el vértice de una parábola está en esta razón, y (por el Corolario VI de esta Proposición y la Proposición IV) la misma proporción se mantiene para todas las distancias. Y, en consecuencia, también en una parábola la velocidad es en todas partes igual a la velocidad de un cuerpo que gire en círculo a mitad de la distancia; en la elipse es menor y en la hipérbola mayor.

COROLARIO VIII. La velocidad de un cuerpo que gira en cualquier sección cónica es a la velocidad de un cuerpo que gira en círculo, a una distancia mitad del principal *latus rectum* de la sección, como esa distancia es a la perpendicular trazada desde el foco sobre la tangente de la sección. Esto consta por el Corolario V.

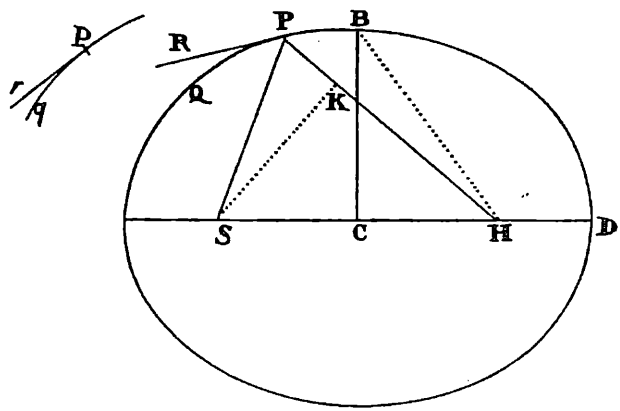
COROLARIO IX. Así pues, como (por el Corolario VI, Proposición IV) la velocidad de un cuerpo que gira en este círculo es a la velocidad de otro cuerpo que gira en cualquier otro círculo inversamente como la raíz cuadrada de la razón de las distancias; del mismo modo, la velocidad de un cuerpo que gira en una sección cónica será a la velocidad de un cuerpo que gire en círculo a la misma distancia como la media proporcional entre esa distancia común y la mitad del principal *latus rectum* de la sección, a la perpendicular trazada desde el foco común sobre la tangente de la sección.

PROPOSICIÓN XVII. PROBLEMA IX

Suponiendo que la fuerza centrípeta sea inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias de los lugares al centro, y que el valor absoluto de esa fuerza es conocido, determínese la línea descrita por un cuerpo que sale desde un lugar dado con una velocidad dada en la dirección de una línea recta dada.

Supongamos que la fuerza centrípeta tendente al punto S es tal que hará al cuerpo *p* girar en cualquier órbita dada *pq*; y supongamos que es conocida la velocidad de este cuerpo en el lugar *p*. Supongamos entonces que el cuerpo P es soltado desde el lugar P con una velocidad dada en la dirección de la línea PR.

ero que en virtud de una fuerza centrípeta es desviado ımediatamente de esa línea hacia la sección cónica PQ. De este ıodo, la recta PR la tocará en P. Supóngase de modo análogo ue la recta *pr* toca la órbita *pq* en *p*; y si desde S suponemos



ɔerpendiculares sobre esas tangentes, el *latus rectum* principal de a sección cónica (por el Corolario I, Proposición XVI) estará ɔon respecto al *latus rectum* principal de esa órbita en una razón ɔompuesta por el cuadrado de la razón de las perpendiculares y ɔl cuadrado de la razón de las velocidades; y se encuentra por ɔso mismo dado. Sea L este *latus rectum;* el foco S de la sección ɔónica está también dado. Sea el ángulo RPH el suplementario ɔel ángulo RPS, y la línea PH donde se encuentra situado el ɔtro foco H resulta dada por posición. Abátase SK perpendicular sobre PH, y constrúyase el semieje conjugado BC; una vez ɔecho esto, tendremos

$$SP^2 - 2PH \times PK + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4(BH^2 - BC^2) =$$
$$= (SP + PH)^2 - L(SP + PH) = SP^2 + 2PS \times PH + PH^2 - L(SP + PH).$$

Añádase a ambos lados

$$2PK \times PH - SP^2 - PH^2 + L(SP + PH),$$

y tendremos

$$L(SP + PH) = 2PS \times PH + 2PK \times PH,$$

o bien

$$(SP+PH):PH=2(SP+KP):L.$$

Así pues, PH está dada tanto en longitud como en posición. Esto es, si la velocidad del cuerpo en P es tal que el *latus rectum* L es menor a 2SP+2KP, PH yacerá al mismo lado de la tangente PR que la línea SP; y, en consecuencia, la figura será una elipse, dada también por los focos S y H y el eje principal SP+PH. Pero si la velocidad del cuerpo es tan grande que el *latus rectum* L se hace igual a 2SP+2KP, la longitud PH será infinita; y, por lo mismo, la figura será una parábola, que tiene su eje SH paralelo a la línea PK, y que está por tanto dada. Pero si el cuerpo parte de su lugar P con una velocidad todavía mayor, la longitud PH debe tomarse al otro lado de la tangente; y como la tangente pasa así entre los focos, la figura será una hipérbola cuyo eje principal es igual a la diferencia de las líneas SP y PH, estando por eso mismo dado. Pues si en esos casos el cuerpo gira en una sección cónica así hallada, las Proposiciones XI, XII y XIII demuestran que la fuerza centrípeta será inversamente como el cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de fuerza S; y, en consecuencia, hemos determinado correctamente la línea PQ que sería descrita con semejante fuerza por un cuerpo soltado desde un lugar dado P con una velocidad dada y en la dirección de la recta PR dada por posición. Q.E.F.

COROLARIO I. Por consiguiente, si en cualquier sección cónica están dados el vértice principal D, el *latus rectum* L y el foco S, estará dado también el otro foco H tomando DH a DS como el *latus rectum* a la diferencia entre el *latus rectum* y 4DS. Pues la proporción

$$SP+PH:PH=2SP+2KP:L$$

se convierte en el caso de este Corolario en

$$DS+DH:DH=4DS:L$$

y

$$DS:DH=4DS-L:L.$$

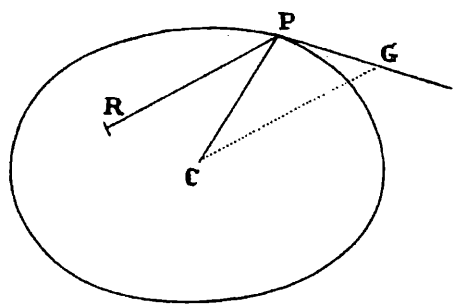
COROLARIO II. De ahí que pueda hallarse de modo sencillo la órbita de un cuerpo si está dada su velocidad en el vértice principal D; basta tomar su *latus rectum* al doble de la distancia DS, como el cuadrado de la razón de esta velocidad dada a la velocidad de un cuerpo que gira en círculo a la distancia DS (por el Corolario III, Proposición XVI), y luego

omar DH a DS como el *latus rectum* a la diferencia entre el *latus rectum* y 4DS.

COROLARIO III. Así también si un cuerpo se mueve en cualquier sección cónica, y es arrancado de su órbita por cualquier impulso, podremos descubir la órbita en la que proseguirá su curso después. Pues componiendo el movimiento propio del cuerpo con el movimiento que generaría por sí solo el impulso tendremos el movimiento con el que partirá el cuerpo desde el lugar dado del impulso en la dirección de una línea recta dada en posición.

COROLARIO IV. Y si ese cuerpo es continuamente perturbado por la acción de alguna fuerza exterior, podemos conocer aproximativamente su curso reuniendo los cambios que esa fuerza introduce en algunos puntos y calculando los cambios continuos que sufrirá en los lugares intermedios, partiendo de la analogía que aparece en la progresión de las series.

ESCOLIO



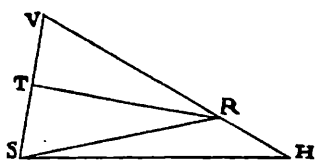
Si un cuerpo P, mediante una fuerza centrípeta tendente a cualquier punto dado R, se mueve en el perímetro de cualquier sección cónica dada cuyo centro es C, y se pide la ley de la fuerza centrípeta, trácese CG paralela al radio RP y encontrando a la tangente PG de la órbita en G; la fuerza requerida (por el Corolario I y el Escolio de la Proposición X, y el Corolario III de la Proposición VII) será como $\frac{CG^3}{RP^2}$.

SECCION IV

Sobre la determinación de órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas a partir del foco dado.

LEMA XV

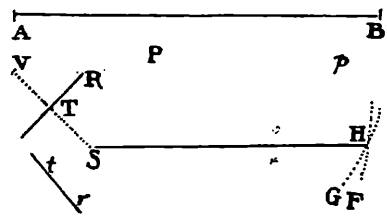
Si desde los dos focos S *y* H *de cualquier elipse o hipérbola trazamos hasta cualquier tercer punto* V *las rectas* SV *y* HV, *de las cuales* HV *es igual al eje principal de la figura, esto es, al eje donde están situados los focos, y la otra,* SV, *es bisectada en* T *por la perpendicular* TR *abatida sobre ella, esa perpendicular* TR *tocará en alguna parte la sección cónica, y, a la inversa, si la toca* HV *será igual al eje principal de la figura.*



Pues hagamos que la perpendicular TR corte la línea recta HV prolongada, si fuera necesario, en R; y únase SR. Como TS y TV son iguales, las rectas SR y VR, así como los ángulos TRS y TRV serán iguales también. Por lo cual el punto R estará en la sección cónica, y la perpendicular TR tocará a la misma; y al contrario. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XVIII. PROBLEMA X

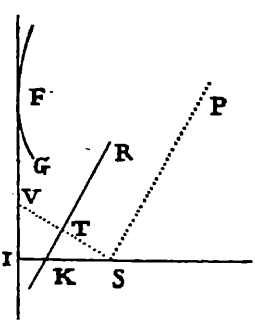
Desde un foco y un eje principal dados, describanse curvas elípticas e hiperbólicas que deban pasar a través de puntos dados y toquen líneas rectas dadas por posición.



Sea S el foco común de las figuras; AB la longitud del eje principal de cualquier cónica: P un punto por el cual debiera pasar la cónica; y TR una recta que debería tocar. Alrededor del centro P, con el radio AB-SP si la órbita es una elipse, o AB+SP si la órbita es una hipérbola, descríbase el círculo HG. Abátase sobre la tangente TR la perpendicular ST, y prolónguese la misma hasta V, de tal manera que TV pueda ser igual a ST; y alrededor de V como centro con el intervalo AB descríbase el círculo FH. De este modo, ya sea que sean dados dos puntos P y *p*, o dos tangentes TR y *tr*, o un punto *P* y una tangente TR, habremos de describir dos círculos. Sea H su intersección común, y descríbase la cónica desde los focos S y H con el eje dado. Mantengo que está hecho. Pues (como PH+SP en la elipse y PH−SP en la hipérbola son iguales al eje) la cónica descrita pasará por el punto P y (por el Lema precedente) tocará la recta TR. Y por el mismo argumento o bien pasará a través de los puntos P y *p*, o tocará las dos rectas TR y *tr*. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XIX. PROBLEMA XI

Descríbase alrededor de un foco dado una parábola que pasará a través de puntos dados y tocará líneas rectas dadas por posición.



Sea S el foco, P un punto y TR una tangente de la curva a describir. Alrededor de P como centro, con el radio PS, descríbase el círculo FG. Desde el foco trácese ST perpendicular a la tangente y prolónguese la misma hasta V, de manera que TV pueda ser igual a ST.

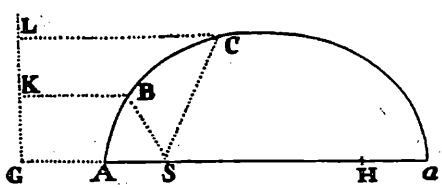
Del mismo modo puede describirse otro círculo *fg*, si se da otro punto *p*; u otro punto *v* debe hallarse si es dada otra tangente *tr*; trácese entonces la recta IF,

que deberá tocar los círculos FG y *fg* si son dados dos puntos P y *p*; o pasar a través de dos puntos V y *v* si son dadas dos tangentes Tr y *tr*; o tocar el círculo FG y pasar a través del punto V si están dados el punto P y la tangente TR. Tírese sobre FI la perpendicular SI, bisectada en K; y con el eje SK y el vértice principal K descríbase una parábola. Mantengo que está hecho. Pues esta parábola (como SK es igual a IK y SP a FP) pasará a través del punto P; y (por el Corolario III, Lema XIV) como ST es igual a TV, y el ángulo STR es recto, tocará a la línea recta TR. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XX. PROBLEMA XII

Alrededor de un foco dado describir cualquier cónica dada que deba pasar a través de puntos dados y tocar líneas rectas dadas por posición.

CASO 1. Lo requerido es describir una cónica ABC alrededor del foco S, pasando a través de dos puntos, B y C. Puesto que la cónica está dada en especie, estará dada la razón del eje principal a la distancia de los focos. En esa razón tómese KB a BS y LC a CS. Alrededor de los centros B y C, con los intervalos BK y CL, descríbanse dos círculos; y sobre la recta KL, que los toca en K y L, tirar la perpendicular SG que se corta igualmente en A y *a*, de manera que GA pueda ser a AS, y G*a* a *a*S, como KB a BS; y con el eje A*a* y los vértices A y *a* descríbase una cónica. Afirmo que está hecho. Pues si H es el otro foco de la figura descrita, teniendo en cuenta que GA : AS = G*a* : *a*S, tendremos:



$$G\alpha - GA : \alpha S - AS = GA : AS,$$

o

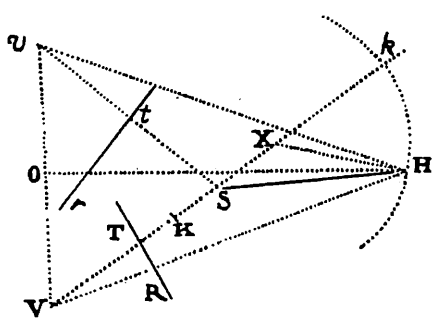
$$A\alpha : SH = GA : AS,$$

con lo cual GA y AS están en la razón que el eje principal de la figura a describir guarda a la distancia de sus focos; y, por consiguiente, la figura descrita es de la misma especie que la

figura a describir. Y como KB a BS y LC a CS están en la misma proporción, esta figura pasará a través de los puntos B y C, como es manifiesto a partir de las secciones cónicas.

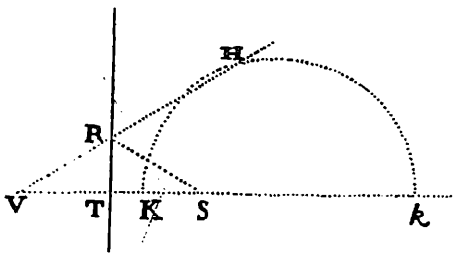
CASO 2. Se requiere describir alrededor del foco S una cónica que en alguna parte toque dos líneas rectas TR y *tr*.

Abátase desde el foco sobre esas tangentes las perpendiculares ST y S*t*, prolongándolas hasta V y *v*, de manera que TV y *tv* puedan ser iguales a TS y *t*S. Biséctese V*v* en O y levántese la perpendicular indefinida OH, y córtese la recta VS prolongada infinitamente en K y *k*, de manera que VK sea a KS, y V*k* a *k*S como es el eje principal de la cónica por describir a la distancia de sus focos. Sobre ese diámetro descríbase un círculo que corte a OH en H, y con los focos S y H y el eje principal igual a VH descríbase una cónica. Afirmo que está hecho. Pues bisectando K*k* en X y uniendo HX, HS, HV, H*v*, como VK es a KS como V*k* es a *k*S; y, por composición, como VK+V*k* a KS+*k*S; y por substracción como V*k*−VK a *k*S−KS, esto es, como 2VX a 2KX, y 2KX a 2SX, y por consiguiente como VX a HX y HX a SX, los triángulos VXH y HXS serán semejantes; por consiguiente, VH será a SH como VX a XH; y, en consecuencia, como VK a KS. Por lo cual VH, el eje principal de la cónica descrita, guarda la misma proporción con SH, la distancia entre los focos, que el eje principal de la cónica a describir guarda con la distancia de sus focos; y es por eso de la misma especie. Y viendo que VH y *v*H son iguales al eje principal, y que VS y *v*S son bisectadas perpendicularmente por las rectas TR y *tr*, es evidente (por el Lema XV) que esas rectas tocan a la cónica descrita. Q.E.F.



CASO 3. Se requiere describir alrededor del foco S una cónica que toque a la recta TR en un punto dado R. Tírese sobre la recta TR la perpendicular ST y prolónguese hasta V, de manera que TV pueda ser igual a ST; únase VR y córtese la recta ST prolongada indefinidamente en K y *k*, de manera que VK pueda ser a SK, y V*k* a S*k*, como el eje principal de la elipse a describir a la distancia de sus focos; y describiendo un círculo

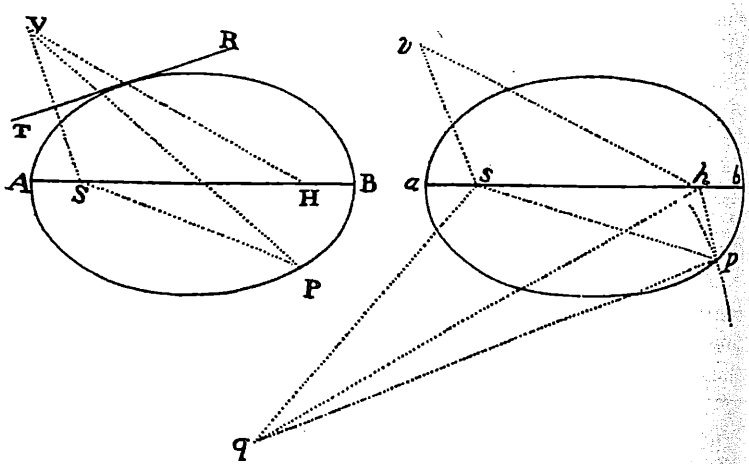
sobre el diámetro K*k*, córtese la recta VR prolongada en H; descríbase entonces una cónica con los focos S y H y el eje principal igual a VH. Afirmo que está hecho.



Porque VH : SH = VK : SK y, en consecuencia, es como el eje principal de la cónica que ha de ser descrita a la distancia de sus focos (según resulta de lo que hemos demostrado ya para el Caso 2); y, por tanto, la cónica descrita es de la misma especie que aquella a describir; pero que la recta TR, por la cual es bisectado el ángulo VRS, toca a la cónica en el punto R es manifiesto a partir de las propiedades de las secciones cónicas. Q.E.F.

CASO 4. Se requiere describir alrededor del foco S una cónica APB que toque la recta TR y atraviese cualquier punto dado P sin la tangente, y sea semejante a la figura *apb*, descrita con el eje principal *ab* y los focos *s* y *h*.

Tírese sobre la tangente TR la perpendicular ST, prolongada hasta V, de manera que TV pueda ser igual a ST; y haciendo los ángulos *hsq* y *shq* iguales a los ángulos VSP y SVP, alrededor de *q* como centro, y con un radio que debe ser a *ab* como SP a VS,



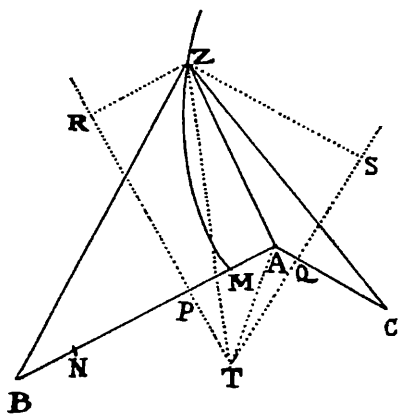
descríbase un círculo que corte a la figura *apb* en *p*. Unase *sp* y trácese SH de manera que pueda ser a *sh* como SP es a *sp*, pudiendo hacer el ángulo PSH igual al ángulo *psh*, y el ángulo VSH igual al ángulo *psq*. Entonces, con los focos S y H y el eje principal AB, igual a la distancia VH, descríbase una sección cónica. Afirmo que está hecho; porque si *sv* es trazado de manera que sea a *sp* como *sh* es a *sq*, haciendo el ángulo *vsp* igual al ángulo *hsq*, y el ángulo *vsh* igual al ángulo *psq*, los triángulos *svh* y *spq* serán semejantes y, por tanto, *vh* será a *pq* como *sh* a *sq*; esto es (debido a los triángulos semejantes VSP y *hsq*), como VS es a SP, o como *ab* a *pq*. Con lo cual *vh* y *ab* son iguales. Pero debido a los triángulos semejantes VSH y *vsh*, VH es a SH como *vh* es a *sh*; esto es, el eje de la sección cónica ahora descrita es a la distancia de sus focos como el eje *ab* es a la distancia de los focos *sh*; y, por consiguiente, la figura ahora descrita es semejante a la figura *apb*. Pero como el triángulo PSH es semejante al triángulo *psh*, esta figura pasa a través del punto P; y como VH es igual a su eje, y VS es bisectada perpendicularmente por la recta TR, la figura mencionada toca a la recta TR. Q.E.F.

LEMA XVI

Desde tres puntos dados trazar hasta un cuarto punto no dado tres líneas rectas cuya diferencia sea o bien dada o bien nula.

CASO 1. Sean A, B y C los puntos dados, y Z el cuarto punto que debemos hallar; debido a la diferencia dada de las líneas AZ y BZ, el lugar del punto Z será una hipérbola cuyos focos son A y B, y cuyo eje principal es la diferencia dada.

Sea ese eje MN. Tomando PM a MA como MN a AB, levántese PR perpendicular a AB y tírese ZR perpendicular a PR; entonces, por la naturaleza de la hipérbola, ZR : AZ = MN : AB. Y por el mismo argumento, el lugar del punto Z será otra hipérbola, cuyos focos son A y C, y cuyo eje principal es la diferencia entre AZ y CZ; y puede levantarse una perpendicular QS sobre AC, a la cual si desde cualquier punto Z de esa hipérbola se abate una perpendicular ZS, tendremos que ZS será a AZ como la diferencia entre AZ y CZ es a AC. Por lo cual están dadas las razones de ZR y ZS a AZ y, por tanto, la razón de ZR a



ZS; y, en consecuencia, si las rectas RP y SQ se encuentran en T, y se trazan TZ y TA, la figura estará dada en especie, y la recta TZ, donde está situado el punto Z, estará dada en posición. También estarán dados la recta TA y el ángulo ATZ; y como están dadas las razones de AZ y TZ a ZS, su razón entre sí está dada también; por lo cual estará dado de modo análogo el triángulo ATZ, cuyo vértice es el punto Z. Q.E.I.

CASO 2. Si dos de las tres líneas - por ejemplo, AZ y BZ– son iguales, trácese la recta TZ tal que bisecte la recta AB; encuéntrese entonces el triángulo ATZ como más arriba.

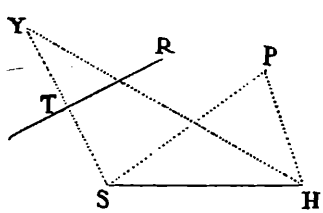
CASO 3. Si las tres son iguales, el punto Z estará situado en el centro de un círculo que pasa a través de los puntos A, B, C. Q.E.I.

Este problemático Lema se resuelve de modo análogo en el *Libro de Tacciones* de *Apolonio* restaurado por *Vieta.*

PROPOSICIÓN XXI. PROBLEMA XIII

Describir alrededor de un foco dado una cónica que pase a través de puntos dados y toque líneas rectas dadas por posición.

Sea S el foco, estando dados el punto P y la tangente TR, y supóngase que ha de hallarse el otro foco H. Tírese sobre la tangente la perpendicular ST, prolongándola hasta Y, de manera que TY pueda ser igual a ST, y YH será igual al eje principal. Unanse SP y HP, y SP será la diferencia entre HP y el eje principal. De este modo, si se dan más tangentes o más puntos P, siempre determinaremos tantas



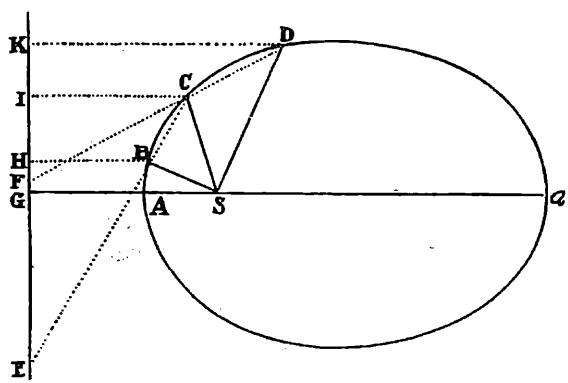
líneas YH, o PH, trazadas desde los mencionados puntos Y o P al foco H, que o bien será igual a los ejes o diferirá de ellos por longitudes SP dadas; y que, por tanto, serán iguales entre sí o guardarán diferencias dadas; de lo cual se sigue (por el Lema precedente) que está dado el otro foco H. Pero teniendo los focos y la longitud del eje (que es o bien YH o, si la cónica es una elipse PH+SP, o PH−SP si es una hipérbola) está dada la cónica. Q.E.I.

ESCOLIO

Cuando la cónica es una hipérbola no incluyo su hipérbola conjugada bajo el nombre de esta cónica. Pues un cuerpo que prosigue con un movimiento continuo no puede transitar de una hipérbola a su conjugada.

El caso en que se dan tres puntos se resuelve más expeditamente así. Sean B, C y D los puntos dados. Unanse BC y CD, prolongándolos hasta E y F, de manera que EB pueda ser a EC como SB es a SC; y FC a FD como SC a SD. Sobre EF tírense las perpendiculares SG y BH, y en GS prolongada indefinidamente tómense GA a AS y G*a* a *a*S, como HB a BS.

A será entonces el vértice y A*a* el eje principal de la cónica, que -según sea GA mayor, igual o menor que AS- será una elipse, una parábola o una hipérbola; en el primer caso el punto *a* cae al mismo lado de la línea GF que el punto A; en el



segundo caso se aleja a una distancia infinita; en el tercero cae al otro lado de la línea GF. Porque si se tiran sobre GF las perpendiculares CI y DK, IC será a HB como EC a EB; esto es, como SC a SB; y por permuta IC a SC como HB a SB, o como GA a SA. Y, con una argumentación similar, podemos probar que KD es a SD en la misma proporción. Por lo cual los puntos B, C y D yacen en una sección cónica descrita alrededor del foco S, de tal manera que todas las rectas trazadas desde el foco S hasta los diversos puntos de la sección, y las perpendiculares tiradas desde los mismos puntos sobre la recta GF se encuentran en esa proporción dada.

El excelente geómetra, M. *de la Hire*, ha resuelto este problema de modo bastante similar en sus *Cónicas*, Proposición XXV, Libro VIII.

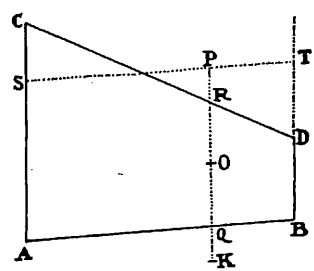
SECCION V

Cómo hallar las órbitas cuando no se da ningún foco.

LEMA XVII

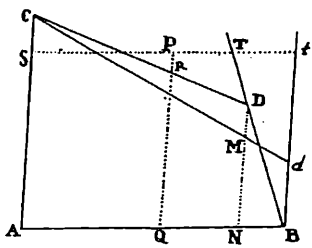
Si desde cualquier punto P *de una sección cónica dada se trazan, hasta los cuatro lados prolongados* AB, CD, AC *y* DB *de cualquier trapecio* ABCD *inscrito en esa sección, otras tantas rectas* PQ, PR, PS *y* PT *en ángulos dados, cada línea a cada lado, el rectángulo* PQ × PR *de las de los lados opuestos* AB *y* CD *guardará con el rectángulo* PS × PT *de las de los otros dos lados opuestos* AC *y* BD *una razón dada.*

CASO 1. Supongamos primero que las líneas trazadas hasta un par de lados opuestos son paralelas a cualquiera de los otros lados; como PQ y PR al lado AC, y PS y PT al lado AB. Y, además, que un par de los lados opuestos, como AC y BD, son paralelos entre sí; entonces la recta que bisecta esos lados paralelos será uno de los diámetros de la sección cónica y bisectará igualmente a RQ. Sea O el punto donde RQ es bisectada, y PO será una ordenada a ese diámetro. Prolónguese PO hasta K, de manera que OK pueda ser igual a PO, y OK será una ordenada sobre el otro lado de ese diámetro. Puesto que los puntos A, B, P y K están situados en la sección cónica, y PK corta AB en un ángulo dado, el rectángulo PQ × QK (por las Proposiciones XVII, XIX, XXI y



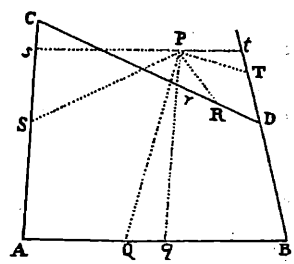
XXIII, Libro III, *Cónicas* de *Apolonio*) guardará con el rectángulo AQ × QB una razón dada. Pero QK y PR son iguales, siendo como son las diferencias de las líneas iguales OK, OP y OQ, OR; por lo cual son iguales los rectángulos PQ × QK y PQ × PR; y, en consecuencia, el rectángulo PQ × PR está con el rectángulo AQ × QB, esto es, con el rectángulo PS × PT, es una razón dada. Q.E.D.

CASO 2. Supongamos que los lados opuestos AC y BD del trapecio no son paralelos. Trácese B*d* paralela a AC, tocando la recta ST en *t* y la sección cónica en *d*. Unase C*d* cortando PQ en *r*, y trácese DM paralela a PQ, cortando a C*d* en M y a AB en N. Entonces (debido a los triángulos semejantes BT*t* y DBN) B*t* o PQ:T*t* = DN:NB. Y así R*r*:AQ o PS = DM:AN.



Por tanto, multiplicando los antecedentes por los antecedentes y los consecuentes por los consecuentes, tal como el rectángulo PQ × R*r* es al rectángulo PS × T*t*, así será el rectángulo DN × DM al rectángulo NA × NB; y (por el Caso 1), así es el rectángulo PQ × P*r* al rectángulo PS × P*t* y, por división, así es el rectángulo PQ × PR al rectángulo PS × PT. Q.E.D.

CASO 3. Supongamos, por último, que las cuatro líneas PQ, PR, PS y PT no son paralelas a los lados AC y AB, sino inclinadas de cualquier modo hacia ellos.

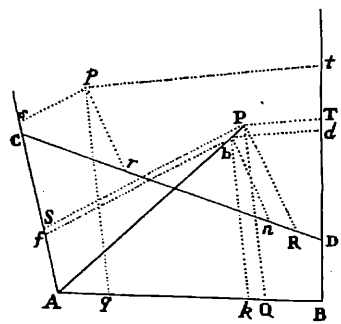


En su lugar trácense P*q* y P*r*, paralelas a AC: así como P*s* y P*t* paralelas a AB: puesto que los ángulos de los triángulos PQ*q*, PR*r*, PS*s* y PT*t* están dados, las razones de PQ a P*q*, PR a P*r*, PS a P*s*, PT a P*t* estarán dadas también; y, en consecuencia, las razones compuestas PQ × PR a P*q* × P*r* y PS × PT a P*s* × P*t* están dadas. Pero a partir de lo antes demostrado, está dada la razón de P*q* × P*r* a P*s* × P*t*; y, por tanto, también la razón de PQ × PR a PS × PT. Q.E.D.

LEMA XVIII

Suponiendo las mismas cosas, si el rectángulo PQ × PR *de las líneas trazadas a los lados opuestos del trapecio guarda con el rectángulo* PS × PT *de las trazadas a los otros dos lados una razón dada, el punto* P *desde donde se trazan esas líneas estará situado en una sección cónica descrita en torno al trapecio.*

Concíbase una sección cónica a describir pasando por los puntos A, B, C y D y por cualquiera de los infinitos puntos P, como, por ejemplo, *p*. Afirmo que el punto P estará siempre situado en esta sección. Si se niega, únase AP cortando a esta sección cónica en algún otro lugar distinto de P si es posible, como por ejemplo en *b*. Por consiguiente, si desde esos puntos *p* y *b*, en sus ángulos dados con los lados del trapecio, trazamos las rectas *pq*, *pr*, *ps*, *pt* y *bk*, *bn*, *bf*, *bd* tendremos (por el Lema XVII) que como *bk* × *bn* es a *bf* × *bd*, así es *pq* × *pr* a *ps* × *pt*; y así (por suposición) PQ × PR a PS × PT.



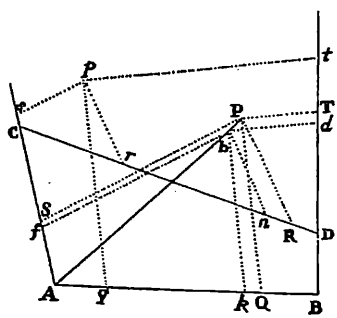
Y debido a los trapecios semejantes *bk*A*f* y PQAS, como *bk* a *bf* así PQ a PS. Con lo cual dividiendo los términos de la proposición precedente por los correspondientes términos de ésta tendremos *bn* a *bd* como PR a PT. En consecuencia, los trapecios equiangulares D*nbd* y DRPT son semejantes y sus diagonales D*b* y DP coinciden. Por lo cual *b* cae en la intersección de las rectas AP y DP, coincidiendo por tanto con el punto P. En consecuencia, el punto P, tómese donde se tome, cae dentro de la sección cónica asignada. Q.E.D.

COROLARIO. De ahí que si tres rectas PQ, PR y PS se trazan desde un punto común P hasta otras tantas rectas dadas en posición AB, CD y AC, una a una, en tantos ángulos como están respectivamente dados, y el rectángulo PQ × PR bajo dos cualesquiera de las líneas trazadas guarda con el cuadrado de la tercera, PS una razón dada, el punto P desde el que se han trazado las rectas estará situado en una sección cónica que toca las líneas AB y CD en A y C; y al contrario. Pues permaneciendo idéntica la posición de las tres rectas AB, CD y AC hágase que la línea BD se aproxime y coincida con AC; luego hágase

que la línea PT coincida de modo análogo con PS; y el rectángulo PS × PT se convertirá en PS^2, y las rectas AB y CD que antes cortaban la curva en los puntos A y B, C y D ya no cortan sino que tocan tan sólo la curva en esos puntos coincidentes.

ESCOLIO

En este Lema el nombre de la sección cónica debe entenderse en sentido amplio, abarcando tanto la sección rectilínea a través del vértice del cono como la circular paralela a la base. Porque si el punto *p* resulta encontrarse en una recta, por la cual son unidos los puntos A y D, o C y B, la sección cónica se tornará en dos rectas, una de las cuales es la recta sobre la que cae el punto *p*, y la otra una recta que une los otros dos de los cuatro puntos.



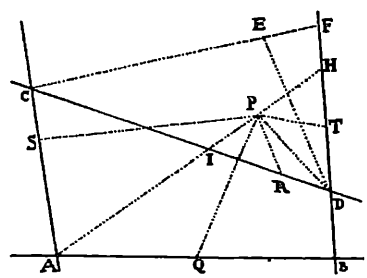
Si los dos ángulos opuestos del trapecio son, sumados, iguales a dos rectos, y si las cuatro líneas PQ, PR, PS y PT son trazadas hasta sus lados en ángulos rectos, o en cualesquiera otros ángulos iguales, y el rectángulo PQ × PR bajo dos de las líneas trazadas PQ y PR es igual al rectángulo PS × PT bajo las otras dos PS y PT, la sección cónica se convertirá en un círculo. Y lo mismo sucederá si las cuatro líneas son trazadas en cualquier ángulo, y el rectángulo PQ × PR, bajo un par de las líneas trazadas, es al rectángulo PS × PT bajo el otro par como el rectángulo bajo los senos de los ángulos S y T, en que están trazadas las dos últimas líneas PS y PT, al rectángulo bajo los senos de los ángulos Q y R, en que están trazadas las dos primeras PQ y PR. En todos los otros casos el lugar del punto P será una de las tres figuras que caen frecuentemente bajo el nombre de las secciones cónicas. Pero podemos sustituir el trapecio ABCD por una figura cuadrilateral cuyos dos lados opuestos se cruzan entre sí como diagonales. Y uno o dos de los cuatro puntos A, B, C y D puede suponerse desplazado a una distancia infinita, con lo cual los lados de la figura que convergen hacia esos puntos se harán paralelos; y en

este caso la sección cónica pasará a través de los otros puntos, y proseguirá hasta lo infinito como las paralelas.

LEMA XIX

Encontrar un punto P *desde el cual si cuatro líneas rectas* PQ, PR, PS *y* PT *son trazadas hasta otras tantas rectas* AB, CD, AC *y* BD *dadas por posición, cada una a cada una, en ángulos dados, el rectángulo* PQ × PR *bajo dos cualesquiera de las líneas trazadas mantendrá con el rectángulo* PS × PT, *bajo las otras dos, una razón dada.*

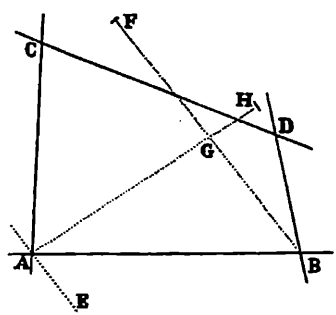
Supongamos las líneas AB y CD, hasta las cuales se trazan las dos rectas PQ y PR, que contienen uno de los rectángulos, encontrándose con otras dos líneas, dadas por posición, en los puntos A, B, C y D. Desde uno de ellos, digamos A, trácese cualquier recta AH, donde se encontraría el punto P. Hágase que corte las líneas opuestas BD y CD en H e I; y como todos los ángulos de la figura están dados, la razón de PQ a PA y de PA a PS y, por tanto, de PQ a PS estará dada también.



Esta razón, tomada como un divisor de la razón dada de PQ × PR a PS × PT, proporciona la razón de PR a PT; y multiplicando las razones dadas de PI a PR, y de PT a PH se obtendrá la razón de PI a PH y, en consecuencia, el punto P. Q.E.I.

COROLARIO I. De ahí que también pueda trazarse una tangente a cualquier punto D del lugar de todos los puntos P. Pues la cuerda PD, cuando se encuentran P y D, esto es, cuando AH es trazada a través del punto D, se convierte en una tangente. En cuyo caso la razón última de las líneas evanescentes IP y PH se encontrará como antes. Por lo mismo, trácese CF paralela a AD, encontrándose con BD en F, y córtese en E en la misma razón última; DE será entonces la tangente, porque CF y la evanescente IH son paralelas y cortadas de modo semejante en E y P.

COROLARIO II. A partir de ello puede determinarse el lugar de todos los puntos P. Trácese AE a través de cualquiera de los puntos A, B, C y D, digamos que A, tocando el lugar, y a través de cualquier otro punto B, paralela a la tangente, trácese BF encontrando el lugar en F; y hállese el punto F mediante este Lema. Biséctese BF en G, trazando la línea indefinida AG, y ésta será la posición del diámetro del cual son ordenadas BG y FG.



Hágase que AG encuentre el lugar en H, y AH será su diámetro o *latus transversum*, respecto del cual el *latus rectum* será como BG^2 a $AG \times GH$. Si AG no encuentra en ninguna parte el lugar, siendo infinita la línea AH, ese lugar será una parábola; y su *latus rectum* correspondiente al diámetro AG será $\frac{BG^2}{AG}$. Pero si lo encuentra en algún punto, el lugar será una hipérbola cuando los puntos A y H están situados al mismo lado del punto G; y una elipse si el punto G cae entre los puntos A y H; salvo, quizá, si el ángulo AGB es un ángulo recto y al mismo tiempo BG^2 es igual al rectángulo $GA \times GH$, en cuyo caso el lugar será un círculo.

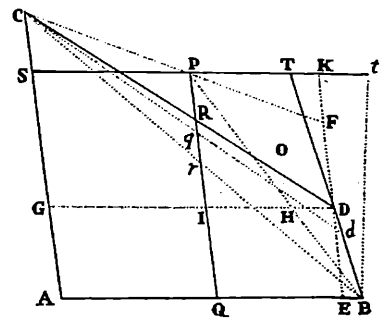
Y de este modo hemos dado en este Corolario una solución para el famoso Problema de los Antiguos sobre las cuatro líneas, iniciado por *Euclides* y continuado por *Apolonio*; y esto no es un cálculo analítico, sino una composición geométrica, como exigían los Antiguos.

LEMA XX

Si dos puntos angulares opuestos A *y* P *de cualquier paralelogramo* ASPQ *tocan cualquier sección cónica en los puntos* A *y* P, *y los lados* AQ *y* AS *de uno de los ángulos, prolongados indefinidamente, encuentran la misma sección cónica en* B *y* C; *y desde los puntos de encuentro* B *y* C *se trazan hasta cualquier quinto punto* D *de la sección cónica dos rectas* BD *y* CD *que encuentran los*

otros dos lados PS *y* PQ *del paralelogramo prolongados indefinidamente en* T *y* R; *las partes* PR *y* PT, *seccionadas de los lados, guardarán siempre entre sí una razón dada. Y a la inversa, si las partes seccionadas se encuentran una respecto de la otra en una razón dada, el lugar del punto* D *será una sección cónica que pasa a través de los cuatro puntos* A, B, C, P.

CASO 1. Unanse BP y CP, y desde el punto D trácense las dos rectas DG y DE, de las cuales la primera (DG) habrá de ser paralela a AB y encontrarse con PB, PQ y CA en I, H y G; y la otra (DE) habrá de ser paralela a AC, encontrándose con PC, PS y AB en F, K y E; y (por el Lema XVII) el rectángulo DE × DF guardará con el rectángulo DG × DH una razón dada. Pero PQ es a DE (o IQ) como PB a HB y, en consecuencia, como PT a DH; y por permuta PQ es a PT como DE es a DH. De modo análogo PR es a DF como RC a DC y, por tanto, como (IG o) PS a DG; y por permuta PR es a PS como DF a DG; y componiendo esas razones el rectángulo PQ × PR será al rectángulo PS × PT como el rectángulo DE × DF es al rectángulo DG × DH, guardando por eso mismo una razón dada. Pero PQ y PS están dados y en esa medida la razón de PR a PT está dada. Q.E.D.



CASO 2. Pero si se supone que PR y PT guardan entre sí una razón dada, retrocediendo mediante un razonamiento análogo se seguirá que el rectángulo DE × DF guarda con el rectángulo DG × DH una razón dada; y de este modo el punto D (por el Lema XVIII) se encontrará en una sección cónica que pasa a través de los puntos A, B, C y P, como su lugar. Q.E.D.

COROLARIO I. Por consiguiente, si trazamos BC cortando a PQ en *r*, y en PT tomamos P*t* a P*r* en la misma razón que PT guarda con PR, B*t* tocará a la sección cónica en el punto B. Pues suponiendo que el punto D se funda con el punto B, desvaneciéndose así la cuerda BD, BT se convertirá en una tangente; y CD y BT coincidirán con CB y B*t*.

COROLARIO II. Y, viceversa, si B*t* es una tangente, y las líneas BD y CD se encuentran en cualquier punto D de una

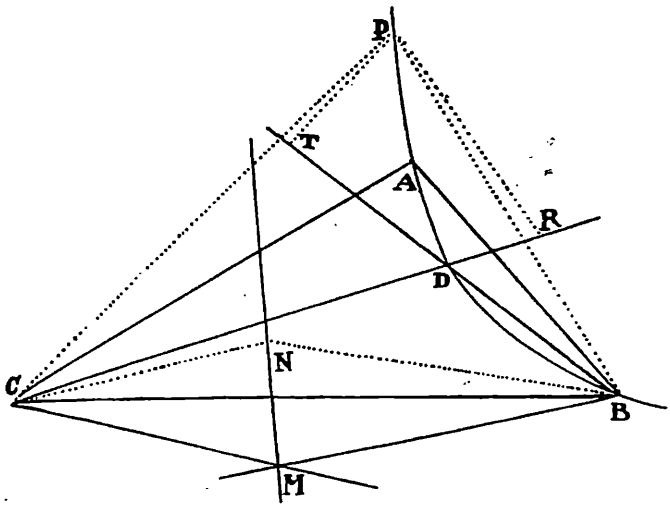
sección cónica, PR será a PT como P*r* a P*t*. Y, al contrario, si PR es a PT como P*r* es a P*t*, BD y CD se encontrarán en algún punto D de una sección cónica.

COROLARIO III. Una sección cónica no puede cortar a otra sección cónica en más de cuatro puntos. Porque si es posible hágase que dos secciones cónicas pasen a través de los cinco puntos A, B, C, P, Q; y hágase que la recta BD las corte en los puntos D y *d*, y que la recta C*d* corte a la recta PQ en *q*. En consecuencia, PR es a PT como P*q* es a PT, con lo cual PR y P*q* son iguales entre sí, cosa contraria a la suposición.

LEMA XXI

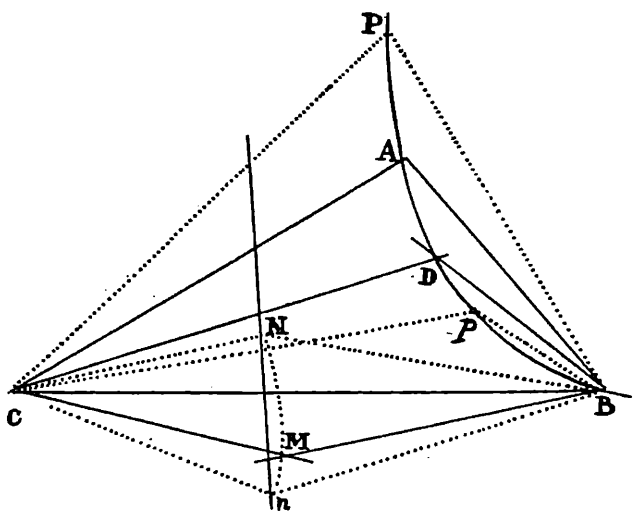
Si dos rectas móviles e indefinidas BM *y* CM, *trazadas a través de puntos dados* B *y* C *como polos, describen por su punto de encuentro una tercera recta* MN *dada por posición; y otras dos rectas indefinidas* BD *y* CD *se trazan formando con las dos primeras en esos puntos dados* B *y* C *ángulos dados* MBD *y* MCD, *afirmo que esas dos rectas* BD *y* CD *describirán por su punto de encuentro* D *una sección cónica que pasa a través de los puntos* B *y* C. *Y, a la inversa, si las rectas* BD *y* CD *describen por su punto de encuentro* D *una sección cónica que pasa a través de los puntos dados* B, C *y* A, *y el ángulo* DBM *es siempre igual al ángulo dado* ABC, *así como el ángulo* DCM *es siempre igual al ángulo dado* ACB, *el punto* M *se encontrará en una línea recta dada por posición, como su lugar.*

Hágase que en la recta MN esté dado un punto N, y cuando el punto móvil M cae sobre el punto inmóvil N hágase que el punto móvil D caiga sobre un punto inmóvil P. Unanse CN, BN, CP y BP, y desde el punto P trácense las rectas PT y PR que encuentran a BD y CD en T y R, haciendo el ángulo BPT igual al ángulo dado BNM, y el ángulo CPR igual al ángulo dado CNM. Con lo cual (por suposición), puesto que son iguales los ángulos MBD y NBP, así como los ángulos MCD y NCP, elimínense los ángulos NBD y NCD, que son comunes y quedarán iguales los ángulos NBM y PBT, NCM y PCR; por consiguiente, los triángulos NBM y PBT son semejantes, como los triángulos NCM y PCR. Por lo cual PT es a NM como PB a



NB; y PR a NM como PC a NC. Pero los puntos B, C, N y P son inmóviles; con lo cual PT y PR guardan una razón dada respecto de NM y, en consecuencia, una razón dada entre sí. Por consiguiente (según el Lema XX) el punto D donde concurren las rectas móviles BT y CR continuamente estará situado en una sección cónica que pasa a través de los puntos B, C y P. Q.E.D.

Y, a la inversa, si el punto móvil D se encuentra en una sección cónica que pasa a través de los puntos dados B, C y A, y

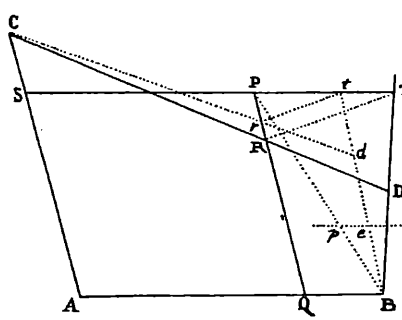


el ángulo DBM es siempre igual al ángulo dado ABC, y el ángulo DCM siempre igual al ángulo dado ACB, y cuando el punto D cae sucesivamente sobre cualesquiera dos puntos inmóviles P y *p* de la sección cónica el punto móvil M cae sucesivamente sobre dos puntos inmóviles *n* y N, a través de esos puntos trácese la recta *n*N; esta línea será el lugar continuo del punto móvil M. Porque, si es posible, sitúese el punto M en cualquier línea curva. En consecuencia, el punto D estará situado en una sección cónica que pasa a través de los cinco puntos B, C, A, *p* y P, cuando el punto M se sitúa continuamente en una línea curva. Pero a partir de lo que se demostró antes, el punto D estará situado también en una sección cónica que pasa a través de los mismos cinco puntos, B, C, A, p, P, cuando el punto M se sitúa continuamente en una línea recta. Por lo que ambas secciones cónias pasarán por los mismos cinco puntos, contraviniendo el Corolario III, Lema XX. Es por eso absurdo suponer que el punto M está situado en una línea curva. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXII. PROBLEMA XIV

Describir una cónica que pase a través de cinco puntos dados.

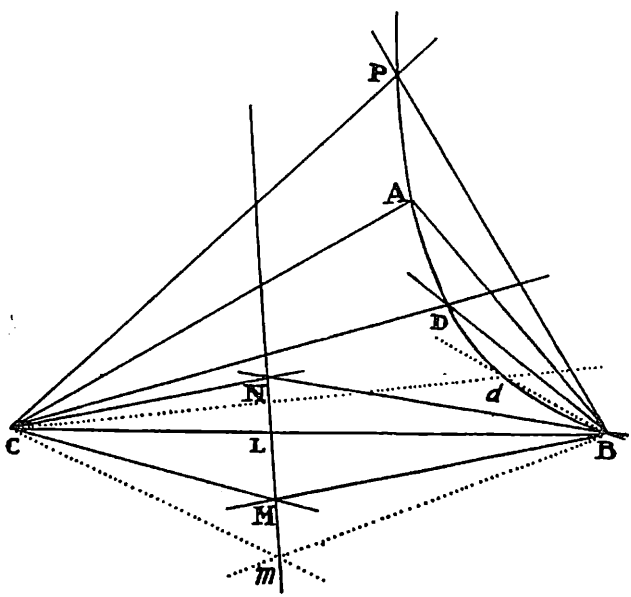
Sean los cinco puntos A, B, C, P, D. Desde cualquiera de ellos, digamos A, a cualesquiera otros dos como B y C, que pueden llamarse los polos, trácense las rectas AB y AC y, paralelas a ellas, las líneas TPS y PRQ a través del cuarto punto P. Trácense entonces desde los dos polos B y C a través del quinto punto D dos líneas indefinidas BDT y CRD, que se encuentran con las líneas últimamente trazadas TPS y PRQ (la primera con la primera y la segunda con la segunda) en T y R. Trácese entonces la recta *tr* paralela a TR, desgajando de las rectas PT y



PR cualesquiera segmentos P*t*, P*r* proporcionales a PT y PR; y si a través de sus extremos *t* y *r*, y los polos B y C, se trazan las rectas B*t* y C*r*, encontrándose en *d*, ese punto *d* estará situado en la cónica requerida. Pues (por el Lema XX) ese punto *d* está situado en una sección cónica que atraviesa los cuatro puntos A, B, C, P; y al desvanecerse las líneas R*r* y T*t*, el punto *d* llega a coincidir con el punto D. Por lo cual la sección cónica pasa a través de los cinco puntos A, B, C, P, D. Q.E.D.

Lo mismo de otro modo

De los puntos dados únanse tres cualesquiera, como A, B y C; y alrededor de dos de ellos B y C como polos, rotando los ángulos ABC y ACB de una magnitud dada, aplicar los lados BA y CA, primero al punto D, luego al punto P, y márquense los puntos M y N, donde se intersectan los otros lados BL y CL en ambos casos. Trácese la recta indefinida MN y hágase que esos ángulos móviles giren alrededor de sus polos B y C, de tal manera que la intersección, que ahora se supone ser *m*, de los



lados BL y CL, o BM y CM, pueda caer siempre en esa recta indefinida MN; y la intersección, que ahora se supone ser *d*, de los lados BA y CA o BD y CD, describirá la cónica requerida, PAD*d*B.

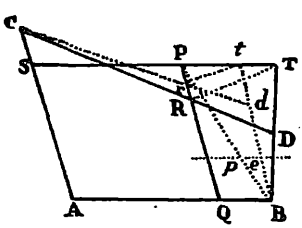
Porque (por el Lema XXI) el punto *d* estará situado en una sección cónica que atraviesa los puntos B y C; y cuando el punto *m* llega a coincidir con los puntos L, M y N, el punto *d* (por construcción) llegará a coincidir con los puntos A, D y P. Con lo cual se describirá una sección cónica que pase a través de los cinco puntos A, B, C, P y D. Q.E.F.

COROLARIO I. Por consiguiente, puede trazarse de modo expedito una recta que será una tangente a la cónica en cualquier punto dado B. Hágase que el punto *d* coincida con el punto B, y la recta B*d* se convertirá en la tangente requerida.

COROLARIO II. Así pueden descubrirse también los centros, diámetros y *latera recta* de las cónicas, como en el Corolario II, Lema XIX.

ESCOLIO

La primera de esas construcciones se hará más sencilla uniendo B y P, y en esa línea, prolongada si es necesario, tomando B*p* a BP como PR es a PT; y a través de *p* trácese la recta indefinida *pe* paralela a SPT, siendo siempre en esa línea *pe* igual a P*r*; y trácense las rectas B*e* y C*r* para que se encuentren en *d*.

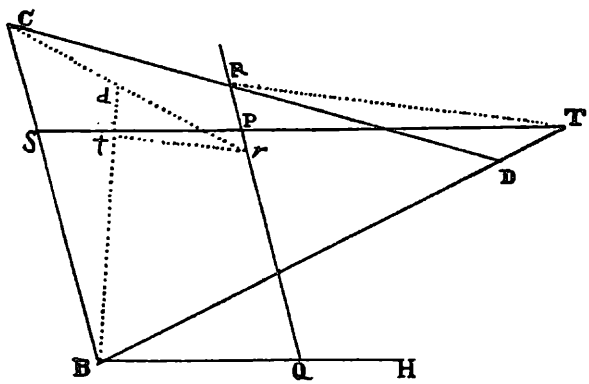


Pues como P*r* a P*t*, PR a PT, *p*B a PB, *pe* a P*t* guardan todas la misma razón, *pe* y P*r* serán siempre iguales. De este modo se encuentran facilísimamente los puntos de la cónica, salvo que se prefiera describir mecánicamente la curva, como en la segunda construcción.

PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA XV

Describir una cónica que atraviese cuatro puntos dados y toque una recta dada.

CASO 1. Supongamos que HB es la tangente dada, B el punto de contacto y C, D y P los otros tres puntos dados. Unase BC y trácese PS paralela a BH, y PQ paralela a BC; complétese el paralelogramo BSPQ. Trácese BD cortando a SP en T, y CD cortando a PQ en R. Por último, trácese cualquier línea *tr*

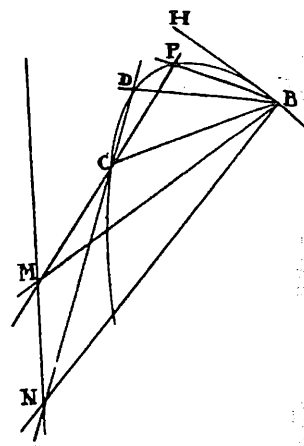


paralela a TR, siendo los segmentos P*r* y P*t* proporcionales a PR y PT respectivamente, y trácense C*r* y B*t*; su punto de intersección *d* (por el Lema XX) caerá siempre en la cónica a describir.

Lo mismo de otro modo

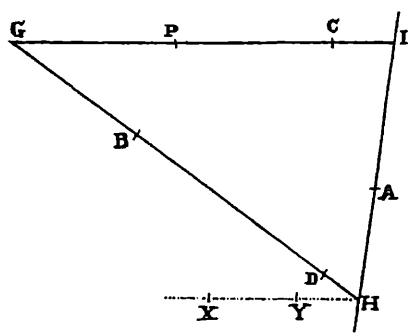
Hágase que el ángulo CBH de una magnitud dada gire alrededor del polo B, así como el radio rectilíneo DC, prolongado en ambos sentidos, alrededor del polo C.

Márquense los puntos M y N, sobre los cuales el lado BC del ángulo corta ese radio cuando BH, su otro lado, encuentra ese mismo radio en los puntos P y D. Trazando entonces la recta indefinida MN, hágase que ese radio CP o CD y el lado BC del ángulo se encuentren continuamente en esta línea; y el punto de encuentro del otro lado BH con el radio perfilará la cónica requerida.



Porque si en la construcción del problema precedente el punto A llega a coincidir con el punto B, coincidirán las líneas CA y CB, y en su última situación la línea AB se convertirá en la tangente BH; por lo cual las construcciones allí expuestas se harán idénticas a las construcciones aquí descritas. En consecuencia, la intersección del lado BH con el radio describirá una sección cónica que pasa por los puntos C, D y P y toca a la línea BH en el punto B. Q.E.F.

CASO 2. Supóngase que los cuatro puntos dados B, C, D y P están situados fuera de la tangente HI. Unanse de dos en dos mediante las líneas BD y CP que se encuentran en G y cortan la tangente en H e I. Córtese la tangente en A, de tal manera que HA pueda ser a IA como el producto de la media proporcional entre GC y GP, y la media proporcional entre BH y HD es al producto de la media proporcional entre GD y GB, y la media proporcional entre PI e IC, y A será el punto de contacto.

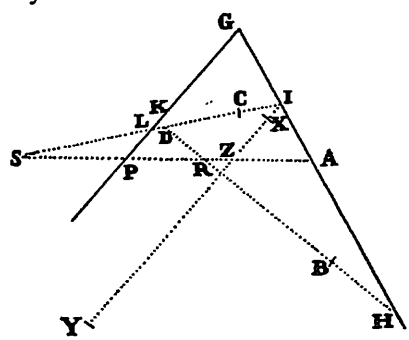


Pues si HX, paralela a la recta PI, corta a la cónica en cualesquiera puntos X e Y, el punto A (por las propiedades de las secciones cónicas) llegará a estar situado de tal modo que HA^2 será a AI^2 en una razón compuesta por la razón del rectángulo HX × HI al rectángulo BH × HD, o del rectángulo KG × GP al rectángulo DG × GB, y la razón del rectángulo BH × HD al rectángulo PI × IC. Pero tras hallar el punto de contacto A, la cónica será descrita como en el primer Caso. Q.E.F. Pero el punto A puede tomarse o bien entre o sin los puntos H e I, en cuyo caso puede describirse una cónica doble.

PROPOSICIÓN XXIV. PROBLEMA XVI

Describir una cónica que pase a través de tres puntos dados y toque dos rectas dadas.

Supóngase que HI y KL son las tangentes dadas, y B, C y D los puntos. A través de dos cualesquiera de esos puntos, digamos que B y D, trácese la recta indefinida BD que se encuentra con las tangentes en los puntos H y K.



Trácese entonces de modo análogo, atravesando cualquiera de los otros dos puntos C y D, la recta indefinida CD que encuentra las tangentes en los puntos I y L. Córtense las líneas trazadas en R y S, de manera que HR pueda ser a KR como la media proporcional entre BH y HD es a la media proporcional entre BK y KD, e IS a LS como la media proporcional entre CI e ID es a la media proporcional entre CL y LD. Pero puede cortarse a placer, bien entre los puntos K y H, I y L, o fuera de ellos. Trácese entonces RS cortando las tangentes en A y P, y A y P serán los puntos de contacto. Pues si se supone que A y P son los puntos de contacto, situados en cualquier otro lugar de las tangentes, y atravesando cualquiera de los puntos H, I, K y L, así como I, situado en una u otra tangente HI, se traza una línea recta YI paralela a la otra tangente KL, encontrando a la curva en X e Y, y en esa recta IZ se toma como igual a una media proporcional entre IX e IY, el rectángulo $XI \times IY$ o IZ^2 será (por las propiedades de las secciones cónicas) a LP^2 como el rectángulo $CI \times ID$ es el rectángulo $CL \times LD$; esto es (por la construcción), como SI es a SL^2, por lo cual $IZ : LP = SI : SL$. En consecuencia, los puntos S, P y Z se encuentran en una línea recta. Además, como las tangentes se encuentran en G, el rectángulo $XI \times IY$ o IZ^2 (por las propiedades de las secciones cónicas) será a IA^2 como GP^2 es a GA^2, y en consecuencia $IZ : IA = GP : GA$. De lo cual se sigue que los puntos P, Z y A yacen en una línea recta. Y el mismo argumento probará que los puntos R, P y A están en una línea recta. Por lo cual los puntos

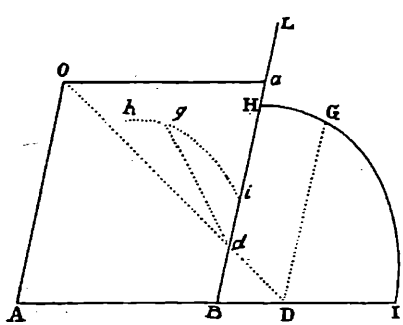
de contacto A y P yacen en la recta RS. Pero tras descubrir esos puntos puede describirse la cónica, como en el primer Caso del Problema precedente. Q.E.F.

En esta Proposición, y en el Caso 2 de la previa, las construcciones son las mismas tanto si la recta XY corta a la cónica en X e Y como si no; y tampoco dependen de esa sección. Pero estando demostradas las contrucciones cuando esa recta corta la cónica, son también conocidas las construcciones cuando no es así; y por lo mismo, en aras de la brevedad, omito cualquier demostración adicional.

LEMA XXII

Transformar figuras en otras de la misma especie.

Supóngase que cualquier figura HGI ha de ser transformada. Trácense a placer dos paralelas AO y BL, que cortan cualquier tercer línea AB en A y B, y desde cualquier punto G de la figura trácese cualquier recta GD, paralela a OA, hasta que se encuentre con la recta AB. Entonces, partiendo de cualquier punto dado O de la línea OA, trácese hasta el punto D la recta OD, que se encuentra con BL en *d*; y desde el punto de intersección levántese la recta *dg* conteniendo cualquier ángulo dado con la recta BL, y guardando una razón con respecto a O*d* como DG a OD; y *g* será el punto en la nueva figura *hgi*, correspondiente al punto G. Y de modo semejante los diversos puntos de la primera figura proporcionarán otros tantos puntos correspondientes de la nueva figura. Si por lo mismo concebimos que el punto G es arrastrado por un movimiento continuo a través de todos los puntos de la primera figura, el punto *g* será arrastrado análogamente por un movimiento continuo a través de todos los puntos de la nueva figura,



describiéndola. En aras de la claridad, llamemos DG a la primera ordenada, *dg* a la nueva ordenada, AD a la primera abcisa, *ad* a la abcisa nueva, O al polo, OD al radio abcisa, OA al primer radio ordenada y O*a* (mediante el cual se completa el paralelogramo OAB*a*) al nuevo radio ordenada.

Afirmo entonces que si el punto G está situado en una recta dada, el punto *g* estará también situado en una recta dada. Si el punto G está situado en una sección cónica, el punto *g* estará situado igualmente en una sección cónica. Y entiendo aquí el círculo como una de las secciones cónicas. Pero, además, si el punto G está situado en una línea del tercer grado analítico, el punto *g* estará situado también en una línea del tercer grado, y así sucesivamente en líneas curvas de grados superiores. Las dos líneas donde están situados los puntos G y *g* será siempre del mismo grado analítico. Pues como $ad : OA = Od : OD = dg : DG = AB : AD$; y, en consecuencia, AD es igual a $\frac{OA \times AB}{ad}$, y DG igual a $\frac{OA \times dg}{ad}$. Si el punto G está situado en una recta y, por tanto, en cualquier ecuación mediante la cual se exprese la relación entre la abcisa AD y la ordenada GD, esas líneas indeterminadas AD y DG no se elevan más que a una dimensión, y escribiendo en esa ecuación $\frac{OA \times AB}{ad}$ en lugar de AD, y $\frac{OA \times dg}{ad}$ en lugar de DG se producirá una nueva ecuación, donde la nueva abcisa *ad* y la nueva ordenada *dg* sólo se elevan a una dimensión; y que por eso mismo debe denotar una línea recta. Pero si AD y DG (o cualquiera de ellas) se hubiesen elevado a dos dimensiones en la primera ecuación, *ad* y *dg* se habrían elevado igualmente a dos dimensiones en la segunda ecuación. Y así sucesivamente en tres o más dimensiones. Las líneas indeterminadas *ad* y *dg* en la segunda ecuación, y AD y DG en la primera, siempre se elevarán al mismo número de dimensiones; y, por consiguiente, las líneas donde están situados los puntos G y *g* son del mismo grado analítico.

Afirmo además que si cualquier línea recta toca la curva de la primera figura, la misma recta transferida del mismo modo con la curva en la nueva figura tocará a esa curva en la nueva figura, y a la inversa. Porque si dos puntos cualesquiera de la curva en la primera figura se suponen aproximándose hasta coincidir, los mismos puntos transferidos se aproximarán el uno

al otro hasta coincidir en la nueva figura; y, por tanto, las líneas rectas con las cuales se unen esos puntos se convertirán en tangentes en ambas figuras. Podría haber dado demostraciones de estos asertos en una forma más geométrica. Pero velo por la brevedad.

Por lo cual si una figura rectilínea ha de ser transformada en otra basta transferir las intersecciones de las rectas en que consiste la primera figura, trazando a través de las intersecciones transferidas líneas rectas en la figura nueva. Pero si ha de ser transformada una figura curvilínea, debemos transferir los puntos, las tangentes y otras líneas rectas mediante las cuales se define la curva. Este Lema es utilizable en la solución de los problemas más espinosos, pues gracias a él podremos transformar las figuras propuestas, en caso de ser intrincadas, en otras más simples. De este modo, cualesquiera rectas convergentes en un punto se transforman en paralelas tomando por el primer ràdio ordenada cualquier recta que pase a través del punto de intersección de las líneas convergentes, y esto porque su punto de intersección es de este modo alejado hasta lo infinito; y las paralelas son aquellas líneas que no convergen en ningún punto. Y una vez resuelto el problema en la nueva figura, tendremos la solución requerida si mediante las operaciones inversas transformamos esta figura en la primera.

Este Lema es aplicable también en la solución de problemas con sólidos. Pues tan a menudo como intervengan dos secciones cónicas, por cuya intersección pueda resolverse un problema, cualquiera puede transformarse si es una hipérbola o una parábola en una elipse, y luego esta elipse puede cambiarse fácilmente por un círculo. Así también, en la construcción de problemas de planos, una línea recta y una sección cónica pueden transformarse en una recta y un círculo.

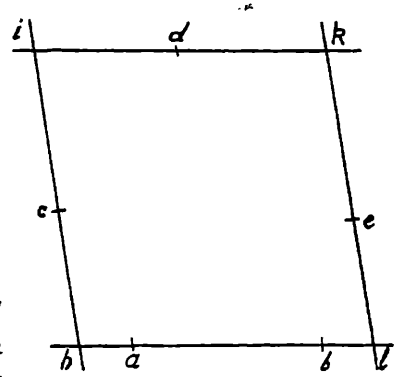
PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA XVII

Describir una cónica que pase a través de dos puntos dados y toque tres líneas rectas dadas.

Trácese una recta indefinida por la intersección de dos cualesquiera de las tangentes entre sí, y la intersección de la tercera tangente con la línea recta que pasa a través de dos

puntos dados; y tomando esta línea como primer radio ordenada, transfórmese la figura mediante el Lema precedente en otra nueva.

En esa figura las dos tangentes se harán paralelas entre sí, y la tercera tangente será paralela a la recta que pasa a través de los dos puntos dados. Supongamos que *hi* y *kl* son esas dos tangentes paralelas, *ik* la tercera tangente y *hl* una línea recta paralela a ésta, que pasa a través de aquellos puntos *a* y *b* que la sección cónica ha de atravesar en esta nueva figura; y completando el paralelogramo *hikl*, hágase que las rectas *hi*, *ik* y *kl* estén cortadas en *c*, *d* y *e* de tal manera que *hc* pueda ser a la raíz cuadrada del rectángulo *ahb*, *ic* a *id* y *ke* a *kd* como la suma de las rectas *hi* y *kl* es a la suma de tres líneas, de las cuales la primera es la recta *ik*, y las otras dos son como las raíces cuadradas de los rectángulos *ahb* y *alb*; y *c*, *d* y *e* serán los puntos de contacto. Pues por las propiedades de las secciones cónicas,



$$hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$$

Por lo cual,

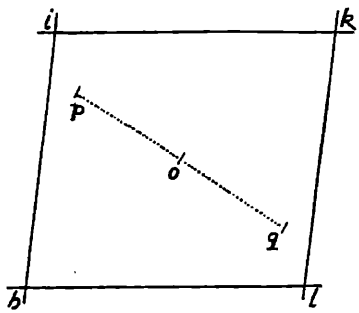
$$hc : \sqrt{ah \times hb} = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \times lb} =$$
$$= hc + ic + ke + el : \sqrt{ah \times hb} + id + kd + \sqrt{al \times lb} =$$
$$= hi + kl : \sqrt{ah \times hb} + ik + \sqrt{al \times lb}$$

Con lo cual partiendo de esa razón dada tenemos los puntos de contacto *c*, *d* y *e* en la nueva figura. Por las operaciones inversas del último Lema, hágase que esos puntos se transfieran a la primera figura, y la cónica será descrita aquí por el Problema XIV. Q.E.F. Pero según que los puntos *a* y *b* caigan entre los puntos *h* y *l*, o fuera de ellos, los puntos *c*, *d* y *e* deben tomarse o bien entre los puntos *h*, *i*, *k* y *l* o fuera de ellos. Si uno de los puntos *a* o *b* cae entre los puntos *h* y *l*, y el otro fuera, el Problema es imposible.

PROPOSICIÓN XXVI. PROBLEMA XVIII

Describir una cónica que pase a través de un punto dado y toque cuatro líneas rectas dadas.

Partiendo de las intersecciones comunes de dos cualesquiera de las tangentes a la intersección común de las otras dos, trácese una recta indefinida; y tomando esta línea como primer radio ordenada, transfórmese la figura (por el Lema XXII) en una nueva, y los dos pares de tangentes, cada uno de los cuales concurrió antes en el primer radio ordenada, se harán ahora paralelos.

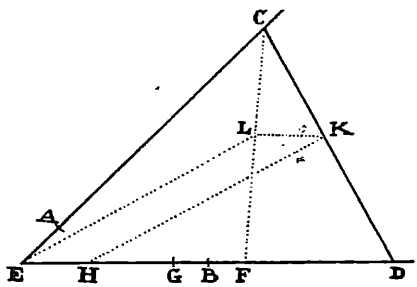


Hágase que *hi* y *kl*, *ik* y *hl* sean esos pares de paralelas completando el paralelogramo *hikl*. Y permítase que *p* sea en esta nueva figura el punto correspondiente al punto dado en la figura primera. A través del centro O de la figura trácese *pq*, y siendo O*q* igual a O*p*, *q* será el punto a través del cual habrá de pasar la sección cónica en esta nueva figura. Mediante la operación inversa del Lema XXII, hágase que este punto se transfiera a la primera figura, y allí tendremos los dos puntos a través de los cuales ha de ser descrita la cónica. Pero a través de esos puntos la cónica puede ser descrita mediante la Proposición XVII.

LEMA XXIII

Si dos líneas rectas dadas, como AC *y* BD, *que terminan en puntos dados* A *y* B *guardan entre sí una razón dada, y la recta* CD *mediante la cual se unen los puntos indeterminados* C *y* D *es cortada en* K *guardando una razón dada, afirmo que el punto* K *estará situado en una línea recta dada.*

Permítase que las rectas AC y BD se encuentren en E, y en BE llévese BG a AE como BD es a AC, haciendo que FD sea siempre igual a la línea dada EG; y, por construcción, EC será a GD, esto es, a EF, como AC a BD, conservando por eso mismo una razón dada; con lo cual el triángulo EFC estará dado en especie.

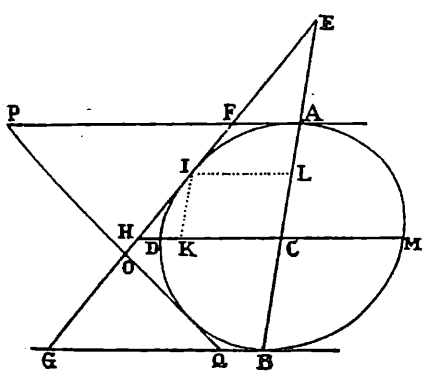


Hágase que CF sea cortada en L, de manera que CL pueda ser a CF en la proporción de CK a CD; y como esto tiene una razón dada, el triángulo EFL estará dado en especie y, en consecuencia, el punto L estará situado en la línea recta dada EL. Unase LK y los triángulos CLK y CFD serán semejantes; y puesto que FD es una línea dada, y LK guarda con FD una razón dada, LK estará dada también. A estos efectos tómese EH igual, y ELKH será siempre un paralelogramo. Con lo cual el punto K está situado siempre en el lado dado HK de ese paralelogramo. Q.E.D.

COROLARIO. Como la figura EFLC es dada en especie, las tres rectas EF, EL y EC, esto es, GD, HK y EC guardarán razones dadas entre sí.

LEMA XXIV

Si tres líneas rectas, de las cuales dos son paralelas y dadas en posición, tocan cualquier sección cónica, afirmo que el semidiámetro de la sección que es paralelo a esas dos es la media proporcional entre los segmentos de aquellas dos interceptadas entre los puntos de contacto y la tercera tangente.



Sean AF y GB las dos paralelas que tocan a la sección cónica ADB en A y B; EF la tercera línea recta que toca a la sección cónica en I se encuentra con las tangentes anteriores en F y G, siendo CD el semidiámetro de la figura paralelo a esas tangentes. Afirmo que AF, CD y BG son continuamente proporcionales.

Pues si los diámetros conjugados AB y DM encuentran a la tangente FG en E y H, y se cortan el uno al otro en C, y se completa el paralelogramo IKCL, por la naturaleza de las secciones cónicas,

EC : CA = CA : CL;

por lo cual EC − CA : CA − CL = EC : CA

o EA : AL = EC : CA;

por lo cual EA : EA + AL = EC : EC + CA

o EA : EL = EC : EB.

En consecuencia, debido a la semejanza de los triángulos EAF, ELI, ECH y EGB,

AF : LI = CH : BG.

De modo análogo, partiendo de la naturaleza de las secciones cónicas,

LI o CK : CD = CD : CH.

Tomando los productos de los términos correspondientes en las dos últimas proporciones y simplificando,

AF : CD = CD : BG. Q.E.D.

COROLARIO I. Por consiguiente, si dos tangentes PQ y FG encuentran dos tangentes paralelas AF y BG en F y G, P y Q, y se cortan la una a la otra en O, por el Lema aplicado en EG y PQ,

AF : CD = CD : BG,

BQ : CD = CD : AP.

Por lo cual, AF : AP = BQ : BG

y AP − AF : AP = BG − BQ : BG

o PF : AP = GQ : BG,

y AP : BG = PF : GQ = FO : GO = AF : BQ.

COROLARIO II. Por lo cual también las dos líneas rectas PG y FQ trazadas a través de los puntos P y G, F y Q se encontrarán en la línea recta ACB pasando a través del centro de la figura y los puntos de contacto A y B.

LEMA XXV

Si cuatro lados de un paralelogramo prolongados indefinidamente tocan cualquier sección cónica y son cortados por una quinta tangente, afirmo que tomando aquellos segmentos de dos lados

contérminos cualesquiera que acaban en ángulos opuestos del paralelogramo, cada uno de los segmentos es al lado de el cual es cortado como aquella parte del otro lado contérmino que es interceptada entre el punto de contacto y el tercer lado es al otro segmento.

Hágase que los cuatro lados ML, IK, KL y MI del paralelogramo MLIK toquen a la sección cónica en A, B, C y D; y hágase que la quinta tangente FQ corte esos lados en F, Q, H y E; y tomando los segmentos ME, KQ de los lados MI, KI, o los segmentos KH, MF de los lados KL, ML, afirmo que

ME : MI = BK : KQ,

y KH : KL = AM : MF.

Pues por el Corolario I del Lema precedente,

ME : EI = AM o BK : BQ,

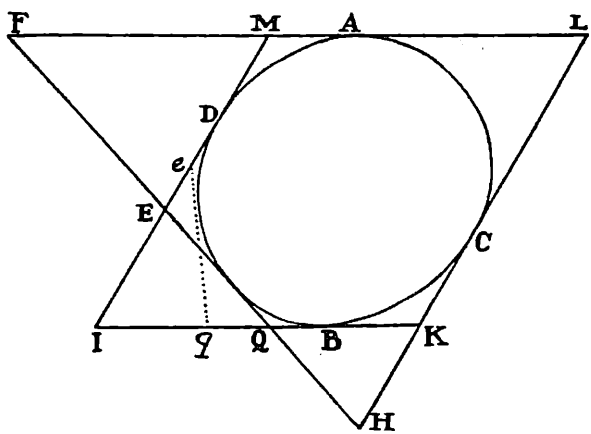
y por suma,

ME : MI = BK : KQ. Q.E.D.

También KH : HL = BK o AM : AF,

y por substracción,

KH : KL = AM : MF. Q.E.D.



COROLARIO I. Por consiguiente, si está dado un paralelogramo IKLM descrito alrededor de una sección cónica dada, el rectángulo KQ × ME, como también el rectángulo KH × MF igual a éste, estarán dados. Pues por razón de los triángulos semejantes KQH y MFE, esos rectángulos son iguales.

COROLARIO II. Y si se traza una sexta tangente *eq* que encuentra las tangentes KI y MI en *q* y *e*, el rectángulo KQ × ME será igual al rectángulo K*q* × M*e*,
y KQ : M*e* = K*q* : ME,
y por subtracción
KQ : M*e* = Q*q* : E*e*.

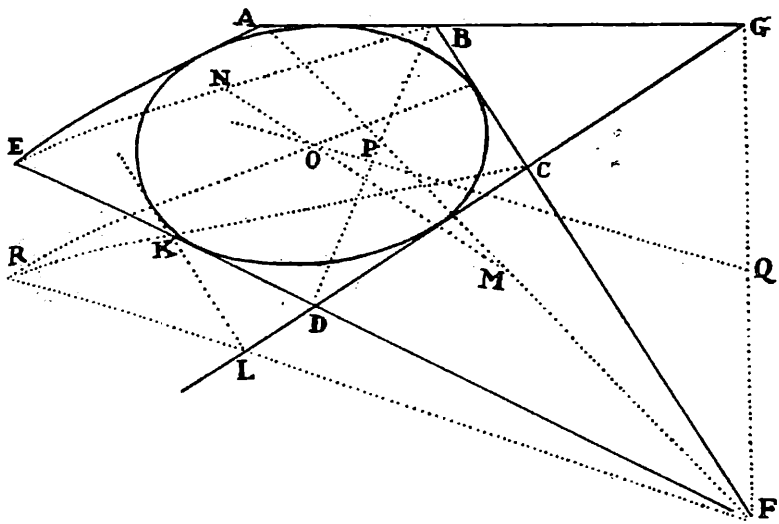
COROLARIO III. Por consiguiente, también, si E*q* y *e*Q son unidas y bisectadas, y se traza una recta a través de los puntos de bisección, esa línea pasará a través del centro de la sección cónica. Pues dado que Q*q* : E*e* = KQ : M*e*, la misma línea recta pasará por la mitad de todas las líneas E*q*, *e*Q y MK (por el Lema XXIII), y el punto medio de la recta MK es el centro de la sección.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA XIX

Describir una cónica que pueda tocar cinco líneas rectas dadas en posición.

Suponiendo que ABG, BCF, GCD, FDE y EA sean las tangentes dadas en posición, biséctese en M y N AF y BE, las diagonales de la figura de cuatro lados ABFE contenidas bajo cuatro cualesquiera de ellas; y (por el Corolario III, Lema XXV) la línea recta MN trazada a través de los puntos de bisección pasará a través del centro de la cónica.

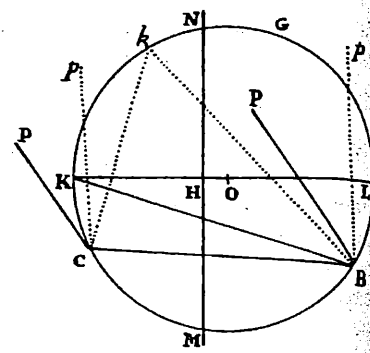
Una vez más, biséctense en P y Q las diagonales (si así pueden llamarse) BD y GF de la figura de cuatro lados BGDF contenida dentro de cualesquiera otras cuatro tangentes, y la recta PQ trazada a través de los puntos de bisección pasará a través del centro de la cónica; por lo cual el centro estará dado en la intersección de las líneas bisectantes. Supongamos que sea O. Paralela a cualquier tangente BC trácese KL a una distancia tal que el centro O pueda situarse en la mitad entre las paralelas; esta KL tocará la cónica a describir. Hágase que corte otras dos tangentes cualesquiera GCD y FDE en L y K. A través de los puntos C y K, F y L, donde las tangentes no paralelas CL y FK se encuentran con las tangentes paralelas CF y KL trácense CK y FL encontrándose en R; y la recta OR, trazada y prolongada, cortará a las tangentes paralelas CF y KL en los puntos de



contacto. Esto es manifiesto a partir del Corolario II, Lema XXIV. Y por el mismo método pueden hallarse los otros puntos de contacto, y entonces la cónica puede ser descrita por el Problema XIV. Q.E.F.

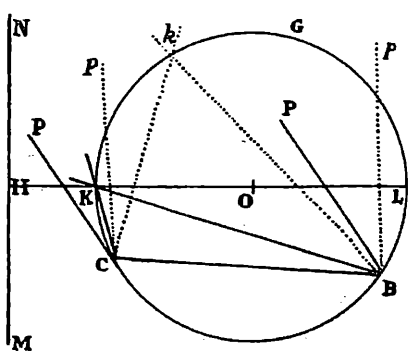
ESCOLIO

Bajo las Proposiciones precedentes se comprenden aquellos Problemas donde están dados los centros o las asíntotas de las cónicas. Pues cuando están dados puntos, tangentes y centro, otros tantos puntos y tangentes estarán dados a una distancia igual al otro lado del centro. Y una asíntota debe considerarse como una tangente, y su extremidad infinitamente remota (si podemos expresarnos así) es un punto de contacto. Concíbase que el punto de contacto de cualquier tangente es alejado hasta lo infinito y la tangente degenerará en una asíntota, con lo cual las construcciones de los Problemas precedentes se transformarán en las construcciones de aquellos Problemas donde está dada la asíntota.



Tras describir la cónica, podemos hallar sus ejes y focos de este modo. En la construcción y figura del Lema XXI hágase que los lados BP y CP de los ángulos móviles PBN y PCN, por cuya intersección se describió la trayectoria, sean paralelos entre sí; y reteniendo esa posición hágase que giren alrededor de sus polos B y C en esa figura. Mientras tanto hágase que los otros lados CN y BN de esos ángulos, por su intersección K o k, describan el círculo BKGC. Sea O el centro de este círculo y sobre la regla MN, donde concurrían los lados CN y BN mientras era descrita la cónica, tírese la perpendicular OH que encuentra el círculo en K y L. Y cuando los otros lados CK y BK se encuentran en el punto K más próximo a la regla, los primeros lados CP y BP serán paralelos al eje mayor y perpendiculares al menor; y sucederá lo contrario si esos lados se encuentran en el punto más remoto L. Por lo cual si está dado el centro de la cónica estarán dados también los ejes; y estando dados ellos los focos se hallarán rápidamente.

Pero los cuadrados de los ejes son entre sí como KH a LH, y por ello es fácil describir una cónica dada en especie a través de cuatro puntos dados. Pues si dos de los puntos dados se convierten en los polos C y B, el tercero proporcionará los ángulos móviles PCK y PBK; pero estando dados ellos, puede describirse el círculo BGKC. Entonces, como la cónica está dada en especie, la razón de OH a OK y, por tanto, OH misma, estará dada. Alrededor del centro O, con el intervalo OH, descríbase otro círculo, y la recta que toca este círculo y pasa a través de la intersección de los lados CK y BK, cuando los primeros lados CP y BP se encuentran en el cuarto punto, será la regla MN, mediante



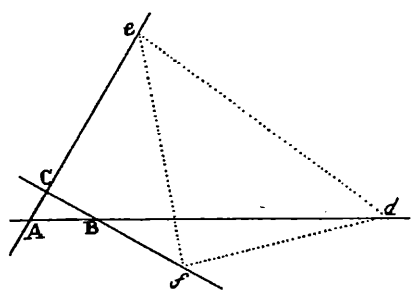
la cual puede describirse la cónica. Por lo cual, por otra parte, también puede inscribirse un trapecio dado en especie (salvo unos pocos casos que son imposibles) en una sección cónica dada.

Hay también otros Lemas mediante los cuales pueden describirse cónicas dadas en especie a través de puntos dados y tocando líneas dadas. De ese tipo es el de que si se traza una línea recta a través de cualquier punto dado en posición capaz de cortar una sección cónica dada en dos puntos, y la distancia de la intersección es bisectada, el punto de bisección cortará otra cónica de especie igual a la primera, que tendrá sus ejes paralelos a los ejes de ésta. Pero me apresuro a entrar en cosas de mayor uso.

LEMA XXVI

Situar los tres ángulos de un triángulo, dados tanto en especie como magnitud, con respecto a otras tantas rectas dadas en posición, no paralelas entre sí, de tal manera que los diversos ángulos puedan tocar a las diversas líneas.

Se dan en posición tres rectas indefinidas AB, AC y BC, y se requiere situar el triángulo DEF de tal manera que su ángulo D pueda tocar la línea AB, su ángulo E la línea AC y su ángulo F la línea BC. Describir sobre DE, DF y EF tres segmentos de círculos DRE, DGF y EMF capaces de ángulos iguales a los ángulos BAC, ABC y ACB respectivamente.



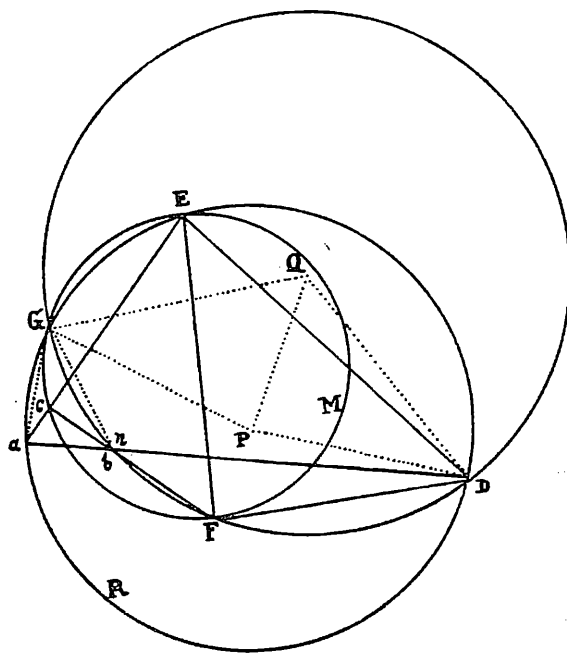
Pero esos segmentos han de ser descritos hacia aquellos lados de las líneas DE, DF y EF capaces de permitir que las letras DRED puedan girar en el mismo orden que las letras BACB; las letras DGFD en el mismo orden que las letras ABCA; y las letras EMFE en el mismo orden que las letras ACBA; entonces, completando esos segmentos hasta formar círculos enteros, hágase que los dos primeros círculos se

corten uno al otro en G, y supóngase que P y Q son sus centros. Uniendo entonces GP y PQ, tómese

$$Ga : AB = GP : PQ;$$

y alrededor del centro G, con el intervalo G*a*, descríbase un círculo que pueda cortar el primer círculo DGE en *a*. Unase *a*D cortando el segundo círculo DFG en *b*, así como *a*E cortando el tercer círculo EMF en *c*. Complétese la figura ABC*def* similar e igual a la figura *abc*DEF. Afirmo que la cosa está hecha.

Pues trazando F*c* que se encuentra con *a*D en *n*, y uniendo *a*G, *b*G, QG, QD y PD, por construcción el ángulo E*a*D es igual al ángulo CAB, y el ángulo *ac*F igual al ángulo ACB; y, por tanto, el triángulo *anc* equiangular al triángulo ABC. Por lo cual el ángulo *anc* o F*n*D es igual al ángulo ABC y, en consecuencia, al ángulo F*b*D; con lo cual el punto *n* cae sobre el punto *b*. Además, el ángulo GPQ, que es la mitad del ángulo GPD en el centro, es igual al ángulo G*a*D en la circunferencia; y el ángulo GQP, que es la mitad del ángulo GQD en el centro, es igual al suplemento del ángulo G*b*D en la circunferencia y, por tanto,



gual al ángulo G*ba*. Por lo cual los triángulos GPQ y G*ab* son semejantes, y

$$Ga : ab = GP : PQ$$

y por construcción

$$GP : PQ = Ga : AB.$$

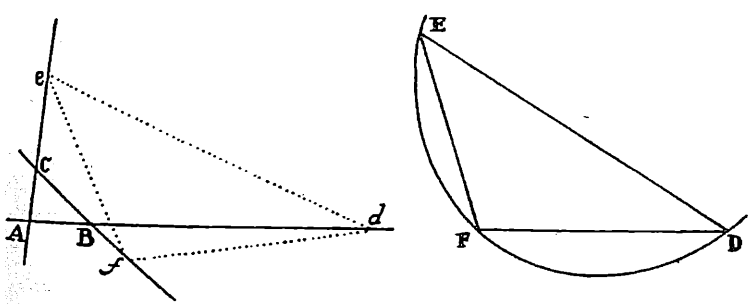
Por lo cual *ab* y AB son iguales; y, en consecuencia, los triángulos *abc* y ABC, que hemos probado semejantes, son también iguales. Y como los ángulos D, E y F del triángulo DEF tocan respectivamente los lados *ab*, *ac* y *bc* del triángulo *abc*, la figura ABC*def* puede ser completada semejante e igual a la figura *abc*DEF, y completándola se resolverá el Problema. Q.E.F.

COROLARIO. De ahí que pueda trazarse una recta cuyas partes dadas en longitud puedan ser interceptadas entre tres líneas rectas dadas en posición. Supóngase que el triángulo DEF, por la aproximación de su punto D al lado EF, y teniendo los lados DE y DF situados en la misma línea, es transformado en una recta cuya parte dada DE ha de ser situada entre las rectas AB y BC dadas en posición, y cuya parte DF lo ha de estar entre AB, BC; entonces, aplicando a este caso la construcción precedente, el Problema se resolverá.

PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA XX

Describir una cónica dada tanto en especie como en magnitud, de la cual partes dadas se situarán entre las tres rectas dadas en posición.

Ha de ser descrita una cónica que pueda ser semejante e igual a la línea curva DEF, y que pueda ser cortada por tres rectas AB, AC y BC, dadas en posición, en las partes DE y EF, semejantes e iguales a las partes dadas de esa curva.



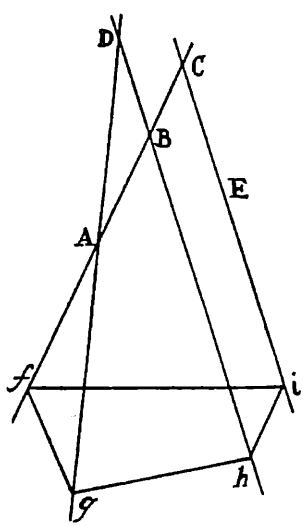
Trácense las rectas DE, EF y DF; y sitúense los ángulos D, E y F de este triángulo DEF de manera que toquen las rectas dadas en posición (por el Lema XXVI). Descríbase entonces alrededor del triángulo la cónica, semejante e igual a la curva DEF. Q.E.F.

LEMA XXVII

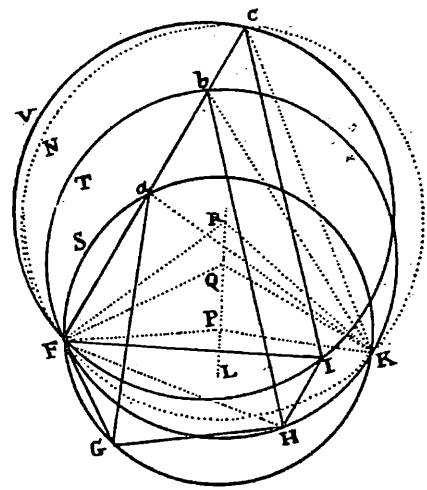
Describir un trapecio dado en especie, cuyos ángulos puedan tocar respectivamente cuatro rectas dadas en posición, que ni son paralelas entre sí ni convergen en un punto común.

Hágase que las cuatro rectas ABC, AD, BD y CE estén dadas en posición; y la primera cortando a la segunda en A, la tercera en B y la cuarta en C; y supóngase que ha de describirse un trapecio *fghi* que pueda ser semejante al trapecio FGHI, y cuyo ángulo *f*, igual al ángulo dado F, pueda tocar a la recta ABC; y que los otros ángulos *g*, *h* e *i*, iguales a los otros ángulos dados G, H e I, puedan tocar a las otras líneas AD, BD y CE respectivamente.

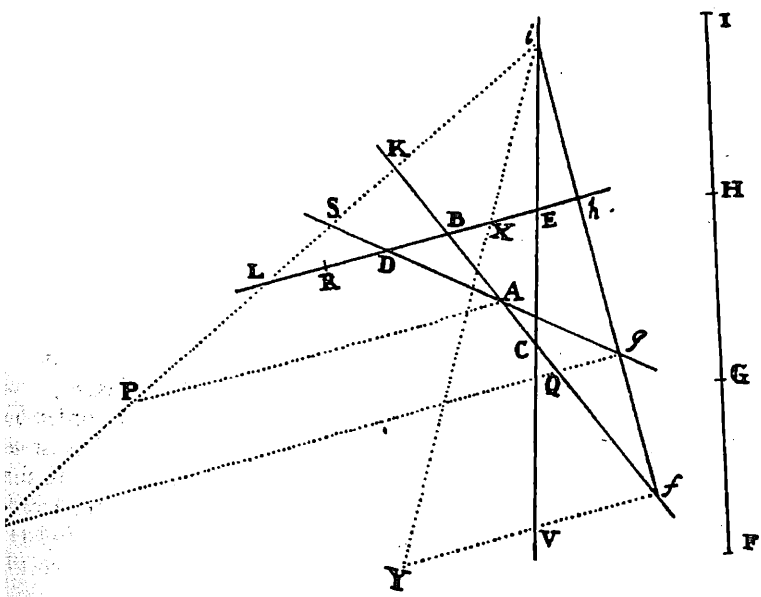
Unase FH y sobre FG, FH y FI descríbanse otros tantos segmentos de círculos FSG, FTH y FVI, de los cuales el primero (FSG) pueda ser capaz de un ángulo igual al ángulo BAD; el segundo (FTH) capaz de un ángulo igual al ángulo CBD; y el tercero (FVI) de un ángulo igual al ángulo ACE. Pero los segmentos han de ser descritos hacia aquellos lados de las líneas FG, FH y FI donde el orden circular de las letras FSGF pueda ser el mismo que el de las letras BADB, y que las letras FTHF puedan girar alrededor en el mismo orden que las letras CBDC, y las letras FVIF en el mismo orden que las letras ACEA. Complétense los segmentos en círculos enteros, siendo P el centro del primer círculo FSG, Q el centro del segundo FTH, Unase y prolónguese a ambos lados la línea PQ, y en ella tómese QR de tal manera que QR:PQ = BC:AB.



Pero QR debe ser tomada hacia aquel lado del punto Q donde el orden de las letras P, Q y R pueda ser idéntico al de las letras A, B y C; y alrededor del centro R, con el radio RF, descríbase un cuarto círculo *c*Nc que corta al tercer círculo FVI en *c*. Unase *Rc* cortando el primer círculo en *a* y el segundo en *b*. Trácense *a*G, *b*H y *c*I, haciendo que la figura *abc*BC*fghi* sea semejante a la figura *abc*FGHI; y el trapecio *fghi* será aquel cuya descripción se requería.



Pues hágase que los dos primeros círculos FSG y FTH se corten el uno al otro en K; únanse PK, QK, RK, *a*K, *b*K y *c*K y



prolónguese QP hasta L. Los ángulos F*a*K, F*b*K, F*c*K en la circunferencia son las mitades de los ángulos FPK, FQK y FRK en los centros, con lo cual son iguales a LPK, LQK y LRK, mitades de esos ángulos. En consecuencia, la figura PQRK es equiangular y semejante a la figura *abc*K, por lo cual *ab* es a *bc* como PQ a QR, esto es, como AB a BC. Pero por construcción los ángulos *f*A*g*, *f*B*h*, *f*C*i* son iguales a los ángulos F*a*G, F*b*H y F*c*I. Por consiguiente, la figura ABC*fghi* puede completarse semejante a la figura *abc*FGHI. Una vez hecho esto se construirá un trapecio *fghi* semejante al trapecio FGHI, que por sus ángulos *f*, *g*, *h* e *i* tocará a las rectas ABC, AD, BD y CE. Q.E.F.

COROLARIO. De ahí que pueda trazarse una línea recta cuyas partes interceptadas en un orden dado, entre cuatro rectas dadas por posición, mantengan una proporción dada entre sí.

Hágase que los ángulos FGH y GHI se vean tan aumentados que las rectas FG, GH y HI puedan encontrarse en la misma línea; y construyendo el Problema en este caso, se trazará una línea recta *fghi*, cuyas partes *fg*, *gh* y *hi*, interceptadas entre las cuatro rectas dadas en posición AB y AD, AD y BD, BD y CE, serán como las líneas FG, GH y HI, observando el mismo orden entre sí. Pero la misma cosa puede hacerse más sencillamente así.

Prolónguese AB hasta K y BD hasta L, de manera que BK pueda ser a AB como HI a GH; y DL a BD como GI a FG; y únase KL encontrando la línea recta CE en *i*. Prolónguese *i*L hasta M, de manera que LM pueda ser a *i*L como GH a HI; luego trácese MQ paralela a LB y encontrando a la línea recta AD en *g*, y únase *gi* cortando a AB y BD en *f* y *h*. Afirmo que la cosa está hecha.

Déjese que Mg corte a la recta AB en Q, y AD a la recta KL en S, y trácese AP paralela a BD encontrándose con *i*L en P, y *g*M con respecto a L*h* (*gi* a *hi*, M*i* a L*i*, GI a HI, AK a BK) y AP a BL conservarán la misma razón. Córtese DL en R, de manera que DL pueda guardar esa misma razón con respecto a RL; y como son proporcionales *g*S a *g*M, AS a AP y DS a DL, como *g*S es a L*h* será AS a BL y DS a RL; y mixtamente BL − RL a L*h* − *BL* como AS − DS a *g*S − AS. Esto es, BR es a B*h* como AD es a A*g* y, por tanto, como BD a *g*Q. Y alternativamente BR es a BD como B*h* a *g*Q, o *fh* a *fg*. Pero por construcción la línea BL fue cortada en D y R en la misma razón que la línea FI en G y H, con lo cual BR es a BD como FH es a FG. En consecuencia, *fh* es a *fg* como FH es a FG. Puesto que *gi* es a *hi* es como

Mi a *Li*, esto es, como GI es a HI, es manifiesto que las líneas FI y *fi* son cortadas de modo semejante en G y H, *g* y *h*. Q.E.F.

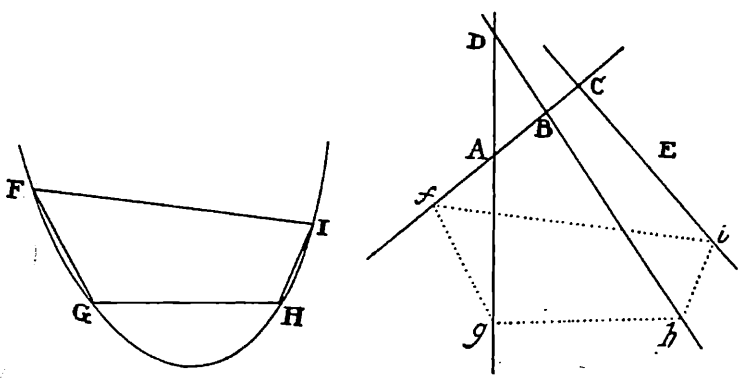
En la construcción de este Corolario, tras trazar la línea LK cortando a CE en *i*, podemos prolongar *i*E hasta V, de tal manera que EV pueda ser a E*i* como FH a HI, y luego trazar V*f* paralela a BD. Resultará lo mismo si alrededor del centro *i* con un intervalo IH describimos un círculo que corte a BD en X, prolongando *i*X hasta Y de manera que *i*Y pueda ser igual a IF, trazando luego Y*f* paralela a BD.

Sir *Christopher Wren* y el doctor *Wallis* dieron hace mucho tiempo soluciones distintas a este Problema.

PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA XXI

Describir una cónica dada en especie que pueda ser cortada por cuatro rectas dadas en posición en partes dadas en orden, especie y proporción.

Ha de describirse una cónica que pueda ser semejante a la curva FGHI, y cuyas partes, semejantes y proporcionales a las partes FG, GH, HI, de la otra, puedan ser interceptadas entre las rectas AB y AD, AD y BD, BD y CE dadas en posición,

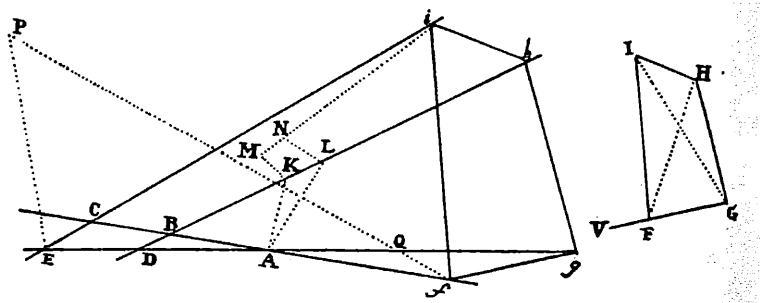


entiéndase: la primera entre el primer par de esas líneas, la segunda entre el segundo y la tercera entre el tercero. Trácense las rectas FG, GH, HI y FI y (por el Lema XXVII) descríbase un trapecio *fghi* que pueda ser semejante al trapecio FGHI, y cuyos ángulos *f*, *g*, *h* e *i* puedan tocar a las rectas de posición dada AB.

AD, BD y CE, cada una con arreglo a su orden. Y luego descríbase alrededor de este trapecio una cónica, que será semejante a la curva FGHI.

ESCOLIO

Este problema puede ser construido también del modo siguiente. Uniendo FG, GH, HI y FI, prolónguese GF hasta V, únanse FH e IG y háganse los ángulos CAK y DAL iguales a los ángulos FGH, VFH. Encontrando AK y AL la recta BD en K y L, trácense KM y LN, de modo que KM haga al ángulo AKM igual al ángulo GHI, siendo con respecto a AK como HI es a GH; y LN haga el ángulo ALN igual al ángulo FHI, siendo



a AL como HI a FH. Pero AK, KM, AL y LN deben trazarse hacia aquellos lados de las líneas AD, AK y AL donde las letras CAKMC, ALKA y DALND puedan girar en el mismo orden que las letras FGHIF; y trácese MN encontrando a la línea recta CE en *i*. Hágase el ángulo *i*EP igual al ángulo IGF, siendo PE a E*i* como FG a GI; y a través de P trácese PQ*f*, conteniendo con la recta ADE un ángulo PQE igual al ángulo FIG y que pueda encontrar a la recta AB en *f*, y únase *fi*. Pero PE y PQ deben trazarse hacia aquellos lados de las líneas CE y PE donde el orden circular de las letras PE*i*P y PEQP pueda ser el mismo de las letras FGHIF; y si sobre la línea *fi*, en el mismo orden de letras y semejante al trapecio FGHI, se construye un trapecio *fghi* y se circunscribe en una cónica dada en especie, el Problema estará resuelto.

Hasta aquí lo concerniente a la determinación de las órbitas. Resta determinar los movimientos de los cuerpos en las órbitas así descubiertas.

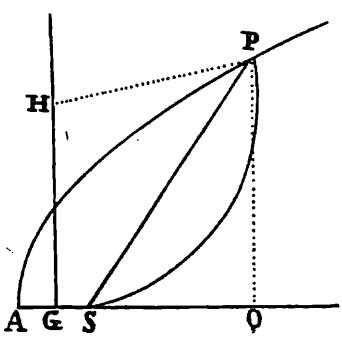
SECCION VI

Sobre la determinación de los movimientos en órbitas dadas

PROPOSICIÓN XXX. PROBLEMA XXII

Descubrir en cualquier tiempo asignado el lugar de un cuerpo que se mueve en una parábola dada.

Sea S el foco y A el vértice principal de la parábola; y supóngase $4AS \times M$ igual al área parabólica a desgajar APS, que o bien fue descrita por el radio SP desde la partida del cuerpo del vértice, o bien ha de ser descrita así antes de llegar allí. La cantidad de ese área a desgajar es conocida a partir del tiempo que es proporcional a ella. Biséctese AS en G, y levántese la perpendicular GH igual a 3M, y un círculo descrito alrededor del centro H, con el radio HS, cortará la parábola en el lugar P requerido.



Pues abatiendo PO perpendicular sobre el eje, y trazando PH, tendremos $AG^2 + GH^2 (= HP^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2) = AO^2 + PO^2 - 2AO \times AG - 2GH \times PO + AG^2 + GH^2$. Por lo cual $2GH \times PO (= AO^2 + PO^2 - 2AO \times AG) = AO^2 + \frac{3}{4}PO^2$. Por AO^2 escribir $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$; luego, dividiendo todos los términos por

3PO y multiplicándolos por 2AS, tendremos $\frac{4}{3}$ GH × AS (= $\frac{1}{6}$ AO × PO + $\frac{1}{2}$ AS × PO = $\frac{AO+3AS}{6} \times PO = \frac{4AS-3SO}{6} \times PO$ = al área, APO − SPO) = al área APS. Pero GH era 3M, y por consiguiente $\frac{4}{3}$GH × AS es 4AS × M. Así pues, el área desgajada APS es igual al área que había de desgajarse 4AS × M. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, GH es a AS como el tiempo en el que el cuerpo describió el arco AP es al tiempo en el que describió el arco entre el vértice A y la perpendicular levantada desde el foco S sobre el eje.

COROLARIO II. Y suponiendo que un círculo ASP pasara continuamente por el cuerpo en movimiento P, la velocidad del punto H es a la velocidad que el cuerpo tenía en el vértice A como 3 a 8; y, en consecuencia, la línea GH guarda la misma razón a la recta que el cuerpo describiría, durante el tiempo empleado en desplazarse desde A a P, con la velocidad que tenía en el vértice A.

COROLARIO III. Así también, a la inversa, puede descubrirse el tiempo en el que el cuerpo describió cualquier arco AP asignado. Unase AP y levántese en su punto medio una perpendicular que se encuentre con la recta GH en H.

LEMA XXVIII

No hay figura oval cuyo área, desgajada a placer por líneas rectas, pueda hallarse en general mediante ecuaciones de cualquier número de términos y dimensiones finitos.

Supóngase que dentro del óvalo es dado cualquier punto, alrededor del cual gira como polo continuamente con movimiento uniforme una línea recta, mientras en esa recta un punto móvil saliendo desde el polo se mueve siempre hacia delante con una velocidad proporcional al cuadrado de esa recta dentro del óvalo. Mediante tal movimiento ese punto describirá una espiral con giros infinitos. Si una porción del área de la figura oval desgajada por esa línea recta pudiera hallarse mediante una ecuación finita, la distancia del punto con respecto al polo, que es proporcional a ese área, podría hallarse mediante la misma ecuación y, en consecuencia, podrían descubrirse también todos los puntos de la espiral mediante una ecuación finita, así como la intersección de una recta dada en posición. Pero cada recta

prolongada infinitamente corta a una espiral en un número infinito de puntos; y la ecuación en cuya virtud se descubre cualquier intersección singular de dos líneas exhibe al mismo tiempo todas sus intersecciones por otras tantas raíces, y se eleva a tantas dimensiones como intersecciones hay. Como dos círculos se cortan el uno al otro en dos puntos, una de esas intersecciones sólo se hallará mediante una ecuación de dos dimensiones, mediante la cual puede hallarse también la otra. Como en dos secciones cónicas puede haber cuatro intersecciones, cualquiera de ellas sólo puede hallarse mediante una ecuación de cuatro dimensiones, con la cual pueden averiguarse todas ellas. Pues si esas intersecciones se buscan separadamente, dado que la ley y condición de todas es idéntica, el cálculo será el mismo en todos los casos y, por lo mismo, la conclusión, que en consecuencia debe comprender todas esas intersecciones simultáneamente dentro de sí, y mostrarlas todas indistintamente. De ello se sigue que las intersecciones de las secciones cónicas con las curvas del tercer grado, donde pueden elevarse a seis, se resuelven juntas por ecuaciones de seis dimensiones; y las intersecciones de dos curvas del tercer grado, como pueden elevarse a nueve, se resuelven conjuntamente mediante ecuaciones de nueve dimensiones. Si esto no sucediese necesariamente, podríamos reducir todos los problemas de sólidos a problemas de planos, y aquellos de orden superior a los sólidos a problemas de sólidos. Pero hablo aquí de curvas de potencia irreducible. Pues si la ecuación mediante la cual se define la curva puede reducirse a una potencia inferior, la curva no sería singular, sino compuesta por dos o más, cuyas intersecciones pueden hallarse separadamente por diferentes cálculos. Del mismo modo las dos intersecciones de líneas rectas con las secciones cónicas se resuelven siempre por ecuaciones de dos dimensiones; las tres intersecciones de líneas rectas con las curvas irreducibles del tercer orden por ecuaciones de tres dimensiones; las cuatro intersecciones de rectas con las curvas irreducibles de cuarto orden por ecuaciones de cuatro dimensiones, y así sucesivamente hasta lo infinito. Por lo cual las innumerables intersecciones de una recta con una espiral, dado que se trata de una curva simple y no reducible a más curvas, requieren ecuaciones infinitas en número de dimensiones y raíces. Porque la ley y el cálculo de todas es el mismo. Pues si se abate una perpendicular desde el polo sobre esa recta intersectante, y esa perpendicular junto con la línea intersectante gira en torno al polo, las intersecciones de

la espiral pasarán mutuamente la una a la otra; y la que era primera o más próxima será segunda tras una revolución, tercera tras dos y así sucesivamente. Mientras tanto, la ecuación no se modificará sino en la medida en que cambien las cantidades mediante las cuales se determina la posición de la línea intersectante. En consecuencia, la ecuación retornará a su forma primera debido a que esas cantidades retornan a sus magnitudes iniciales después de cada revolución; por lo cual una y la misma ecuación mostrará todas las intersecciones, teniendo por lo mismo un número infinito de raíces. Así pues, la intersección de una recta con una espiral no puede hallarse en general por ninguna ecuación finita; y, en consecuencia, no hay figura oval cuya área, desgajada a placer por rectas, pueda mostrarse en general mediante ninguna ecuación semejante.

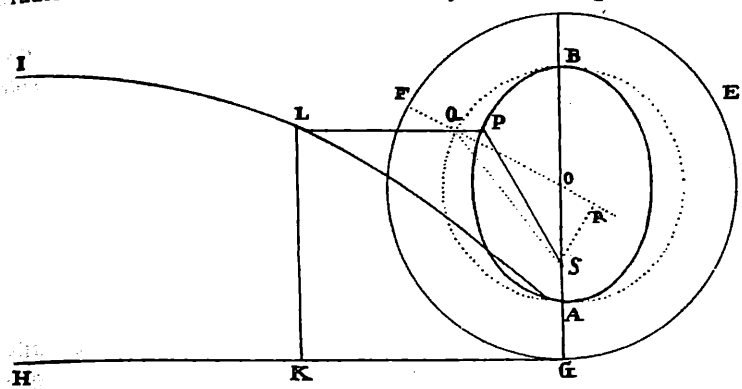
Por el mismo argumento, si el intervalo del polo y el punto mediante el cual se describe la espiral se toma proporcional a aquella parte del perímetro de la figura ovalada que se desgaja, puede probarse que la longitud del perímetro no puede mostrarse por ninguna ecuación finita. Pero hablo aquí de óvalos que no son tocados por figuras conjugadas que se alejan hasta lo infinito.

COROLARIO. En consecuencia, el área de una elipse, descrita por un radio trazado desde el foco hasta el cuerpo en movimiento, no podrá hallarse partiendo del tiempo dado mediante una ecuación finita; y, por lo mismo, no podrá ser determinada por la descripción de curvas geométricamente racionales. Llamo geométricamente racionales a aquellas curvas donde todos los puntos pueden ser determinados por longitudes definibles mediante ecuaciones; esto es, por razones complejas de longitudes. Llamo irracionales a otras curvas (como espirales, cuadratrices y cicloides o trocoides). Pues las longitudes que son o no son como número a número (según el Libro X de los *Elementos* de *Euclides*) son aritméticamente racionales o irracionales. Así pues, desgajo un área de una elipse proporcional al tiempo en el cual es descrita por medio de una curva geométricamente irracional, del modo siguiente:

PROPOSICION XXXI. PROBLEMA XXIII

Encontrar el lugar de un cuerpo que se mueve en una elipse dada en cualquier tiempo asignado.

Supongamos que A es el vértice principal, S el foco y O el centro de la elipse APB, siendo P el lugar del cuerpo a hallar. Prolónguese OA hasta G de manera que OG:OA=OA:OS. Levántese la perpendicular GH; y alrededor del centro O, con el radio OG, descríbase el círculo GEF; y sobre la regla GH como



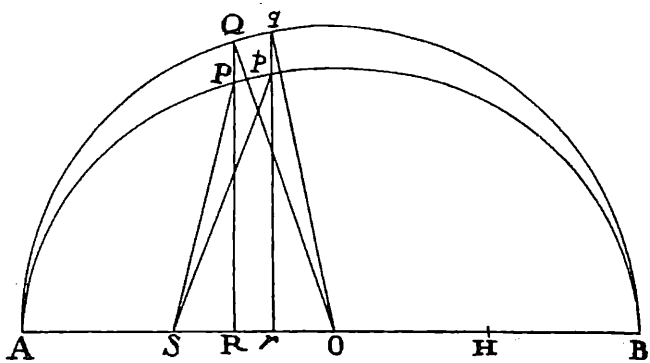
base supóngase que la rueda GEF se mueve hacia adelante, girando en torno a su eje, describiendo mientras tanto mediante su punto A el cicloide ALI. Hecho esto, tómese GK al perímetro GEFG de la rueda, en la razón del tiempo en que el cuerpo procedente de A describió el arco AP al tiempo de una revolución completa en la elipse. Levántese la perpendicular KL que encuentra el cicloide en L; luego LP trazada paralela a KG se encontrará con la elipse en P, el lugar requerido del cuerpo.

Pues alrededor del centro O con el radio OA descríbase el semicírculo AQB, haciendo que LP, prolongada si fuese necesario, encuentre el arco AQ en Q, y únanse SQ y OQ. Hágase que OQ encuentre el arco EFG en F, y trácese la perpendicular SR sobre OQ. El área APS varía como el área AQS, esto es, como la diferencia entre el sector OQA y el triángulo OQS, o como la diferencia de los rectángulos $\frac{1}{2}OQ \times AQ$ y $\frac{1}{2}OQ \times SR$, siendo conocido $\frac{1}{2}OQ$, como la diferencia entre el arco AQ y la recta SR; y, en consecuencia (por la igualdad de las razones dadas SR al seno del arco AQ, OS a OA, OA a OG, AQ a GF; y por

división AQ−SR a GF−seno del arco AQ) como GK, la diferencia entre el arco GF y el seno del arco AQ. Q.E.D.

ESCOLIO

Pero como la descripción de esta curva es difícil, será preferible una solución por aproximación. Hallemos primero un cierto ángulo B que pueda ser a un ángulo de 57,29578 grados,

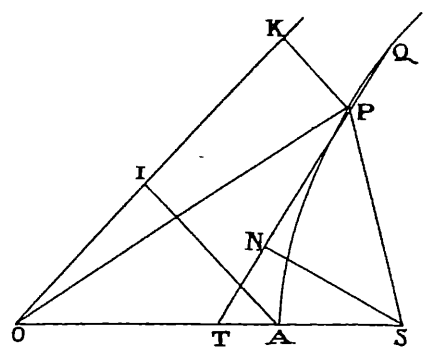


el cual subtiende un arco igual al radio, como la distancia de los focos SH al diámetro AB de la elipse. En segundo lugar una cierta longitud L, que guarde con el radio la misma razón inversamente. Una vez encontradas ambas cosas, el problema puede resolverse mediante el siguiente análisis.

Por cualquier construcción (o incluso por conjetura) supóngase que conocemos P, lugar del cuerpo próximo a su verdadero lugar *p*. Abatiendo entonces sobre el eje de la elipse la ordenada PR, por la proporción de los diámetros de la elipse, estará dada la ordenada RQ del círculo circunscrito AQB; ordenada que es el seno del ángulo AOQ, suponiendo que AO sea el radio, y que también corta a la elipse en P. Sera suficiente si ese ángulo es hallado por un cálculo aproximado. Supongamos que se conoce también el ángulo proporcional al tiempo, esto es, que es a cuatro ángulos rectos como el tiempo en el cual el cuerpo describió el arco A*p* al tiempo de una revolución en la elipse. Sea este ángulo N. Tómese luego un ángulo D, que puede ser al ángulo B como el seno del ángulo AOQ al radio; y un ángulo E que pueda ser al ángulo N−AOQ+D como la

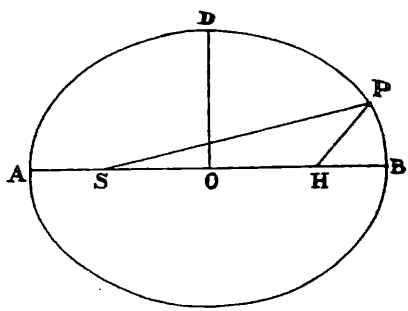
longitud L a la misma longitud L disminuida por el coseno del ángulo AOQ cuando ese ángulo es inferior a un recto, o incrementada por él cuando es mayor. En siguiente lugar, tómese un ángulo F que pueda ser al ángulo B como el seno del ángulo AOQ+E al radio, y un ángulo G que pueda ser al ángulo N−AOQ−E+F como la longitud L a la misma longitud L disminuida por el coseno del ángulo AOQ+E cuando ese ángulo es inferior a un ángulo recto, o incrementada por él cuando es mayor. Para la tercera vez tómese un ángulo H, que pueda ser al ángulo B como el seno del ángulo AOQ+E +G al radio; y un ángulo I al ángulo N−AOQ−E−G+H como la longitud L es a la misma longitud L disminuida por el coseno del ángulo AOQ+E+G, cuando ese ángulo es inferior a uno recto, o incrementado por ella cuando es mayor. Y así podemos continuar hasta lo infinito. Por último, tómese el ángulo AO*q* igual al ángulo AOQ+E+G+I+etc., y partiendo de su coseno O*r* y su ordenada *pr*, que es a su seno *qr* como el eje menor de la elipse al mayor, tendremos el lugar correcto del cuerpo, *p*. Cuando el ángulo N−AOQ+D resulta ser negativo, el signo + del ángulo E debe cambiarse en todas partes por −, y el signo − por +. Y lo mismo debe entenderse de los signos de los ángulos G e I, cuando resultan ser negativos los ángulos N−AOQ−E+F y N−AOQ−E−G+H. Pero la serie infinita AOQ+E+G+I+etc., converge tan deprisa que rara vez será necesario proceder más allá del segundo término E. Y el cálculo está basado sobre el teorema de que el área APS varía como la diferencia entre el arco AQ y la recta trazada desde el foco S perpendicularmente sobre el radio OQ.

Por un cálculo semejante se resuelve el problema en la hipérbola. Sea O su centro, A su vértice, S su foco y OK la asíntota; y supóngase que es conocida la cantidad de área a desgajar, siendo proporcional al tiempo. Sea ella A, y supóngase por conjetura que conocemos la posición de una recta SP, que desgaja un área APS próxima a la verdadera. Unase OP, y desde A y P hasta la asíntota trácense AI y PK.



paralelas a la otra asíntota; y por la tabla de logaritmos será conocida el área AIKP, e igual además al área OPA que, substraída del triángulo OPS, dejará el área desgajada APS. Y aplicando 2APS−2A, o 2A−2APS, o el doble de la diferencia del área A que iba a desgajarse, y el área APS que es desgajada, a la línea SN que se abate desde el foco S perpendicularmente sobre la tangente TP, tendremos la longitud de la cuerda PQ. La cuerda PQ debe inscribirse entre A y P si el área APS desgajada es mayor que el área A a desgajar, pero en caso distinto debe inscribirse hacia el lado contrario del punto P. Y el punto Q será el lugar del cuerpo más exactamente. Y repitiendo la computación el lugar puede encontrarse siempre con más y más exactitud.

Y mediante tales cálculos tenemos una solución analítica general del problema. Pero el cálculo particular que sigue es más adecuado a propósitos astronómicos. Suponiendo que AO, OB y OD sean los semiejes de la elipse, L su *latus rectum* y D la diferencia entre el semieje menor OD y $\frac{1}{2}$L, la mitad del *latus rectum*, encuéntrese el ángulo Y, cuyo seno pueda ser al radio como el rectángulo bajo aquella diferencia D y la semisuma AO+OD de los ejes es al cuadrado del eje mayor AB. Hállese también un ángulo Z cuyo seno pueda ser al radio como el doble del rectángulo bajo la distancia de los focos SH y esa diferencia D es al triple del cuadrado del semieje mayor AO. Una vez hallados esos ángulos, puede determinarse el lugar del cuerpo.



Tómese el ángulo T proporcional al tiempo en que se describió el arco BP, o igual a lo que se denomina movimiento medio; y tómese un ángulo V, la primera ecuación del movimiento medio, al ángulo Y, la ecuación primera mayor, como el seno del doble del ángulo T es al radio; y tómese un ángulo X, la segunda ecuación, al ángulo Z, la ecuación segunda mayor, como el cubo del seno del ángulo T es al cubo del radio. Luego tómese el ángulo BHP, siendo el movimiento medio igualado igual a T+V+X, la suma de los ángulos T, V y X, si el ángulo T es menor que uno recto, o igual a T+X−V, diferencia de los mismos si ese ángulo T es mayor que un ángulo recto y menor

que dos; y si HP se encuentra con la elipse en P, trácese SP, que desgajará el área BSP, casi proporcional al tiempo.

Esta práctica parece suficientemente sencilla, pues siendo muy pequeños los ángulos V y X medidos en fracciones de segundos, si se quiere, bastará hallar dos o tres de sus primeras cifras. Pero al mismo tiempo es lo suficientemente precisa para responder a la teoría de los movimientos planetarios. Pues incluso en la órbita de Marte, donde la ecuación mayor del centro asciende a diez grados, el error apenas excederá un segundo. Pero cuando se determina el ángulo BHP del movimiento medio igualado, el ángulo BSP del verdadero movimiento y la distancia SP se hallan fácilmente por los métodos conocidos.

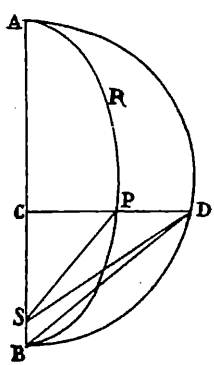
Hasta aquí lo concerniente al movimiento de cuerpos en líneas curvas. Pero puede llegar a suceder también que un cuerpo en movimiento ascienda o descienda en línea recta; y a continuación entraré en la explicación de lo concerniente a ese tipo de movimientos.

SECCION VII

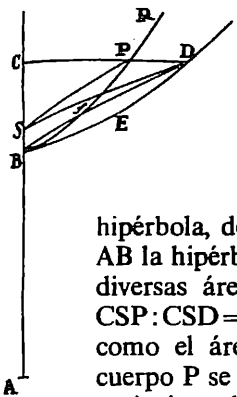
Sobre el ascenso y el descenso rectilíneo de los cuerpos

PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA XXIV

Suponiendo que la fuerza centrípeta sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, se pide definir los espacios que describe en tiempos dados un cuerpo que cae en línea recta.



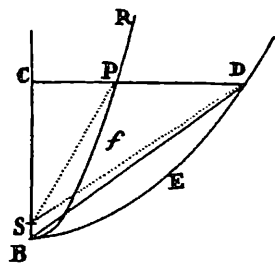
CASO 1. Si el cuerpo no cae perpendicularmente (por el Corolario I, Proposición XIII) describirá alguna sección cónica cuyo foco estará situado en el centro de fuerza. Supongamos que la sección cónica sea ARPB y que S es su foco. Y, primero, si la figura resulta ser una elipse, descríbase el semicírculo ADB sobre el eje mayor AB, dejando que la recta DPC atraviese el cuerpo en caída cortando en ángulos rectos al eje; trazando DS y PS, el área ASD será proporcional al área ASP y, por lo mismo, también al tiempo. Sin modificar el eje AB, disminúyase continuamente la anchura de la elipse, y el área ASD permanecerá siempre proporcional al tiempo. Supóngase que esa anchura es disminuida hasta lo infinito; como en ese caso la órbita APB coincide con el eje AB, y el foco S con el punto extremo del eje B, el cuerpo descenderá en la línea recta AC, y el área ABD se hará proporcional al tiempo. En consecuencia, si se toma el área ABD proporcional al tiempo, y



desde el punto D se abate perpendicularmente la recta DC sobre la recta AB, se conocerá el espacio AC que el cuerpo describe en un tiempo dado por su perpendicular trazada desde el lugar A. Q.E.I.

CASO 2. Si la figura RPB es una hipérbola, descríbase sobre el mismo diámetro principal AB la hipérbola rectangular BED; como se dan entre las diversas áreas y las alturas CP y CD las relaciones, CSP:CSD=CB*f*P:CBED=SP*f*B:SDEB=CP:CD, y como el área SP*f*B varía como el tiempo en que el cuerpo P se moverá a través del arco P*f*B, el área SDEB variará también como ese tiempo. Disminúyase hasta lo infinito el *latus rectum* de la hipérbola RPB, permaneciendo inalterado el eje transversal; y el arco PB coincidirá con la recta CB, el foco S con el vértice B y la recta SD con la recta BD. En consecuencia, el área BDEB variará como el tiempo en el cual el cuerpo C, por su descenso perpendicular, describa la línea CB. Q.E.I.

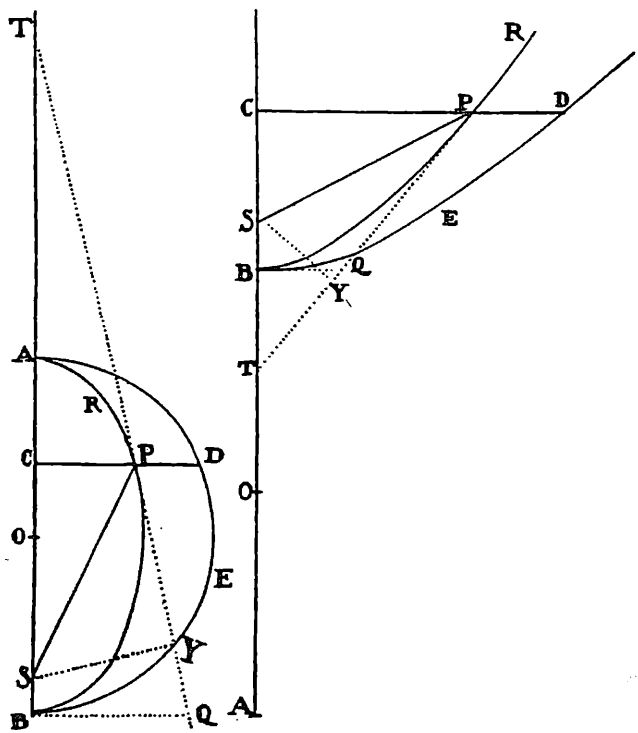
CASO 3. Y por el mismo argumento, si la figura RPB es una parábola y se describe hasta el mismo vértice principal B otra parábola BED, que pueda siempre permanecer dada mientras la parábola anterior en cuyo perímetro se mueve el cuerpo P, teniendo su *latus rectum* disminuido y reducido a nada, acaba coincidiendo con la línea CB, el segmento parabólico BDEB variará como el tiempo en el cual ese cuerpo P o C descenderá al centro S o B. Q.E.I.



PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA IX

Suponiendo las cosas antes descubiertas, afirmo que la velocidad de un cuerpo descendente en cualquier lugar C *es a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo alrededor del centro* B *a la distancia* BC *como la raíz cuadrada de la razón de* AC, *la distancia del cuerpo desde el vértice remoto* A *del círculo o hipérbola rectangular, a* ½AB, *principal semidiámetro de la figura.*

Biséctese en O el diámetro AB común a ambas figuras RPB y DEB; trácese la recta PT que pueda tocar a la figura RPB en P, y que corte análogamente el diámetro común AB (prolongado, si fuese necesario) en T; sea SY perpendicular a esta línea, y BQ perpendicular a este diámetro, suponiéndose que el *latus rectum* de la figura RPB sea L. Partiendo del Corolario IX, Proposición XVI, es manifiesto que la velocidad de un cuerpo, que se mueva en cualquier lugar P en la línea RPB alrededor del centro S, es a la velocidad de un cuerpo que describa un círculo alrededor del mismo centro a la distancia SP como la raíz cuadrada de la razón del rectángulo $\frac{1}{2}L \times SP$ a SY^2. Pues por las propiedades de las secciones cónica $AC \times CB$ es a CP^2 como 2AO a L, y en consecuencia $\frac{2CP^2 \times AO}{AC \times CB}$ es igual a L. De ahí que esas velocidades son entre sí como la raíz cuadrada de la razón



de $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB}$ es a SY^2. Además, por las propiedades de las secciones cónicas $CO : BO = BO : TO$,

por lo cual $CO + BO : BO = BO + TO : TO$,

y $CO : BO = CB : BT$.

Por esto $BO - CO : BO = BT - CB : BT$

y $AC : AO = TC : BT = CP : BQ$;

y como $CP = \frac{BQ \times AC}{AO}$,

se obtiene $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB}$ igual a $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$.

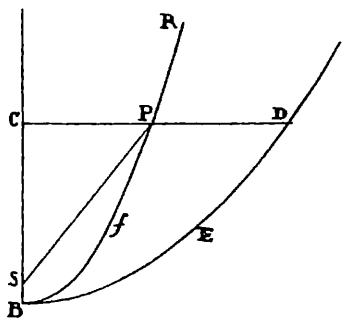
Supóngase ahora que CP, la anchura de la figura RPB, se disminuye hasta lo infinito, de manera que el punto P pueda llegar a coincidir con el punto C, y el punto S con el punto B, y la línea SP con la línea BC, y la línea SY con la línea BQ; la velocidad del cuerpo que ahora desciende perpendicularmente por la línea CB será a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo alrededor del centro B, a la distancia BC, como la raíz cuadrada de la razón de $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ es a SY^2, esto es, despreciando las razones de igualdad de SP a BC, y BQ^2 a SY^2, como la raíz cuadrada de la razón de AC a AO, o $\frac{1}{2}$AB. Q.E.D.

COROLARIO I. Cuando los puntos B y S llegan a coincidir, TC será a TS como AC a AO.

COROLARIO II. Si un cuerpo que gira en cualquier círculo a una distancia dada del centro ve su movimiento invertido hacia arriba, ascenderá hasta el doble de su distancia con respecto al centro.

PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA X

Si la figura BED *es una parábola, afirmo que la velocidad de un cuerpo descendente en cualquier lugar* C *es igual a la velocidad con la cual un cuerpo puede describir uniformemente un círculo alrededor del centro* B *a mitad del intervalo* BC.



Pues (por el Corolario VII, Proposición XVI) la velocidad de un cuerpo que describe una parábola RPB alrededor del centro S, en cualquier lugar P, es igual a la velocidad de un cuerpo que describe uniformemente un círculo alrededor del mismo centro S a mitad del intervalo SP. Disminúyase hasta lo infinito la anchura CP de la parábola, de manera que el arco parabólico P*f*B pueda llegar a coincidir con la recta CB, el centro S con el vértice B, y el intervalo SP con el intervalo BC, y la Proposición resultará manifiesta. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXXV. TEOREMA XI

Suponiendo las mismas cosas, afirmo que el área de la figura DES, *descrita por el radio indefinido* SD, *es igual al área que un cuerpo con un radio igual a la mitad del latus rectum de la figura* DES *describe en el mismo tiempo girando uniformemente alrededor del centro* S.

Pues supóngase que un cuerpo describe en la mínima partícula de tiempo al caer la línea infinitamente pequeña C*c*, mientras otro cuerpo, que gira uniformemente alrededor del centro S en el círculo O*Kk* describe el arco K*k*. Trácense las perpendiculares CD y *cd*, que encuentran la figura DES en D y *d*. Unanse SD, S*d*, SK y S*k*, trácese D*d* encontrando el eje AS en T y desde allí abátase la perpendicular SY.

CASO 1. Si la figura DES es un círculo, o una hipérbola rectangular, biséctese su diámetro transversal AS en O, y SO será la mitad del *latus rectum*. Y como

$$TC : TD = Cc : Dd$$

y

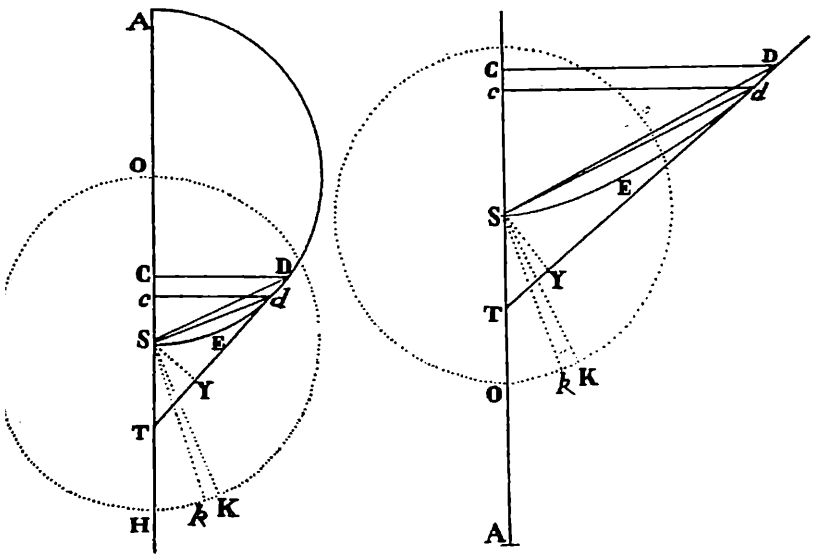
$$TD : TS = CD : SY,$$

se sigue

$$TC : TS = CD \times Cc : SY \times Dd.$$

Pero (por el Corolario I, Proposición XXXIII)

$$TC : TS = AC : AO,$$



si en la confusión de los puntos D y *d* se toman las razones últimas de las líneas,

$$AC : AO \text{ o } SK = CD \times Cc : SY \times Dd.$$

Además, la velocidad del cuerpo que desciende en C es a la velocidad de un cuerpo que describa un círculo alrededor del centro S con el intervalo SC como la raíz cuadrada de la razón de AC a AO o SK (por la Proposición XXXIII); y esta velocidad es a la velocidad de un cuerpo que describa el círculo OK*k* como la raíz cuadrada de la razón de SK a SC (por el Corolario VI, Proposición IV); y, en consecuencia, la primera velocidad es a la última, esto es, la pequeña línea C*c* es al arco K*k*, como la raíz cuadrada de la razón de AC a SC, esto es, guardando la razón de AC a CD. Por tanto,

$$CD \times Cc = AC \times Kk,$$

luego, $AC : SK = AC \times Kk : SY \times Dd,$

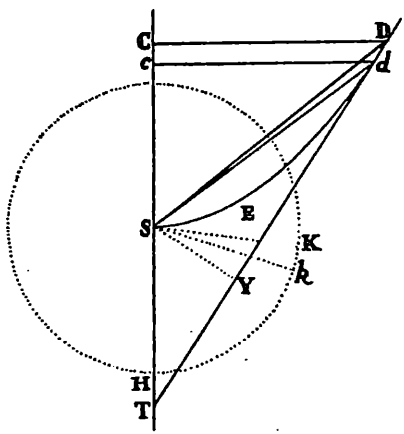
y $SK \times Kk = SY \times Dd,$

y $\frac{1}{2}SK \times Kk = \frac{1}{2}SY \times Dd,$

esto es, el área KS*k* es igual al área SD*d*. Con lo cual en cada momento del tiempo se generan dos partículas iguales KS*k* y SD*d* de áreas, que si su magnitud es disminuida e incrementado su número hasta lo infinito llegan a la razón de igualdad y, en

consecuencia (por el Corolario del Lema IV), las áreas enteras generadas simultáneamente son siempre iguales. Q.E.D.

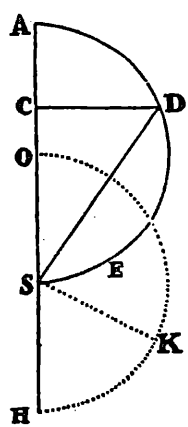
CASO 2. Pero si la figura DES es una parábola descubriremos, como antes, que $CD \times Cc : SY \times Dd = TC : TS$, esto es, $= 2:1$; por lo cual $\frac{1}{4}CD \times Cc = \frac{1}{2}SY \times Dd$.



Pero la velocidad del objeto que cae en C es igual a la velocidad con la cual un círculo podría describirse uniformemente con el intervalo BC (por la Proposición XXXIV).

Y esta velocidad a la velocidad con la cual puede describirse un círculo con el radio SK, esto es, la pequeña línea Cc es al arco Kk (por el Corolario VI, Proposición IV) como la raíz cuadrada de la razón de SK a $\frac{1}{2}SC$; esto es, conservando la razón de SK a $\frac{1}{2}CD$. Por consiguiente, $\frac{1}{2}SK \times Kk$ es igual a $\frac{1}{4}CD \times Cc$, y por lo mismo igual a $\frac{1}{2}SY \times Dd$; esto es, el área KSk es igual al área SDd, como más arriba. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXXVI. PROBLEMA XXV



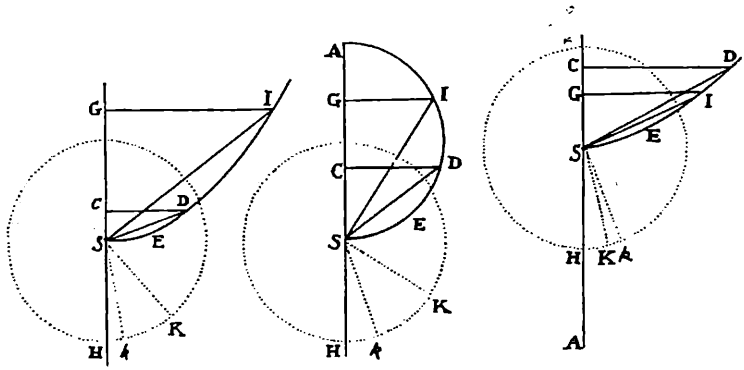
Determinar los tiempos del descenso de un cuerpo que cae desde un lugar dado A.

Sobre el diámetro AS, distancia del cuerpo respecto del centro al comienzo, descríbase el semicírculo ADS, así como el semicírculo OKH igual al anterior, alrededor del centro S.

Desde cualquier lugar C del cuerpo levántese la ordenada CD. Unase SD y hágase el sector OSK igual al área ASD. Es evidente (por la Proposición XXXV) que al caer el cuerpo describirá el espacio AC en el mismo tiempo en que otro cuerpo, girando uniformemente alrededor del centro S, puede describir el arco OK. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XXXVII. PROBLEMA XXVI

Definir los tiempos de ascenso o descenso de un cuerpo proyectado hacia arriba o hacia abajo desde un lugar dado.

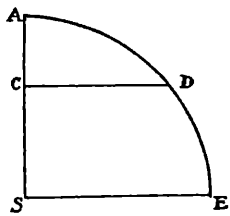


Supongamos que el cuerpo parte del lugar dado G, en la dirección de la línea GS, con cualquier velocidad. Tómese GA a ½AS como el cuadrado de la razón de esta velocidad a la velocidad uniforme en un círculo, con la cual el cuerpo pueda girar en torno al centro S con el intervalo dado SG.

Si esa razón es la misma que la del número 2 al 1, el punto A es infinitamente remoto; en cuyo caso ha de describirse una parábola con cualquier *latus rectum* para el vértice S y eje SG, como se demuestra en la Proposición XXXIV. Pero si esa razón es inferior o superior a la razón de 2 a 1, en el primer caso ha de describirse un círculo y en el segundo una hipérbola rectangular sobre el diámetro SA, como se demuestra en la Proposición XXXIII. Descríbase entonces en torno al centro S, con un radio igual a la mitad del *latus rectum*, el círculo H*k*K; y en el lugar G del cuerpo ascendente o descendente, y en cualquier otro lugar C, levantar las perpendiculares GI, CD, que encuentran la sección cónica o círculo en I y D. Uniendo entonces SI y SD, iguálense los sectores HSK y HS*k* a los segmentos SEIS y SEDS, y (por la Proposición XXXV) el cuerpo G describirá el espacio GC en el mismo tiempo en que el cuerpo K pueda describir el arco K*k*. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XXXVIII. TEOREMA XII

Suponiendo que la fuerza centrípeta sea proporcional a la altura o distancia de los lugares al centro, afirmo que los tiempos y velocidades de cuerpos en caída, y los espacios que describen, son respectivamente proporcionales a los arcos, y a los senos y senos versos de los arcos.



Supongamos que el cuerpo cae desde cualquier lugar A de la recta AS; y en torno al centro de fuerza S, con el radio AS, descríbase el cuadrante circular AE; siendo CD el seno de cualquier arco AD; y el cuerpo A, en el tiempo AD, describirá al caer el espacio AC, y en el lugar C adquirirá la velocidad CD.

Esto se demuestra del mismo modo partiendo de la Proposición X, tal como la Proposición XXXII se demostraba partiendo de la Proposición XI.

COROLARIO I. Por lo cual son iguales los tiempos en los que un cuerpo cayendo desde el lugar A llega al centro S y otro cuerpo girando describe el arco de cuadrante ADE.

COROLARIO II. Por consiguiente, son iguales todos los tiempos en que llegan al centro cuerpos en caída desde cualesquiera lugares. Pues todos los tiempos periódicos de cuerpos en revolución son iguales (por Corolario III, Proposición IV).

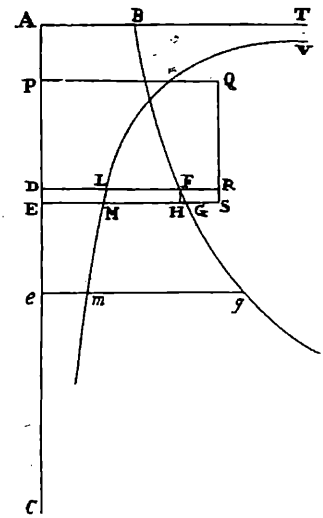
PROPOSICIÓN XXXIX. PROBLEMA XXVII

Suponiendo una fuerza centrípeta de cualquier tipo, y concediendo las cuadraturas de figuras curvilíneas, se pide hallar la velocidad de un cuerpo ascendiendo o descendiendo en línea recta en los diversos lugares que atraviesa, así como también el tiempo en que llegará a cualquier parte; y a la inversa.

Supongamos que el cuerpo E cae desde cualquier lugar A siguiendo la recta ADEC; y desde su lugar E imagínese una perpendicular EG levantada siempre proporcionalmente a la fuerza centrípeta en ese lugar tendente al centro C; sea BFG una curva, lugar del punto G. Y al comienzo del movimiento

supóngase que EG coincide con la perpendicular AB; y la velocidad del cuerpo en cualquier lugar E será como una línea recta cuyo cuadrado es igual al área curva ABGE. Q.E.I.

En EG tómese EM inversamente proporcional a una recta cuyo cuadrado es igual al área ABGE, siendo VLM una curva donde está siempre situado el punto M, respecto de la cual la recta AB prolongada es una asíntota; y el tiempo en el cual el cuerpo al caer describa la línea AE será como el área curva ABTVME. Q.E.I.



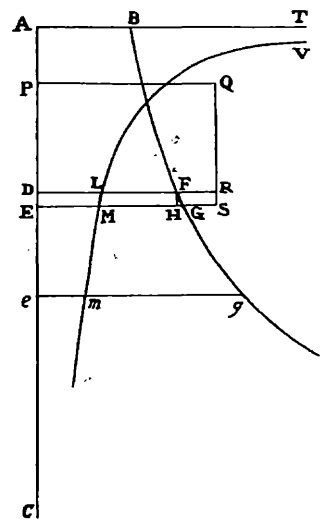
Pues en la recta AE tómese la línea mínima DE de una longitud dada, haciendo que DLF sea el lugar de la línea EMG cuando el cuerpo estaba en D; y si la fuerza centrípeta es tal que una recta, cuyo cuadrado sea igual al área ABGE, es como la velocidad del cuerpo en caída, el área misma será como el cuadrado de esa velocidad; esto es, si por las velocidades en D y E escribimos V y V+I, el área ABFD será como VV, y el área ABGE como VV+2VI+II; y por subtracción el área DFGE como 2VI+II, por lo cual $\frac{DFGE}{DE}$ será como $\frac{2VI+II}{DE}$; esto es, si tomamos las primeras razones de esas cantidades cuando eran justamente nacientes, la longitud DF es como la cantidad $\frac{2VI}{DE}$, y en consecuencia también como la mitad de esa cantidad $\frac{I \times V}{DE}$. Pero el tiempo en el que el cuerpo al caer describe la línea mínima DE es directamente como esa línea e inversamente como la velocidad V; y la fuerza será directamente como el incremento I de la velocidad e inversamente como el tiempo; con lo cual si tomamos las primeras razones cuando esas cantidades eran justamente nacientes como $\frac{VI}{DE}$, esto es, como la longitud DF. En consecuencia, una fuerza proporcional a DF o EG hará que

el cuerpo descienda con una velocidad que es como la recta cuyo cuadrado es igual al área ABGE. Q.E.D.

Además, como el tiempo en que puede describirse una línea mínima DE de una longitud dada es inversamente como la velocidad y, por lo mismo, inversamente como una recta cuyo cuadrado es igual al área ABFD; y puesto que la línea DL y, en consecuencia, el área naciente DLME, serán inversamente como la misma línea recta, el tiempo será como el área DLME, y la suma de todos los tiempos será como la suma de todas las áreas; esto es (por el Corolario del Lema IV), la totalidad del tiempo en el cual se describe la línea AE será como todo el área ATVME. Q.E.D.

COROLARIO I. Sea P el lugar desde el cual debería caer un cuerpo, urgido por cualquier fuerza centrípeta uniforme conocida (como comúnmente se supone a la gravedad), de manera que pudiese adquirir en el lugar D una velocidad igual a la velocidad que otro cuerpo, cayendo por cualquier fuerza, ha adquirido en ese lugar D. Tómese DR en la perpendicular DF, de tal manera que DR pueda ser a DF como esa fuerza uniforme a la otra fuerza en el lugar D. Complétese el rectángulo PDRQ, y desgájese el área ABFD igual a ese rectángulo. A será entonces el lugar desde el cual cayó el otro cuerpo. Pues completando el rectángulo DRSE, como el área ABFD es al área DFGE como VV a 2VI, y por lo mismo como $\frac{1}{2}$V a I, esto es, como la mitad de la velocidad total al incremento de la velocidad del cuerpo que cae por influjo de la fuerza variable; y de modo semejante el área PQRD al área DRSE como la mitad de la velocidad total al incremento de la velocidad del cuerpo que cae por influjo de la fuerza uniforme; y como esos incrementos (por razón de la igualdad de los tiempos nacientes) son como las fuerzas generadoras, esto es, como las ordenadas DF y DR, y en consecuencia como las áreas nacientes DFGE y DRSE, las áreas totales ABFD y PQRD serán entre sí como las mitades de las velocidades completas; y puesto que las velocidades son iguales serán iguales también.

COROLARIO II. De ahí que si cualquier cuerpo es proyectado hacia arriba o hacia abajo con una velocidad dada desde cualquier lugar D, y está actuando sobre él la ley dada de la fuerza centrípeta, su velocidad en cualquier otro lugar, como *e*, se hallará trazando la ordenada *eg*, y tomando esa velocidad a la velocidad en el lugar D como una recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo PQRD, incrementado por el área curvilínea DF*ge*, si el



lugar *e* está por debajo del lugar D, o disminuido por el área DF*ge* si está por encima, es a la recta cuyo cuadrado es igual al rectángulo PQRD solo.

COROLARIO III. El tiempo se conoce también levantando la ordenada *em* inversamente proporcional a la raíz cuadrada de PQRD+ o −DF*ge*, y tomando el tiempo en el cual describió el cuerpo la línea D*e* al tiempo en que otro cuerpo cayó con una fuerza uniforme desde P, y al caer llegó a D, en la proporción del área curvilínea DL*me* al rectángulo 2PD × DL. Pues el tiempo en el que un cuerpo cayendo con una fuerza uniforme describió la línea PD es al tiempo en el que el mismo cuerpo describió la línea PE como la raíz cuadrada de la razón de PD a PE; esto es (tomando la mínima línea DE justamente naciente), como la razón de PD a PD + ½DE o 2PD + DE, y, por substracción, al tiempo en el que el cuerpo describió la línea mínima DE, como 2PD a DE, y por tanto como el rectángulo 2PD × DL al área DLME; y el tiempo en el que el cuerpo describió la mínima línea DE es al tiempo en el que el cuerpo con un movimiento variable describió la línea D*e* como el área DLME al área DL*me*; y, por consiguiente, el primero de los tiempos mencionados es al último como el rectángulo 2PD × DL al área DL*me*.

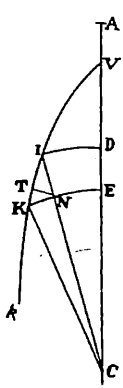
SECCION VIII

Sobre la determinación de órbitas en las que girarán cuerpos sometidos a cualquier tipo de fuerza centrípeta.

PROPOSICIÓN XL. TEOREMA XIII

Si un cuerpo sometido a cualquier fuerza centrípeta se ve movido de cualquier manera, y si otro cuerpo asciende o desciende en una línea recta, y sus velocidades son iguales en un caso de alturas iguales, sus velocidades serán iguales también en todas las alturas iguales.

Un cuerpo desciende desde A a través de D y E hasta el centro C, y otro cuerpo se mueve desde V siguiendo la curva VIK*k*. Desde el centro C, con cualesquiera distancias, descríbanse los círculos concéntricos DI y EK, que encuentran a la recta AC en D y E, y a la curva VIK en I y K. Trácese IC encontrando a KE en N, y abátase sobre IK la perpendicular NT; y hágase que el intervalo DE o IN entre las circunferencias de los círculos sea muy pequeño, imaginando que los cuerpos en D e I tienen velocidades iguales. Entonces, como las distancias CD y CI son iguales, las fuerzas centrípetas en D e I serán iguales también.



Exprésense esas fuerzas por las iguales líneas mínimas DE e IN; y hágase que la fuerza IN (por el Corolario II de las Leyes del Movimiento) se descomponga en otras dos, NT e IT. Entonces la fuerza NT actuando en la dirección de la línea NT perpendicular a la senda ITK del cuerpo no afectará para nada ni cambiará la velocidad del cuerpo en esa senda, sino que

lo lo apartará de su curso rectilíneo, haciendo que se desvíe ntinuamente de la tangente de la órbita y prosiga por la senda rva ITK*k*. Por consiguiente, toda esa fuerza se gastará oduciendo este efecto; pero la otra fuerza IT, que actúa en la rección del curso del cuerpo, será empleada en acelerarlo, y en mínimo tiempo dado producirá una aceleración proporcional sí misma. En consecuencia, las aceleraciones de los cuerpos en e I, producidas en tiempos iguales, son como las líneas DE e (si tomamos las primeras razones de las líneas nacientes DE, I, IK, IT, NT); y en tiempos desiguales como el producto de as líneas y los tiempos. Pero los tiempos en que se describen E e IK son, en virtud de las velocidades iguales (en D e I) mo los espacios descritos DE e IK, y en consecuencia las eleraciones en el paso de los cuerpos a través de las líneas DE IK son como DE e IT, y DE e IK conjuntamente; esto es, mo el cuadrado de DE al rectángulo IT × IK. Pero el ctángulo IT × IK es igual al cuadrado de IN, esto es, igual al adrado de DE; por lo cual las aceleraciones generadas en el so de los cuerpos desde D e I hasta E y K son iguales. En nsecuencia, las velocidades de los cuerpos en E y K son mbién iguales; y por el mismo razonamiento resultarán empre iguales en cualesquiera distancias iguales subsiguientes. .E.D.

Por el mismo razonamiento, cuerpos de iguales velocidades a uales distancias del centro se verán igualmente retrasados en ı ascensión a distancias iguales. Q.E.D.

COROLARIO I. Por consiguiente, si un cuerpo oscila colndo de una cuerda, o se ve forzado a moverse en una línea rva por cualquier impedimento muy pulido y deslizante; y tro cuerpo asciende o desciende en línea recta, y sus velocidaes son iguales en cualquier altura igual, sus velocidades serán mbién iguales en todas las otras alturas iguales. Pues mediante hilo del cuerpo pendular, o el impedimento de un recipiente erfectamente pulido se verificará lo mismo que mediante la erza transversal NT. El cuerpo no es acelerado ni retrasado, no únicamente obligado a abandonar su curso rectilíneo.

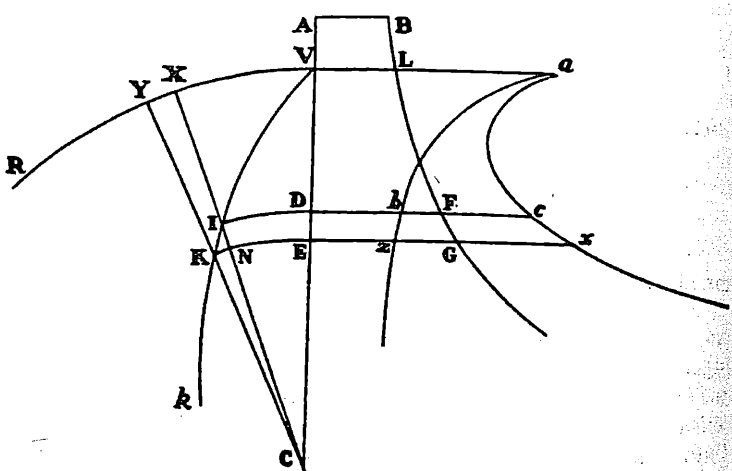
COROLARIO II. Supongamos que la cantidad P es la mayor istancia al centro a la cual puede ascender un cuerpo, tanto si scila como si gira en una curva, y por tanto la misma que scendería proyectada hacia arriba desde cualquier punto de na curva con la velocidad que tiene en ese punto. Sea la antidad A la distancia del cuerpo con respecto al centro en

cualquier otro punto de la órbita; y sea siempre la fuerza centrípeta como la potencia A^{n-1}, cuyo índice $n-1$ es cualquier número n disminuido por la unidad. La velocidad en cualquier altura A será entonces como $\sqrt{(P^n - A^n)}$, estando dada por eso mismo. Pues por la Proposición XXXIX la velocidad de un cuerpo que asciende y desciende en línea recta está en esa misma razón.

PROPOSICIÓN XLI. PROBLEMA XXVIII

Suponiendo una fuerza centrípeta de cualquier tipo, y concediendo las cuadraturas de figuras curvilíneas, se pide hallar tanto las curvas en que se moverán los cuerpos como los tiempos de sus movimientos en las curvas halladas.

Supongamos que cualquier fuerza centrípeta tiende hacia el centro D, pidiéndose hallar la curva VIK*k*. Considérese dado el círculo VR, descrito desde el centro C con cualquier radio CV; y desde el mismo centro descríbanse cualesquiera otros círculos



ID y KE que corten a la curva en I y K, y a la recta CV en D y E. Trácese entonces la recta CNIX, que corta a los círculos KE y VR en N y X, y la recta CKY que encuentra al círculo VR en Y. Hágase que los puntos I y K estén proximísimos, y que el cuerpo vaya desde V a través de I y K hasta *k*; sea A el lugar

desde el cual ha de caer otro cuerpo para adquirir en el lugar D una velocidad igual a la velocidad del primer cuerpo en I. Y manteniéndose las cosas como en la Proposición XXXIX, la línea mínima IK, descrita en el menor de los tiempos dados, será como la velocidad y, por consiguiente, como la recta cuyo cuadrado es igual al área ABFD, estando dado el triángulo ICK proporcional al tiempo, y por lo mismo KN será inversamente como la altura IC; esto es (si está dada cualquier cantidad Q, y denominamos A a la altura IC), como $\frac{Q}{A}$. Esta cantidad $\frac{Q}{A}$ puede llamarse Z, y supóngase que la magnitud de Q puede ser tal que en algún caso

$$\sqrt{ABFD} : Z = IK : KN,$$

y entonces en todos los casos

$$\sqrt{ABFD} : Z = IK : KN,$$

y $$ABFD : ZZ = IK^2 : KN^2,$$

y por substracción

$$ABFD - ZZ : ZZ = IN^2 : KN^2,$$

por lo cual

$$\sqrt{(ABFD - ZZ)} : Z \text{ o } \frac{Q}{A} = IN : KN,$$

y $$A \times KN = \frac{Q \times IN}{\sqrt{(ABFD - ZZ)}}.$$

Puesto que $$YX \times XC : A \times KN = CX^2 : AA,$$

se sigue que $$YX \times XC = \frac{Q \times IN \times CX^2}{AA\sqrt{(ABFD - ZZ)}}.$$

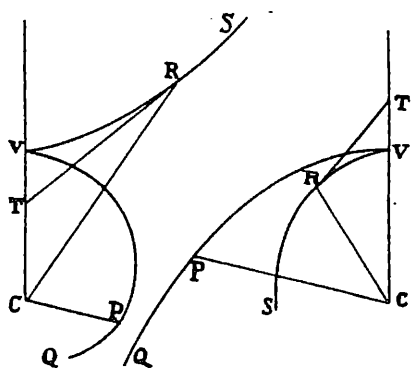
Así pues, en la perpendicular DF deben tomarse continuamente D*b* y D*c* iguales a $\frac{Q}{2\sqrt{(ABFD - ZZ)}}$ y $\frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{(ABFD - ZZ)}}$ respectivamente, haciendo que se describan las curvas *ab* y *ac*, lugares de los puntos *b* y *c*; y desde el punto V levántese la perpendicular V*a* a la línea AC, desgajando las áreas curvas VD*ba* y VD*ca*, levantando también las ordenadas E*z* y E*x*. Entonces, como el rectángulo D*b* × IN o D*bz*E es igual a la mitad del rectángulo A × KN, o al triángulo ICK; y el rectángulo D*c* × IN o D*cx*E es igual a la mitad del rectángulo YX × XC, o al triángulo XCY; esto es, porque las partículas nacientes D*bz*E e ICK de las áreas VD*ba* y VIC son siempre iguales; y las partículas nacientes D*cx*E y XCY de las áreas VD*ca* y VCX son

siempre iguales, el área generada VD*ba* será igual al área generada VIC y en esa misma medida proporcional al tiempo; y el área generada VD*ca* es igual al sector generado VCX. Si, en consecuencia, está dado cualquier tiempo durante el cual el cuerpo se movió desde V, estará dada también el área proporcional a él VD*ba*; y por lo mismo estará dada la altura del cuerpo CD o CI; y el área VD*ca*, y el sector VCX igual a ella, junto con su ángulo VCI. Pero estando dados el ángulo VCI y la altura CI, estará dado también el lugar I, donde se hallará el cuerpo al terminar ese tiempo. Q.E.I.

COROLARIO I. Por consiguiente, las alturas máximas y mínimas de los cuerpos, esto es, los ápsides de las curvas, pueden hallarse con suma facilidad. Pues los ápsides son aquellos puntos donde una recta IC trazada a través del centro cae perpendicularmente sobre las curvas VIK; cosa que llega a acontecer cuando se hacen iguales las rectas IK y NK; esto es, cuando el área ABFD es igual a ZZ.

COROLARIO II. Así también puede hallarse fácilmente el ángulo KIN, con el que la curva corta en cualquier lugar a la línea IC, mediante la altura dada del cuerpo, que es IC; basta hacer el seno de ese ángulo al radio como KN a IK, esto es, como Z a la raíz cuadrada del área ABFD.

COROLARIO III. Si se describe una sección cónica VRS con el centro C y el vértice principal V, y desde cualquier punto de ella, como R, se traza la tangente RT encontrando el eje CV prolongado indefinidamente en el punto T; y luego uniendo CR se traza la recta CP, igual a la ábcisa CT, formando un ángulo VCP proporcional al sector VCR; y si una fuerza centrípeta inversamente proporcional a los cubos de las distancias de los lugares al centro tiende hacia el centro C; y desde el lugar V sale un cuerpo con velocidad exacta siguiendo la dirección de una línea perpendicular a la recta CV, ese cuerpo proseguirá en una curva VPQ que tocará siempre el punto P; y, en consecuencia, si la sección cónica VRS fuese una hipérbola el cuerpo descen-



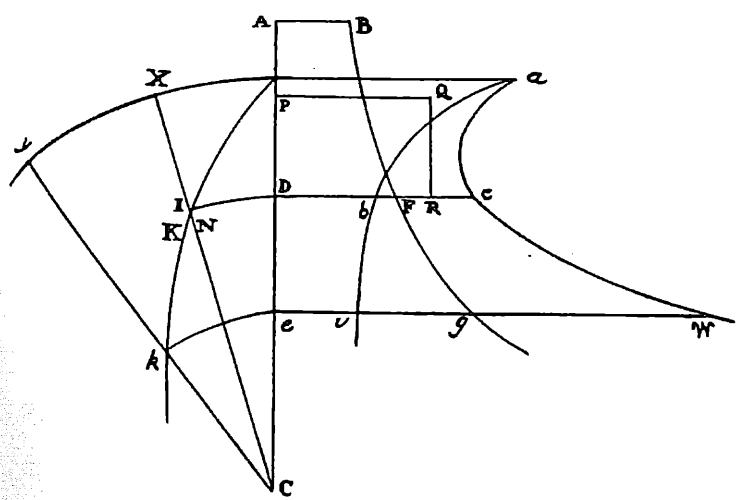
derá hacia el centro, pero si fuese una elipse ascenderá continuamente y se alejará más y más hasta lo infinito. Al contrario, si un cuerpo dotado de alguna velocidad se aleja del lugar V y, según sea la figura VRS una hipérbola o una elipse, comienza a descender oblicuamente hacia el centro o a ascender oblicuamente desde él, la curva puede hallarse incrementando o disminuyendo el ángulo VCP en una razón dada. Y al hacerse centrífuga la fuerza centrípeta el cuerpo ascenderá oblicuamente en la curva VPQ, que se halla tomando el ángulo VCP proporcional al sector elíptico VRC, y la longitud CP igual a la longitud CT, como antes.

Todas estas cosas se siguen de la Proposición precedente, por la cuadratura de cierta curva cuya invención omito en aras de la brevedad por ser fácil.

PROPOSICIÓN XLII. PROBLEMA XXIX

Estando dada la ley de la fuerza centrípeta, se pide encontrar el movimiento de un cuerpo que parte de un lugar dado, con una velocidad dada también, en la dirección de una recta dada.

Supongamos lo mismo que en las tres Proposiciones precedentes; el cuerpo sale del lugar I en la dirección de la línea



mínima IK, con la misma velocidad que otro cuerpo, cayendo con una fuerza centrípeta uniforme desde el lugar P, puede adquirir en D; sea esta fuerza uniforme a la fuerza con la cual el cuerpo se ve inicialmente urgido en I como DR a DF.

Hágase que el cuerpo continúe hacia *k*; y alrededor del centro C, con el radio C*k*, descríbase el círculo *ke*, que se encuentra con la recta PD en *e*, y levántese allí las líneas *eg*, *ev* y *ew*, aplicadas ordenadamente a las curvas BF*g*, *abv*, *acw*. Partiendo del rectángulo dado PDRQ y de la ley dada de la fuerza centrípeta, por la cual es movido el primer cuerpo, está dada también la línea curva BF*g*, por la construcción de la Proposición XXVII y su Corolario I. Entonces por el ángulo dado CIK está dada la proporción de las líneas nacientes IK y KN; y, en consecuencia, por la construcción del Problema XXVIII, está dada la cantidad Q, con las curvas *abv* y *acw*. Por tanto, al final de cualquier tiempo D*bve*, estarán dados tanto la altura del cuerpo C*e* o C*k* como el área D*cwe*, con el sector igual a ella XC*y*, el ángulo IC*k* y el lugar *k*, donde se encontrará entonces el cuerpo. Q.E.I.

Suponemos en estas Proposiciones que la fuerza centrípeta varía en su alejamiento del centro con arreglo a alguna ley, que cualquiera puede discrecionalmente imaginar, pero que a iguales distancias del centro es en todas partes la misma.

He considerado hasta aquí los movimientos de cuerpos en órbitas inmóviles. Queda ahora por añadir algo sobre sus movimientos en órbitas que giran en torno a los centros de fuerza.

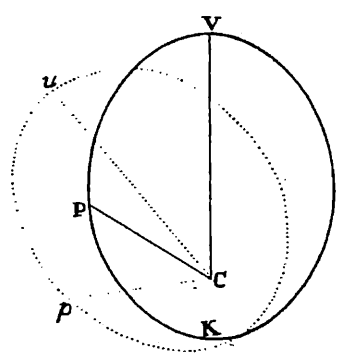
SECCION IX

ıbre el movimiento de cuerpos en órbitas móviles; y el movimiento de los ápsides.

PROPOSICIÓN XLIII. PROBLEMA XXX

requiere hacer mover un cuerpo en una curva que gira alrededor l centro de fuerza del mismo modo que otro cuerpo en la misma curva estando en reposo.

En la órbita fija VPK gira el cuerpo P, procediendo de V ıcia K. Desde el centro C se traza continuamente C*p*, igual a P, haciendo el ángulo VC*p* proporcional al ángulo VCP; y el ea que la línea C*p* describe será área VCP, que la línea CP scribe al mismo tiempo, como velocidad de la línea descripto- C*p* a la velocidad de la línea scriptora CP; esto es, como el ıgulo VC*p* al ángulo VCP, con- rvando por lo mismo una ra- ın dada y siendo por ello pro- ɔrcional al tiempo. Puesto que área descrita por la línea C*p* en ı plano fijo es proporcional al ɛmpo, es manifiesto que un ıerpo movido por una fuerza centrípeta adecuada, puede girar ɔn el punto *p* en la línea curva que ese mismo punto *p*, por el étodo recién explicado, puede ser forzado a describir en un ano fijo. Hágase el ángulo VC*u* igual al ángulo PC*p*, y la línea *u* igual a CV, y la figura *u*C*p* igual a la figura VCP, y como el



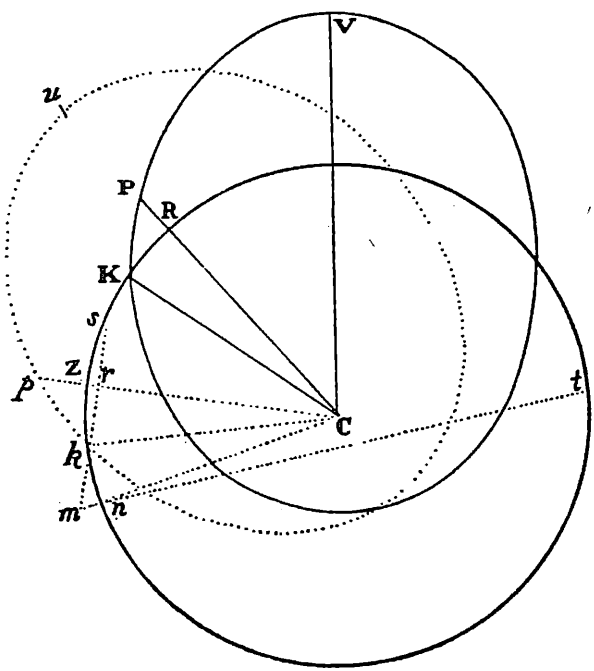
cuerpo está siempre en el punto *p* se moverá en el perímetro de la figura giratoria *u*C*p*, y describirá su arco *up* en el mismo tiempo que el otro cuerpo P describe el arco semejante e igual VP en la figura fija VPK.

Hállese entonces, por el Corolario V, Proposición VI, la fuerza centrípeta por la cual el cuerpo puede ser inducido a girar en la curva que el punto *p* describe en un plano fijo y el Problema quedará resuelto. Q.E.F.

PROPOSICIÓN XLIV. PROBLEMA XIV

La diferencia de las fuerzas por las cuales dos cuerpos pueden ser urgidos a moverse igualmente, uno en una órbita fija y el otro en esa misma órbita giratoria varía inversamente como el cubo de sus alturas comunes.

Las partes de la órbita fija VP y PK son similares e iguales a las partes de la órbita que gira *up* y *pk*; la distancia entre los



puntos P y K debe entenderse como la mínima. Trácese una perpendicular *kr* desde el punto *k* hasta la recta *p*C, y prolónguese hasta *m*, de manera que *mr* pueda ser a *kr* como el ángulo V*C*p al ángulo VCP. Como las alturas de los cuerpos PC y *p*C, K*C* y *k*C, son iguales siempre, es manifiesto que los incrementos o decrementos de las líneas PC y *p*C son siempre iguales; en consecuencia, si cada uno de los diversos movimientos de los cuerpos situados en los lugares P y *p* se descompone en dos (por el Corolario II de las Leyes del Movimiento), uno de los cuales se dirige hacia el centro, o con arreglo a las líneas PC y *p*C, y el otro, transversal con respecto al anterior, tiene una dirección perpendicular a las líneas PC y *p*C, el movimiento hacia el centro será igual, y el movimiento transversal del cuerpo *p* será al movimiento transversal del cuerpo P como el movimiento angular de la línea *p*C al movimiento angular de la línea PC; esto es, como el ángulo V*C*p al ángulo VCP.

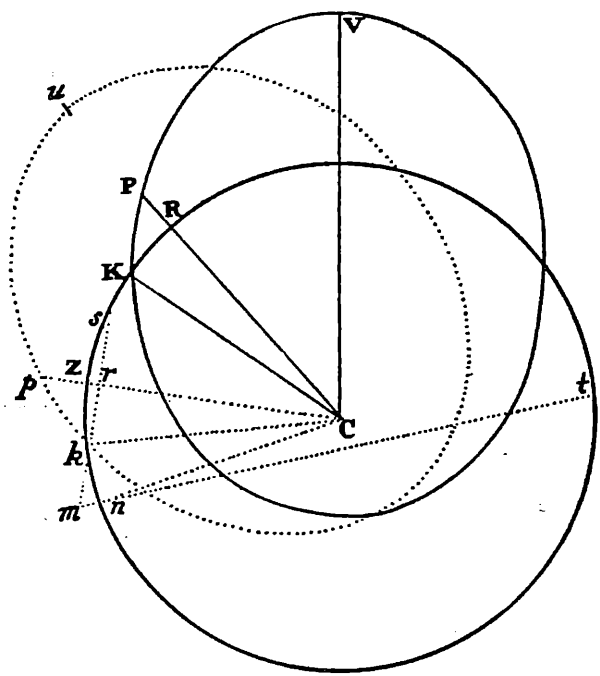
Por consiguiente, al mismo tiempo que el cuerpo P llega al punto K por ambos movimientos, el cuerpo *p*, que posee un movimiento igual hacia el centro, se verá igualmente movido desde *p* hacia C; y, por tanto, una vez agotado ese tiempo, se encontrará en algún lugar de la línea *mkr* que, pasando a través del punto *k*, es perpendicular a la línea *p*C; y por su movimiento transversal adquirirá una distancia con respecto a la línea *p*C que será a la distancia que el otro cuerpo P adquiere con respecto a la línea PC como el movimiento transversal del cuerpo *p* al movimiento transversal del otro cuerpo P. Así pues, como *kr* es igual a la distancia que el cuerpo P adquiere con respecto a la línea PC, y *mr* es a *kr* como el ángulo V*C*p al ángulo VCP, esto es, como el movimiento transversal del cuerpo *p* al movimiento transversal del cuerpo P, es manifiesto que al expirar el tiempo el cuerpo *p* se encontrará en el lugar *m*. Así sucederá si los cuerpos *p* y P son movidos igualmente en las direcciones de las líneas *p*C y PC, viéndose por eso mismo urgidos por fuerzas iguales en esas direcciones. Pero si tomamos un ángulo *pCn* que es al ángulo *pCk* como el ángulo V*C*p al ángulo VCP, siendo *n*C igual a *k*C, en ese caso el cuerpo *p* al expirar el tiempo se encontrará realmente en *n*, viéndose urgido con mayor fuerza que el cuerpo P, si el ángulo *nCp* es mayor que el ángulo *kCp*, esto es, si la órbita *upk* se mueve progresivamente o en una dirección retrógrada, con una velocidad mayor del doble de aquella con la cual es arrastrada hacia adelante la línea CP; y con menor fuerza si el movimiento retrógrado de la órbita

es más lento. Y la diferencia de las fuerzas será como el intervalo *mn* de los lugares a través de los cuales podría ser arrastrado el cuerpo por la acción de esa diferencia en ese espacio de tiempo. Alrededor del centro C, con el intervalo C*n* o C*k*, supóngase descrito un círculo que corta las líneas *mr* y *mn* una vez prolongadas en *s* y *t*, y el rectángulo $mn \times mt$ será igual al rectángulo $mk \times ms$, con lo cual *mn* será igual a $\frac{mk \times ms}{mt}$. Pero como los triángulos *p*C*k* y *p*C*n*, en un tiempo dado, tienen una magnitud dada, *kr* y *mr*, y su diferencia *mk*, y su suma *ms*, son inversamente como la altura *p*C, con lo cual el rectángulo $mk \times ms$ es inversamente como el cuadrado de la altura *p*C. Además, *mt* es directamente como $\frac{1}{2}$ *mt*, esto es, como la altura *p*C. Estas son las primeras razones de las líneas nacientes; y, en consecuencia $\frac{mk \times ms}{mt}$, esto es, la línea mínima naciente *mn*, y la diferencia de las fuerzas proporcional a ésta son inversamente como el cubo de la altura *p*C. Q.E.D.

COROLARIO I. Por consiguiente, la diferencia de las fuerzas en los lugares P y *p*, o K y *k*, es a la fuerza con la cual el cuerpo puede girar en un movimiento circular desde R a K, al mismo tiempo que el cuerpo P describe en una órbita fija el arco PK, como la línea naciente *mn* al seno verso del arco naciente RK, esto es, como $\frac{mk \times ms}{mt}$ a $\frac{rk^2}{2kC}$, o como $mk \times ms$ al cuadrado de *rk*; esto es, si tomamos cantidades dadas F y G en la misma proporción entre sí que guarda el ángulo VCP con respecto al ángulo VC*p*, como GG − FF a FF. Y así, si desde el centro C, con cualquier distancia CP o C*p*, se describe un sector circular igual a toda el área VPC, que el cuerpo girando en una órbita fija ha descrito en cualquier tiempo determinado mediante un radio trazado hasta el centro, la diferencia de las fuerzas con las que el cuerpo P gira en una órbita fija y el cuerpo *p* en otra móvil serán a la fuerza centrípeta, con la cual otro cuerpo mediante un radio trazado hasta el centro puede describir uniformemente ese sector en el mismo tiempo en que se describe el área VCP, como GG − FF a FF. Pues ese sector y el área *p*C*k* son uno con respecto al otro como los tiempos en los que son descritos.

COROLARIO II. Si la órbita VPK fuese una elipse, con su foco C y su ápside V, y suponemos la elipse *upk* similar e igual a

ella, de manera que *p*C puede ser siempre igual a PC, y el ángulo VC*p* conservar con respecto al ángulo VCP la razón dada de G a F; y para la altura PC o *p*C ponemos A, y 2R por el *latus rectum* de la elipse, la fuerza con la cual un cuerpo puede ser hecho girar en una elipse móvil será como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, y a la inversa. Si la fuerza con la cual un cuerpo puede girar en una elipse fija se expresa por la cantidad $\frac{FF}{AA}$, la fuerza en V será $\frac{FF}{CV^2}$. Pero la fuerza con la cual un cuerpo puede girar en un círculo a la distancia CV, con la misma velocidad que un cuerpo girando en una elipse tiene en V, es a la fuerza con la cual un cuerpo girando en una elipse es urgido en el ápside V, como la mitad del *latus rectum* de la elipse al semidiámetro CV del círculo, siendo por ello como $\frac{RFF}{CV^3}$; y la fuerza que es a esta como



GG − FF a FF es como $\frac{RGG-RFF}{CV^3}$; y esta fuerza (por el Corolario I de esta Proposición) es la diferencia de las fuerzas en V, con las que el cuerpo P gira en la elipse fija VPK, y el cuerpo *p* en la elipse móvil *upk*. Como por esta Proposición esa diferencia en cualquier otra altura A es a sí misma en la altura CV como $\frac{1}{A^3}$ a $\frac{1}{CV^3}$, la misma diferencia en toda altura A será como $\frac{RGG-RFF}{A^3}$. Por consiguiente, añádase a la fuerza $\frac{FF}{AA}$, mediante la cual el cuerpo puede girar en una elipse fija VPK, el exceso $\frac{RGG-RFF}{A^3}$, y la suma será la fuerza total $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$ con la cual un cuerpo puede girar en el mismo tiempo en la elipse móvil *upk*.

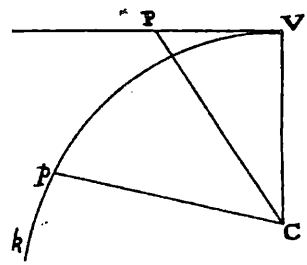
COROLARIO III. Del mismo modo se hallará que si la órbita fija VPK es una elipse con su centro en el centro de fuerzas C, y se supone una elipse móvil *upk* semejante, igual y concéntrica a ella; y 2R es el *latus rectum* principal de esa elipse, y 2T el *latus transversum* o eje mayor; y el ángulo VC*p* es continuamente a VCP como G a F, las fuerzas con las cuales los cuerpos pueden girar en la elipse fija y en la móvil, en tiempos iguales, serán como $\frac{FFA}{T^3}$ y $\frac{FFA}{T^3}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$ respectivamente.

COROLARIO IV. Y, en general, si la altura máxima CV del cuerpo se llama T, y el radio de la curvatura que la órbita VPK tiene en V, esto es, el radio de un círculo igualmente curvado, se llama R, y la fuerza centrípeta con la cual puede girar un cuerpo en cualquier curva fija VPK en el lugar V se llama $\frac{VFF}{TT}$, y en otros lugares P se dice indefinidamente X; y la altura CP se denomina A, y G se toma a F en la razón dada del ángulo VC*p* al ángulo VCP, la fuerza centrípeta con la cual el mismo cuerpo realizará los mismos movimientos, en el mismo tiempo y en la misma curva *upk* girando con un movimiento circular, será como la suma de las fuerzas $X+\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$

COROLARIO V. Así pues, estando dado el movimiento de un

cuerpo en una órbita fija, su movimiento angular alrededor del centro de las fuerzas puede ser incrementado o disminuido en una proporción dada; con lo cual pueden hallarse nuevas órbitas fijas donde los cuerpos pueden girar con nuevas fuerzas centrípetas.

COROLARIO VI. De este modo, si se traza la línea VP, de longitud indeterminada, perpendicular a la línea CV dada por posición, y se traza CP, y C*p* igual a ella, haciendo que el ángulo VC*p* guarde una razón dada con el ángulo VCP, la fuerza con la cual un cuerpo puede girar en la curva V*pk*, que el punto *p* está describiendo continuamente, será inversamente como el cubo de la altura C*p*.



Pues el cuerpo P, por su sola inercia, sin impedirlo ninguna otra fuerza, procederá uniformemente en la recta VP. Añádase entonces una fuerza tendente al centro C inversamente como el cubo de la altura CP o C*p*, y (por lo recién demostrado) el cuerpo se desviará del movimiento rectilíneo para seguir la curva V*pk*. Pero esta curva V*pk* es idéntica a la curva VPQ hallada en el Corolario III de la Proposición XLI, donde, según dije, cuerpos atraídos con fuerzas semejantes ascenderán oblicuamente.

PROPOSICIÓN XLV. PROBLEMA XXXI

Hallar el movimiento de los ápsides en órbitas que se aproximan mucho a círculos.

Este problema está resuelto aritméticamente reduciendo la órbita, que un cuerpo girando en una elipse móvil (como en el Corolario II y III de la Proposición previa) describe en un plano fijo, a la figura de la órbita cuyos ápsides se requieren; y luego buscando los ápsides de la órbita que ese cuerpo describe en un plano fijo. Pero las órbitas adquieren la misma figura si las fuerzas centrípetas mediante las cuales son descritas, comparadas entre sí, se hacen proporcionales a alturas iguales. Sea V el ápside más alto, y escríbase T para la altura máxima CV, A para

cualquier otra altura CP o C*p*, y X para la diferencia de las alturas CV − CP; la fuerza con la cual un cuerpo se mueve en una elipse que gira en torno a su foco C (como en el Corolario II), y que en el Corolario II era como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, esto es, como $\frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$, sustituyendo T − X por A, se hará como $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3}$. De modo similar cualquier otra fuerza centrípeta ha de ser reducida a una fracción cuyo denominador es A^3, y los numeradores deben hacerse análogos colacionando entre sí los términos homólogos. Esto resultará más sencillo por medio de ejemplos.

EJEMPLO 1. Supongamos que la fuerza centrípeta sea uniforme y, en consecuencia, como $\frac{A^3}{A^3}$, o, escribiendo T − X por A en el numerador, como

$$\frac{T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3}{A^3}.$$

Colacionando los términos correspondientes de los numeradores, esto es, aquellos que consisten en cantidades dadas con los de cantidades dadas, y los de cantidades no dadas con los de cantidades no dadas, se convertirá en

$$RGG - RFF + TFF : T^3 = -FFX : -3TTX + 3TXX - X^3$$
$$= -FF : -3TT + 3TX - XX.$$

Como se supone que la órbita es extremadamente próxima a un círculo, hágase que coincida con uno; y como en ese caso R y T se hacen iguales, y X es infinitamente disminuido, las últimas razones serán

$$GG : T^2 = -FF : -3TT$$

y de otro modo GG : FF = TT : 3TT = 1 : 3

por lo cual G es a F, esto es, el ángulo VC*p* al ángulo VCP, como 1 a $\sqrt{3}$. Puesto que el cuerpo, en una elipse fija, descendiendo desde el ápside superior hasta el inferior, describe un ángulo –si puede decirse así– de 180°, el otro cuerpo en una elipse móvil y, por lo mismo, en el plano fijo al que nos estamos refiriendo, describirá en su descenso desde el superior al inferior un ángulo VC*p* de $\frac{180°}{\sqrt{3}}$. Y esto llega a acontecer debido a la semejanza de esta órbita que describe un cuerpo movido por

una fuerza centrípeta uniforme, con la órbita que describirá en un plano fijo un cuerpo que hace sus circuitos en una elipse giratoria. Mediante esta colación de los términos se hacen semejantes esas órbitas; desde luego, no en general, e incluso entonces sólo cuando se aproximan mucho a una figura circular. Por consiguiente, un cuerpo que gira con una fuerza centrípeta uniforme en una órbita casi circular describirá siempre un ángulo de $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$, 103° 55′ 23″ en el centro, moviéndose desde el ápside superior hasta el inferior una vez que ha descrito ese ángulo, y por lo mismo retornando al ápside superior cuando ha descrito de nuevo ese ángulo, y así hasta lo infinito.

EJEMPLO 2. Supongamos que la fuerza centrípeta sea como cualquier potencia de la altura A, como por ejemplo A^{n-3}, o $\frac{A^n}{A^3}$; donde $n-3$ y n significan cualesquiera exponentes, enteros o fraccionados, racionales o irracionales, positivos o negativos. Reducido a una serie indeterminada por mi método de series convergentes, ese numerador A^n o $(T-X)^n$ se transformará en

$$T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}, \text{ etc.}$$

Y comparando esos términos con los términos del otro numerador:

$$RGG - RFF + TFF - FFX$$

pasa a ser

$$RGG - RFF + TFF : T^n = -FF : -nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}, \text{ etc.}$$

Y tomando las últimas razones cuando las órbitas se aproximan a círculos pasa a ser

$$RGG : T^n = -FF : -nT^{n-1}$$

o $$GG : T^{n-1} = FF : nT^{n-1}$$

y de otro modo $GG : FF = 1 : n$

por lo cual G es a F, esto es, el ángulo VC*p* es al ángulo VCP como 1 a $\sqrt{n}$. Dado que el ángulo VCP descrito en el descenso del cuerpo desde el ápside superior al inferior en una elipse es de 180°, el ángulo VC*p*, descrito en el descenso del cuerpo desde el ápside superior al inferior de una órbita casi circular que un cuerpo describe con una fuerza centrípeta proporcional a la

potencia A^{n-3}, será igual a un ángulo de $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$, y repitiéndose este ángulo el cuerpo retornará del ápside inferior al superior, y así sucesivamente hasta lo infinito. Si la fuerza centrípeta fuese como la distancia del cuerpo desde el centro, esto es, como A, o $\frac{A^4}{A^3}$, n será igual a 4, y $\sqrt{n}$ igual a 2; por lo cual el ángulo entre el ápside superior y el inferior será igual a $\frac{180^c}{2}$ ó 90^c. Con lo cual una vez que el cuerpo haya realizado una cuarta parte de la revolución llegará al ápside inferior, y tras realizar otra cuarta parte llegará al ápside superior, y así sucesivamente hasta lo infinito. Esto resulta también de la Proposición X. Pues un cuerpo urgido por esta fuerza centrípeta girará en una elipse fija, cuyo centro es el centro de fuerza. Si la fuerza centrípeta es inversamente como la distancia, esto es, directamente como $\frac{1}{A}$ o $\frac{A^2}{A^3}$, n será igual a 2; y el ángulo entre el ápside superior y el inferior será $\frac{180^\circ}{\sqrt{2}}$, ó 127° 16′ 45″; por lo cual un cuerpo que gire con semejante fuerza, por una repetición continua de este ángulo, se moverá alternativamente del ápside superior al inferior y del inferior al superior para siempre. Así también, si la fuerza centrípeta fuese inversamente como la cuarta raíz de la onceava potencia de la altura, esto es, inversamente como $A^{\frac{11}{4}}$, o directamente como $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, o como $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, n será igual a $\frac{1}{4}$, y $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$ será igual a 360^c; y partiendo el cuerpo desde el ápside superior y descendiendo desde él perpetuamente, alcanzará el ápside inferior cuando haya completado una revolución entera; y ascendiendo perpetuamente desde allí cuando ha completado otra revolución completa, llegará de nuevo al ápside superior, y así para siempre alternativamente.

EJEMPLO 3. Tomando m y n por cualesquiera índices de las potencias de la altura, y b y c por cualesquiera números dados, supóngase que la fuerza centrípeta sea como $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, esto es,

como

$$\frac{b(T-X)^m+c(T-X)^n}{A^3}$$

o (por el método de las series convergentes antes mencionado) como

$$\frac{bT^m+cT^n-mbXT^{m-1}-ncXT^{n-1}+\frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2}+\frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}}{A^3}$$

y comparando los términos de los numeradores resultará

$$RGG-RFF+TFF:bT^m+cT^n=-FF:-mbT^{m-1}-ncT^{n-1}$$

$$+\frac{mm-m}{2}bXT^{m-2}+\frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}, \text{ etc.}$$

Y tomando las últimas razones que resultan cuando las órbitas alcanzan una forma circular, se producirá

$$GG:bT^{m-1}+cT^{n-1}=FF:mbT^{m-1}+ncT^{n-1};$$

y de otro modo

$$GG:FF=bT^{m-1}+cT^{n-1}:mbT^{m-1}+ncT^{n-1}.$$

Expresando la altura máxima CV o T aritméticamente mediante la unidad, esta proporción se transforma en

$$GG:FF=b+c:mb+nc=1:\frac{mb+nc}{b+c}.$$

Con lo cual G pasa a ser a F, esto es, el ángulo VC*p* al ángulo VCP, como 1 a $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Y como el ángulo VCP entre el ápside superior y el inferior, en una elipse fija, es de 180°, el ángulo VC*p* entre los mismos ápsides en una órbita que un cuerpo describe con una fuerza centrípeta que es como $\frac{bA^m+cA^n}{A^3}$, será igual a un ángulo de 180° $\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Y por el mismo razonamiento, si la fuerza centrípeta fuese como $\frac{bA^m-cA^n}{A^3}$, el ángulo entre los ápsides se descubrirá igual a 180° $\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$.

El problema se resuelve de la misma manera en casos más difíciles. La cantidad a que es proporcional la fuerza centrípeta debe descomponerse siempre en una serie convergente cuyo denominador es A^3. Entonces la parte dada del numerador que

surge de esa operación debe suponerse en la misma razón con respecto a aquella parte de él no dada como la parte dada de ese numerador RGG − RFF + TFF − FFX guarda con aquella parte del mismo numerador que no es dada. Y despejando las cantidades superfluas y escribiendo T por la unidad, se obtiene la proporción de G a F.

COROLARIO I. De ahí que si la fuerza centrípeta es como cualquier potencia de la altura, esa potencia puede hallarse partiendo del movimiento de los ápsides, y a la inversa. Esto es, si la totalidad del movimiento angular con el que el cuerpo retorna al mismo ápside fuese al movimiento angular de una revolución, o 360°, como cualquier número *m* a otro *n*, y la altura se denomina A, la fuerza será como la potencia $\frac{nn}{mm} - 3$ de la altura A; cuyo índice de potencia es $\frac{nn}{mm} - 3$. Esto aparece partiendo del segundo Ejemplo. Por lo cual es obvio que al alejarse del centro la fuerza no puede decrecer en una proporción mayor que la razón cubicada de la altura. Un cuerpo girando con semejante fuerza y partiendo del ápside, jamás podrá llegar al ápside inferior o a la altura mínima, sino que una vez comenzado su descenso continuará hacia el centro, describiendo la curva estudiada en el Corolario III de la Proporción XLI. Pero si al partir del ápside inferior comenzara a ascender siquiera mínimamente, ascenderá hasta lo infinito y nunca llegará al ápside superior, sino que describirá la curva mencionada en el Corolario IV de la Proposición XLIV. Por consiguiente, allí donde la fuerza al alejarse del centro decrece en proporción superior a la razón cubicada de la altura, al partir del ápside el cuerpo descenderá hacia el centro o bien ascenderá hasta lo infinito, según que descienda o ascienda al comienzo de su movimiento. Pero si la fuerza en su alejarse del centro decrece menos que una razón cubicada de la altura, o crece en cualquier razón de la altura, el cuerpo nunca descenderá hacia el centro, pero en algún momento llegará al ápside inferior; al contrario, si el cuerpo que asciende y desciende alternativamente desde un ápside al otro jamás llega al centro, la fuerza o bien crece con el alejamiento del centro, o bien decrece en menos que una razón cubicada de la altura; y cuanto más pronto retorne el cuerpo desde un ápside al otro, más se aleja la razón de las fuerzas de la razón elevada al cubo. Si el cuerpo debiese retornar hacia y desde el ápside superior por un ascenso y descenso alterno en

8 revoluciones, o en 4, o en 2, o en $1\frac{1}{2}$; esto es, si *m* fuese a *n* como 8, o 4, o 2, o $1\frac{1}{2}$ a 1, y $\frac{nn}{mm} - 3$ fuese $\frac{1}{64} - 3$, o $\frac{1}{16} - 3$, o $\frac{1}{4} - 3$, o $\frac{4}{9} - 3$, la fuerza será como $A^{\frac{1}{64}-3}$, o $A^{\frac{1}{16}-3}$, o $A^{\frac{1}{4}-3}$, o $A^{\frac{4}{9}-3}$, esto es, inversamente como $A^{3-\frac{1}{64}}$, o $A^{3-\frac{1}{16}}$, o $A^{3-\frac{1}{4}}$, o $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si tras cada revolución el cuerpo regresa al mismo ápside, y éste permanece inmovido, *m* será a *n* como 1 a 1, y por lo mismo $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual a A^{-2}, o $\frac{1}{AA}$; con lo cual el decremento de las fuerzas estará en una razón cuadrada de la altura, como quedó demostrado antes. Si en tres cuartas partes, o en dos tercios, o en un tercio, o en un cuarto de una revolución completa el cuerpo volviese al mismo ápside, *m* será a *n* como $\frac{3}{4}$, o $\frac{2}{3}$, o $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$ a 1, por lo cual $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual a $A^{\frac{16}{9}-3}$, o $A^{\frac{9}{4}-3}$, o A^{9-3}, o A^{16-3}, de manera que la fuerza es o bien inversamente como $A^{\frac{11}{9}}$ o $A^{\frac{3}{4}}$, o directamente como A^6 o A^{14}. Por último, si el cuerpo en su progreso desde el ápside superior al mismo ápside superior nuevamente hace una revolución completa y tres grados más, y por lo tanto en cada revolución del cuerpo ese ápside se mueve tres grados hacia adelante, *m* será a *n* como 363° a 360°, o como 121 a 120, por lo cual $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ será igual a $A^{-\frac{29523}{14641}}$, por lo cual la fuerza centrípeta será inversamente como $A^{\frac{29523}{14641}}$ o inversamente como $A^{2\frac{4}{243}}$ muy aproximadamente. En consecuencia, la fuerza centrípeta decrece en una razón algo superior al cuadrado de la razón, pero acercándose $59\frac{3}{4}$ veces más al cuadrado que al cubo.

COROLARIO II. Del mismo modo, si un cuerpo urgido por una fuerza centrípeta que es inversamente como el cuadrado de la altura gira en una elipse cuyo foco se encuentra en el centro de fuerzas; y se añadiera o sustrayera una nueva fuerza exterior a esa fuerza centrípeta, el movimiento de los ápsides proveniente de esa fuerza exterior podría (por el tercer Ejemplo) conocerse; y a la inversa: si la fuerza con la cual el cuerpo gira en la elipse fuera como $\frac{1}{AA}$, y la fuerza exterior como *c*A, y por tanto la fuerza restante fuese como $\frac{A - cA^4}{A^3}$, por el tercer Ejemplo *b* será

igual a 1, *m* igual a 1 y *n* igual a 4; por consiguiente, el ángulo de revolución entre los ápsides es igual a $180^\circ \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Supóngase que esa fuerza exterior fuese 357,45 veces menor que la otra fuerza con la cual gira el cuerpo en la elipse; esto es, que *c* sea $\frac{100}{35745}$, A o T iguales a 1, y entonces $180^\circ \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ será $180^\circ \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ o 180, 7623, esto es, 180° 45′ 44″. En consecuencia, al partir del ápside superior el cuerpo llegará al ápside inferior con un movimiento angular de 180° 45′ 44″, y al repetirse este movimiento angular volverá al ápside superior; con lo cual el ápside superior se adelantará en cada revolución 1° 31′ 28″. El ápside de la luna es aproximadamente dos veces más veloz.

Hasta aquí lo concerniente al movimiento de cuerpos en órbitas cuyos planos pasan a través del centro de fuerza. Queda ahora por determinar esos movimientos en planos excéntricos. Pues los autores que trataron el movimiento de cuerpos graves solían considerar el ascenso y descenso de dichos cuerpos no sólo en dirección perpendicular, sino en todos los grados de oblicuidad sobre cualesquiera planos dados; y por la misma razón debemos considerar aquí los movimientos de cuerpos tendentes a centros mediante cualesquiera fuerzas, cuando esos cuerpos se mueven en planos excéntricos. Se supone que esos planos son perfectamente pulidos y suaves, de manera que no retrasen en lo más mínimo el movimiento de los cuerpos. Además, en estas demostraciones no usaré planos sobre los que ruedan o resbalan tales cuerpos, que son por lo mismo planos tangentes a los cuerpos, sino planos paralelos a ellos, donde se mueven los centros de los cuerpos describiendo por ese movimiento órbitas. Y por el mismo método determino después los movimientos de cuerpos realizados en superficies curvas.

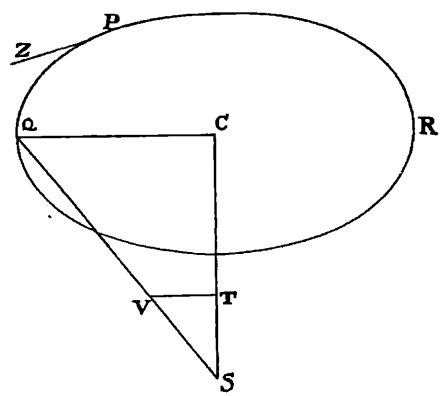
SECCION X

Sobre los movimientos de cuerpos en superficies dadas y el oscilante movimiento pendular de los cuerpos.

PROPOSICIÓN XLVI. PROBLEMA XXXII

Suponiendo cualquier especie de fuerza centrípeta, estando dados el centro de fuerza y cualquier plano donde se mueva el cuerpo, y concediéndose la cuadratura de las figuras curvilíneas, se pide determinar el movimiento de un cuerpo alejándose de un lugar dado a una velocidad determinada, en la dirección de una recta dada en ese plano.

Sea S el centro de fuerza, SC la distancia mínima de ese centro con respecto al plano dado, P un cuerpo que parte del lugar P en la dirección de la recta PZ, Q el mismo cuerpo girando en su curva, y PQR la curva misma que se requiere hallar, descrita en ese plano dado. Unanse CQ y QS, y si en QS tomamos SV proporcional a la fuerza centrípeta con la cual el cuerpo es atraído hacia el centro S, y trazamos VT paralela a CQ, encontrando a SC en T, la fuerza SV se descompondrá en dos (por el Corolario II de las Leyes del Movimiento), la fuerza ST y la fuerza



TV; ST, que atrae al cuerpo en la dirección de una línea perpendicular a ese plano, no altera para nada su movimiento en ese plano. Pero la acción de la otra fuerza TV, coincidiendo con la posición del propio plano, atrae al cuerpo directamente hacia el punto dado C de ese plano; hace por eso que el cuerpo se mueva en el plano como si la fuerza ST fuese apartada, y el cuerpo girase en el espacio libre alrededor del centro C por medio de la fuerza TV exclusivamente. Pero estando dada la fuerza centrípeta TV con la que el cuerpo Q gira en un espacio sin resistencia alrededor del centro C dado, está dada también (por la Proposición XLII) la curva PQR que el cuerpo describe, el lugar Q donde se encontrará el cuerpo en cualquier tiempo dado y, por último, la velocidad del cuerpo en ese lugar Q. Y a la inversa. Q.E.I.

PROPOSICIÓN XLVII. TEOREMA XV

Suponiendo que la fuerza centrípeta sea proporcional a la distancia del cuerpo con respecto al centro, todos los cuerpos que giran en cualesquiera planos describirán elipses y completarán sus revoluciones en tiempos iguales; y aquellos que se mueven en líneas rectas, hacia atrás y hacia adelante alternativamente, completarán sus diversos períodos de ida y vuelta en los mismos tiempos.

Pues, manteniendo todo como en la Proposición precedente, la fuerza SV por la cual el cuerpo Q que gira en cualquier plano PQR es atraído hacia el centro S es como la distancia SQ; y como SV y SQ, TV y CQ son proporcionales, la fuerza TV con la cual el cuerpo es atraído hacia el punto dado C en el plano de la órbita es como la distancia CQ. En consecuencia, las fuerzas con las que cuerpos que se encuentran en el plano PQR se ven atraídos hacia el punto C están en proporción a las distancias iguales a las fuerzas con las cuales los mismos cuerpos son atraídos en todas direcciones hacia el centro S; por tanto, los cuerpos se moverán en los mismos tiempos, y en las mismas figuras, en cualquier plano PQR que circunde al punto C, tal como harían en espacios sin resistencia alrededor del centro S; y, en consecuencia (por el Corolario II, Proposición X, y el Corolario II, Proposición XXXVIII) o bien describirán en tiempos iguales elipses en ese plano alrededor del centro C, o

bien se moverán atrás y adelante en líneas rectas pasando a través del centro C en ese plano, completando los mismos períodos de tiempo en todos los casos. Q.E.D.

ESCOLIO

El ascenso y el descenso de cuerpos en superficies curvas guarda estrecha relación con los movimientos de que hemos estado hablando. Imaginemos que se describen curvas en cualquier plano, que giran alrededor de cualesquiera ejes dados que pasan a través del centro de fuerza, y que mediante esa revolución describen superficies curvas; y que los cuerpos se mueven de tal modo que sus centros puedan hallarse siempre en tales superficies. Si esos cuerpos oscilan atrás y adelante con un ascenso y descenso oblicuo, sus movimientos se realizarán en planos que pasan a través del eje y, por tanto, en las curvas por cuya revolución se generaron esas superficies curvas. Por consiguiente, en tales casos bastará con considerar el movimiento en esas líneas curvas.

PROPOSICIÓN XLVIII. TEOREMA XVI

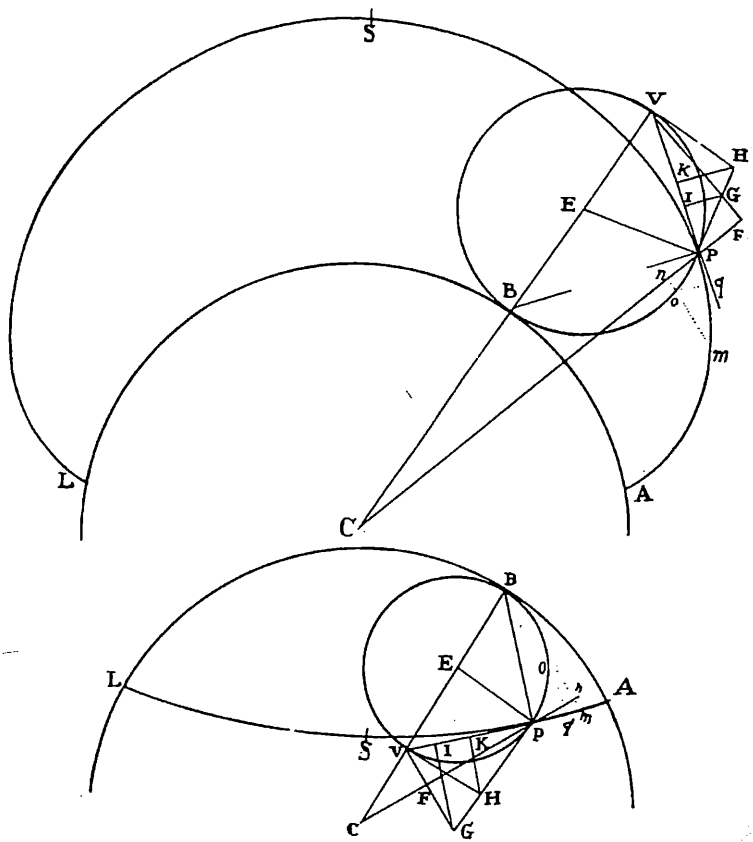
Si una rueda apoyada perpendicularmente sobre la superficie exterior de un globo girando sobre su propio eje progresa describiendo un círculo máximo, la longitud de la senda curvilínea que cualquier punto dado en el perímetro de la rueda ha descrito desde el momento de tocar el globo (senda curvilínea que podemos llamar cicloide o epicicloide) será al doble del seno verso de la mitad del arco que desde entonces ha tocado el globo pasando sobre él, como la suma de los diámetros del globo y la rueda al semidiámetro del globo.

PROPOSICIÓN XLIX. TEOREMA XVII

Si una rueda apoyada perpendicularmente sobre el interior de un globo cóncavo girando en torno a su propio eje progresa en uno de los círculos máximos del globo, la longitud de la senda curvilínea

que cualquier punto dado en el perímetro de la rueda ha descrito desde el momento de tocar el globo será al doble del seno verso de la mitad del arco que en todo ese tiempo ha tocado el globo pasando sobre él como la diferencia de los diámetros del globo y la rueda al semidiámetro del globo.

Sea ABL el globo, C su centro, BPV la rueda que descansa sobre él, E el centro de la rueda, B el punto de contacto y P el punto dado en el perímetro de la rueda. Imaginemos que esta rueda se mueve en el círculo máximo ABL desde A pasando por B hacia L, girando de tal modo en su progreso que los arcos AB y PB puedan ser siempre iguales el uno al otro, describiendo mientras tanto el punto dado P en el perímetro de la rueda la



senda curvilínea AP. Sea AP toda la senda curvilínea descrita desde que la rueda tocó al globo en A, y la longitud de esa senda será al doble del seno verso del arco ½ PB como 2CE a CB. Pues hágase que la recta CE (prolongada si necesario fuese) encuentre a la rueda en V, y únanse CP, BP, EP y VP; prolónguese CP, y abátase sobre ella la perpendicular VF.

Hágase que PH y VH, que se encuentran en H, toquen al círculo en P y V, dejando que PH corte a VF en G, trazando sobre VP las perpendiculares GI y HK. Desde el centro C con cualquier radio descríbase el círculo *nom*, que corta a la recta CP en *n*, al perímetro de la rueda BP en *o*, y a la senda curvilínea en *m*; y desde el centro V con el radio V*o* descríbase un círculo cortando a VP prolongada en *q*.

Como en su progreso la rueda siempre gira en torno al punto de contacto B, es manifiesto que la recta BP es perpendicular a aquella curva AP que describe el punto P de la rueda, y por lo mismo que la recta VP tocará a esa curva en el punto P. Auméntese o disminúyase gradualmente el radio del círculo *nom*, de manera que acabe haciéndose igual a la distancia CP; y por la semejanza de la figura evanescente P*nomq*, y la figura PFHVI, la razón última de las breves líneas evanescentes P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, esto es, la razón de los incrementos momentáneos de la curva AP, la recta CP, el arco circular BP y la recta VP será idéntica a la de las líneas PV, PF, PG y PI respectivamente. Pero como VF es perpendicular a CF, y VH a CV, son por eso iguales los ángulos HVG y VCF; y el ángulo VHG (porque los ángulos del cuadrilátero HVEP son rectos en V y P) es igual al ángulo CEP, son semejantes los triángulos VHG y CEP, con lo cual llega a suceder que

$$EP : CE = HG : HV \text{ o } HP = KI : PK,$$

y por suma o resta,

$$CB : CE = PI : PK,$$

y $$CB : 2CE = PI : PV = Pq : Pm.$$

Por consiguiente, el decremento de la línea VP, esto es, el incremento de la línea BV − VP al incremento de la curva AP se encuentra en una razón dada de CB a 2CE, por lo cual (según el Corolario del Lema IV) las longitudes BV − VP y AP, generadas por esos incrementos, guardan la misma razón. Pero si BV fuese radio, VP será el coseno del ángulo BVP o ½ BEP, y en consecuencia BV − VP será el seno verso del mismo ángulo. Así pues, en esta rueda cuyo radio es ½ BV, BV − VP será el doble

del seno verso del arco ½ BP. Con lo cual AP es al doble del seno verso del arco ½ BP como 2CE a CB. Q.E.D.

Llamaremos a la línea AP en la primera de estas Proposiciones la cicloide exterior al globo, y a la misma línea en la segunda Proposición la cicloide interior, en aras de la claridad.

COROLARIO I. En consecuencia, si se describe toda la cicloide ASL, y se bisecta en S, la longitud de la parte PS será a la longitud PV (que es el doble del seno del ángulo VBP, cuando EB es radio) como 2CE a CB, encontrándose por tanto en una razón dada.

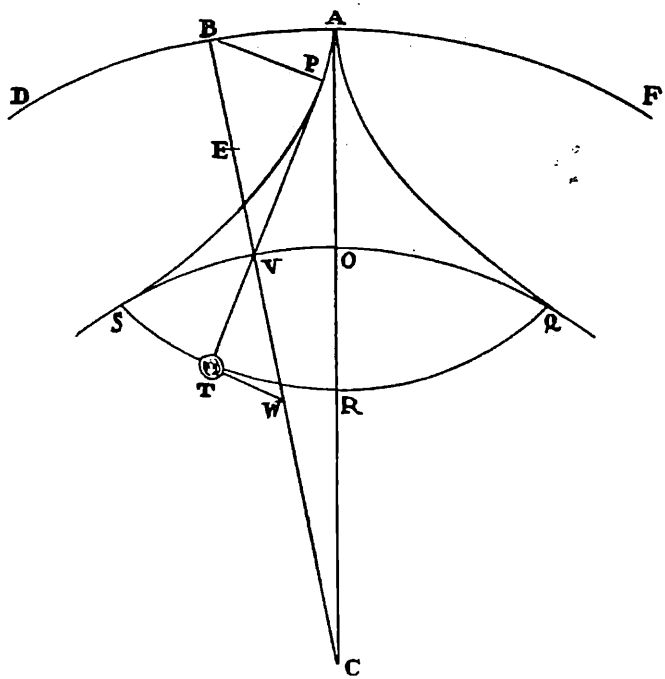
COROLARIO II. Y la longitud del semidiámetro de la cicloide AS será igual a una recta que sea al diámetro de la rueda BV como 2CE A CB.

PROPOSICIÓN L. PROBLEMA XXXIII

Hacer que un cuerpo pendular oscile en una cicloide dada.

Considérese dada dentro del globo QVS descrito con el centro C a la cicloide QRS, bisectada en R, que encuentra la superficie del globo con sus puntos extremos Q y S a cada lado. Trácese CR bisectando el arco QS en O, y prolónguese hasta A, de tal manera que CA pueda ser a CO como CO a CR. Alrededor del centro C, con el radio CA, descríbase un globo exterior DAF; y dentro de este globo, mediante una rueda cuyo diámetro es AO, descríbanse dos semicicloides AQ y AS, que tocan al globo interior en Q y S, encontrando al globo exterior en A. Desde el punto A, con un hilo APT de longitud igual a la línea AR, suspéndase y hágase oscilar el cuerpo T de tal manera entre las dos semicicloides AQ y AS que, siempre que se aparta el péndulo de la perpendicular AR, la parte superior del hilo AP pueda aplicarse a esa semicicloide APS hacia el cual tiende el movimiento, plegándose alrededor de esa línea curva como si fuese un obstáculo sólido, mientras continúa recta la parte restante del mismo hilo PT que aún no ha tocado a la semicicloide. Entonces el peso T oscilará en la cicloide dada QRS. Q.E.F.

Pues hágase que el hilo PT encuentre a la cicloide QRS en T, y al círculo QOS en V, trazándose CV; y levántense las perpendiculares BP y TW a la parte recta del hilo PT desde



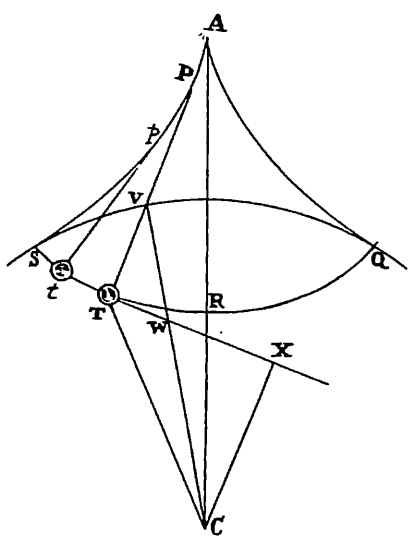
los puntos extremos P y T, que encuentran a la recta CV en B y W. Es evidente, partiendo de la construcción y generación de las figuras semejantes AS y SR, que las perpendiculares PB y TW, cortan en CV las longitudes VB y VW, iguales a los diámetros de las ruedas OA y OR. Por lo cual TP es a VP (que es el doble del seno del ángulo VBP cuando $\frac{1}{2}$ BV es radio) como BW a BV, o AO+OR a AO, esto es (como CA y CO, CO y CR, y por división AO y OR son proporcionales), como CA+CO a CA, o como 2CE a CB, si BV es bisectada en E. Por consiguiente (según el Corolario I, Proposición XLIX) la longitud de la parte rectilínea del hilo PT es siempre igual al arco de la cicloide PS, y todo el hilo APT es siempre igual a la mitad de la cicloide APS, esto es (por el Corolario II, Proposición XLIX) a la longitud AR. Y, a la inversa, si la cuerda es siempre igual a la longitud AR, el punto T se moverá siempre en la cicloide dada QRS. Q.E.D.

COROLARIO. La cuerda AR es igual a la semicicloide AS, y por consiguiente guarda la misma razón con AC, semidiámetro del globo exterior, que la cicloide semejante SR guarda con CO, semidiámetro del globo interior.

PROPOSICIÓN LI. TEOREMA XVIII

Si una fuerza centrípeta, tendente desde todos lados hacia el centro C *de un globo, fuese en todas partes como la distancia del lugar respecto del centro; y debido a esta sola fuerza el cuerpo* T *oscilase (del modo antes descrito) en el perímetro de la cicloide* QRS, *afirmo que todas las oscilaciones, aun siendo desiguales en sí mismas, se realizarán en tiempos iguales.*

Sobre la tangente TW prolongada indefinidamente abátase la perpendicular CX y únase CT. Como la fuerza centrípeta con la cual el cuerpo es impelido hacia C es como la distancia CT, descompóngase esta última (por el Corolario II de las Leyes) en las partes CX y TX, de las cuales CX impele el cuerpo directamente desde P estirando el hilo PT y resulta totalmente empleada por la resistencia que el hilo presenta a ello, sin producir ningún otro efecto; pero la otra parte TX, que impele transversalmente o hacia X al cuerpo, acelera directamente el movimiento en la cicloide. Es entonces obvio que la aceleración del cuerpo, proporcional a esa fuerza aceleradora, será en todo momento como la longitud TX, esto es (porque CV, WV y TX, TW, proporcionales a ella, están dadas), como la longitud TW, esto es (por el Corolario I, Proposición XLIX), como la longitud del arco de la cicloide TR. En consecuencia, si se apartan desigualmente de la perpendicular AR y se dejan caer juntos dos péndulos APT y A*pt*, sus aceleraciones serán siempre como los arcos a describir TR y *t*R.



Pero las partes descritas al comienzo del movimiento son como las aceleraciones, esto es, como los espacios completos que han de ser descritos al comienzo, y por tanto las partes que quedan por describir, y las subsiguientes aceleraciones proporcionales a esas partes son

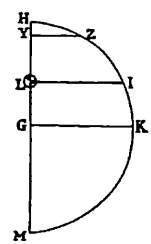
también como todo el espacio, y así sucesivamente. En consecuencia, las aceleraciones, las velocidades generadas y las partes descritas con esas velocidades, y las partes a describir, son siempre como el todo; en esa medida, como las partes a describir conservan una razón dada entre sí, se desvanecerán juntas, esto es, los dos cuerpos oscilantes llegarán juntos a la perpendicular AR. Y puesto que, por otra parte, el ascenso de los péndulos desde el lugar más bajo R a través de los mismos arcos cicloidales con un movimiento retrógrado es retrasado en los diversos lugares que atraviesan por las mismas fuerzas mediante las cuales se aceleró su descenso, es obvio que las velocidades de su ascenso y descenso a través de los mismos arcos son iguales y, así, realizadas en tiempos iguales; por consiguiente, como las dos partes de la cicloide, RS y RQ, que hay a cada lado de la perpendicular son semejantes e iguales, los dos péndulos realizarán tanto la totalidad como la mitad de sus oscilaciones en los mismos tiempos. Q.E.D.

COROLARIO. La fuerza con la cual el cuerpo T es acelerado o retrasado en cualquier lugar T de la cicloide es al peso total de ese mismo cuerpo en el lugar más alto S o Q como el arco de la cicloide TR es al arco SR o QR.

PROPOSICIÓN LII. PROBLEMA XXXIV

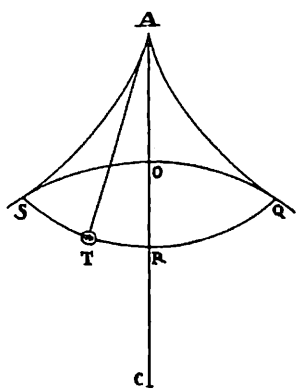
Definir las velocidades de péndulos en los diversos lugares y los tiempos en los que se realizan tanto las oscilaciones completas como sus diversas partes.

En torno a cualquier centro G, siendo el radio GH igual al arco de la cicloide RS, describir un semicírculo HKM bisectado por el semidiámetro GK. Y si una fuerza centrípeta proporcional a la distancia de los lugares con respecto al centro tiende hacia el centro G, y fuese en el perímetro HIK igual a la fuerza centrípeta en el perímetro del globo QOS tendiendo hacia su centro, y si al mismo tiempo que se deja caer el péndulo T desde el lugar más alto S, se deja caer un cuerpo, L, desde H a G, entonces, como las fuerzas que actúan sobre los cuerpos son iguales en el comienzo, y siempre proporcionales a los espacios a



describir TR y LG, y por lo tanto si TR y LG son iguales, son iguales igualmente en los lugares T y L, es obvio que esos cuerpos describen en el comienzo espacios iguales ST y HL, con lo cual siguen siendo movidos igualmente y continúan describiendo espacios iguales.

Por consiguiente, de acuerdo con la Proposición XXXVIII, el tiempo en el que el péndulo describe el arco ST es al tiempo de una oscilación, como el arco HI, tiempo en el que el cuerpo H llega a L, a la semiperiferia HKM, tiempo en el cual el cuerpo H llega a M. Y la velocidad del cuerpo pendular en el lugar T es a su velocidad en el lugar más bajo R, esto es, la velocidad del cuerpo H en el lugar L a su velocidad en el lugar G, o el incremento momentáneo de la línea HL al incremento momentáneo de la línea HG (creciendo los arcos HI y HK con una velocidad uniforme) como la ordenada LI al radio GK, o como $\sqrt{(SR^2 - TR^2)}$ a SR. Por tanto, como en oscilaciones desiguales se describen en tiempos iguales arcos proporcionales a los arcos enteros de las oscilaciones, partiendo de los tiempos dados se obtienen tanto las velocidades como los arcos descritos en todas las oscilaciones en general. Lo cual se requería al principio.



Hágase ahora que cualesquiera cuerpos pendulares oscilen en diferentes cicloides descritas dentro de globos diferentes, cuyas fuerzas absolutas son diferentes también; y si la fuerza absoluta de cualquier globo QOS se denominase V, la fuerza acelerativa con la cual es afectado el péndulo en la circunferencia de este globo, cuando comienza a moverse directamente hacia su centro, será como la distancia del cuerpo pendular respecto de tal centro y la fuerza absoluta del globo conjuntamente, esto es, como $CO \times V$. Por consiguiente, la breve línea HY, que es como esta fuerza acelerada $CO \times V$, será descrita en un tiempo dado; y si se levanta la perpendicular YZ de manera que encuentre a la circunferencia en Z, el arco naciente HZ denotará ese tiempo dado. Pero ese arco naciente HZ varía como la raíz cuadrada del rectángulo

$GH \times HY$, y por lo mismo como $\sqrt{(GH \times CO \times V)}$. De ahí que el tiempo de una oscilación completa en la ciloide QRS (siendo como la semiperiferia HKM, que denota esa oscilación completa, directamente; y como, el arco HZ, que de modo análogo denota un tiempo dado, inversamente) será como GH directamente y como $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversamente; estó es, dado que GH y SR son iguales, como $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, o (por el Corolario de la Proposición I) como $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Por tanto, las oscilaciones en todos los globos y cicloides, realizadas con cualesquiera fuerzas absolutas, varían directamente como la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda, e inversamente como la raíz cuadrada de la distancia entre el punto de suspensión y el centro del globo, y también inversamente como la raíz cuadrada de la fuerza absoluta del globo. Q.E.I.

COROLARIO I. En consecuencia, también pueden compararse entre sí los tiempos de oscilación, caída y giro. Pues si el diámetro de la rueda con la cual se describe la cicloide dentro del globo se supone igual al semidiámetro del globo, la cicloide se convertirá en una línea recta que atraviesa el centro del globo, y la oscilación se transformará en un descenso y subsiguiente ascenso en esa recta. Están dados, por consiguiente, tanto el tiempo del descenso desde cualquier lugar hasta el centro como el tiempo igual a él en el que el cuerpo, girando uniformemente alrededor del centro del globo a cualquier distancia, describe el arco de un cuadrante. Porque este tiempo (por el Caso 2) es al tiempo de la mitad de una oscilación en cualquier cicloide QRS como

$$1 \text{ a } \sqrt{\frac{AR}{AC}}.$$

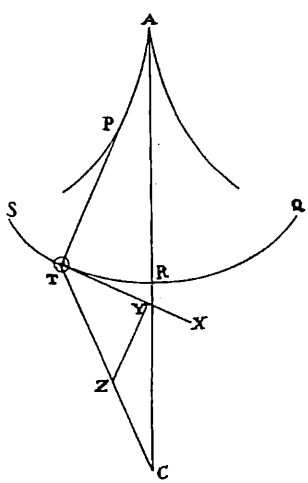
COROLARIO II. Se sigue también lo que Sir *Christopher Wren* y el señor *Huygens* han descubierto sobre la cicloide común. Pues si el diámetro del globo se aumenta infinitamente, su superficie esférica se transformará en un plano, y la fuerza centrípeta actuará uniformemente en la dirección de líneas perpendiculares a ese plano, y nuestra cicloide pasará a ser idéntica a la cicloide común. Pero en ese caso la longitud del arco de la cicloide entre ese plano y el punto descriptivo se hará igual a cuatro veces el seno verso de la mitad del arco de la rueda entre el mismo plano y el punto descriptivo, como

descubrió Sir *Christopher Wren*. Y un péndulo entre dos cicloides semejantes oscilará en una cicloide semejante e igual en tiempos iguales, como demostró el señor *Huygens*. También el descenso de cuerpos graves en el tiempo de una oscilación será el mismo mostrado por el señor *Huygens*.

Las Proposiciones aquí demostradas están adaptadas a la verdadera constitución de la Tierra, en tanto en cuanto ruedas que se muevan en uno cualquiera de sus círculos máximos describirán, por los movimientos de clavos fijados en su periferia, cicloides exteriores al globo; y los péndulos, en minas y cavernas profundas de la tierra, deben oscilar en cicloides interiores al globo para que esas oscilaciones puedan realizarse en tiempos iguales. Pues la gravedad (como mostrará el tercer Libro) decrece en su progreso desde la superficie de la Tierra; hacia arriba como la razón cuadrada de las distancias desde el centro de la Tierra; hacia abajo como esas distancias.

PROPOSICIÓN LIII. PROBLEMA XXXV

Concediendo las cuadraturas de figuras curvilíneas, se pide hallar las fuerzas con las que cuerpos que se muevan en curvas dadas puedan siempre realizar sus oscilaciones en tiempos iguales.



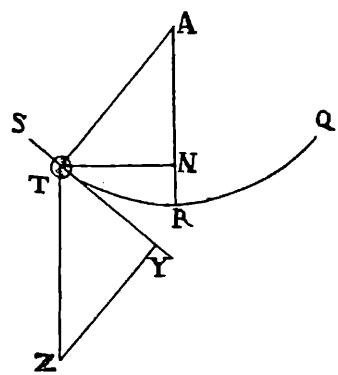
Hágase oscilar al cuerpo T en cualquier curva STRQ, cuyo eje sea AR pasando por el centro de fuerza C. Trácese TX tocando a esa curva en cualquier lugar del cuerpo T, y en esa tangente TX tómese TY igual al arco TR.

La longitud de ese arco es conocida por los métodos comunes usados para la cuadratura de figuras. Desde el punto Y trácese la recta YZ perpendicular a la tangente. Trácese CT encontrándose con YZ en Z, y la fuerza centrípeta será proporcional a la recta TZ. Q.E.I.

Pues si la fuerza con la cual el cuerpo es atraído desde T hacia C se

expresa por la recta TZ que se toma proporcional a ella, esa fuerza se descompondrá en dos fuerzas TY e YZ, de las cuales YZ, tirando del cuerpo en la dirección de la longitud del hilo PT, no cambia para nada su movimiento; mientras que la otra fuerza TY acelera o retrasa directamente su movimiento en la curva STRQ. Así pues, siendo esa fuerza como el espacio a describir TR, las aceleraciones o retrasos del cuerpo al describir dos partes proporcionales (una mayor y otra menor) de dos oscilaciones serán siempre como esas partes, haciendo así que esas partes se describan simultáneamente. Pero los cuerpos que describen continuamente en el mismo tiempo partes proporcionales al todo describirán el todo en el mismo tiempo. Q.E.D.

COROLARIO I. Por consiguiente, si el cuerpo T que cuelga por un hilo rectilíneo AT desde el centro A describe el arco circular STRQ, y mientras tanto es afectado por cualquier fuerza tendente hacia abajo con direcciones paralelas, que es a la fuerza uniforme de la gravedad como el arco TR a su seno TN, los tiempos de las diversas oscilaciones serán iguales.



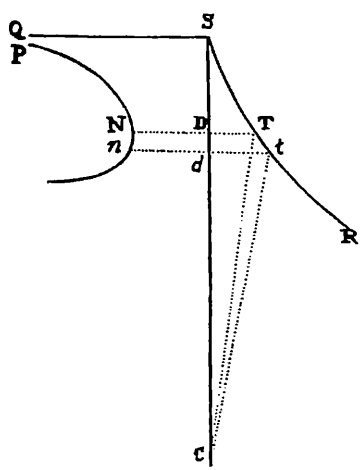
Como TZ y AR son paralelas, los triángulos ATN y ZTY son semejantes, y TZ será a AT como TY a TN; y si la fuerza uniforme de la gravedad se expresa por la longitud dada AT, la fuerza TZ mediante la cual se hacen isócronas las oscilaciones será a la fuerza de gravedad AT como el arco TR igual a TY es a TN, seno de tal arco.

COROLARIO II. Y en los relojes, si las fuerzas son impresas por alguna máquina sobre el péndulo para conservar el movimiento, y están compuestas de tal manera con la fuerza de gravedad que la fuerza total tendente hacia abajo será siempre como una línea que se obtiene dividiendo el producto del arco TR y el radio AR por el seno TN, todas las oscilaciones se harán isócronas.

PROPOSICIÓN LIV. PROBLEMA XXXVI

Concediendo las cuadraturas de figuras curvilíneas, se pide hallar los tiempos en que por medio de cualquier fuerza centrípeta los cuerpos descenderán o ascenderán en cualesquiera líneas curvas en un plano que atraviesa el centro de fuerza.

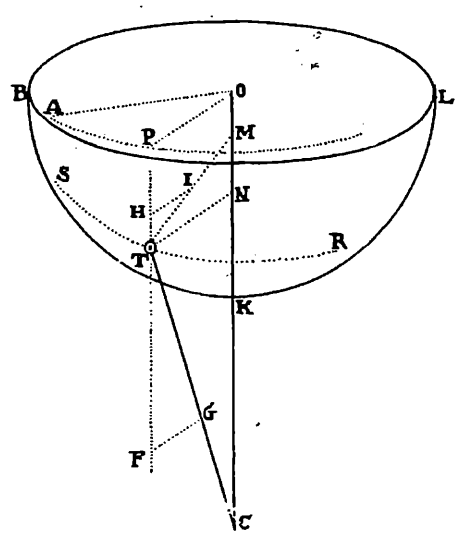
Hágase que el cuerpo descienda desde cualquier lugar S y se mueva en cualquier curva STtR dada en un plano que pasa a través del centro de fuerza C. Unase CS y divídase en innumerables partes iguales, una de ellas D*d*. Desde el centro C, con los radios CD y C*d*, descríbanse los círculos DT y d*t*, que encuentran a la curva STtR en T y *t*. Como está dada la ley de la fuerza centrípeta, y también la altura CS desde la que cayó primero el cuerpo, estará dada la velocidad del cuerpo en cualquier otra altura CT (por la Proposición XXXIX). Pero el tiempo en el que el cuerpo describe la línea mínima T*t* es como la longitud de esa línea mínima, esto es, directamente como la secante del ángulo *t*TC e inversamente como la velocidad. Hágase que la ordenada DN, proporcional a este tiempo, sea perpendicular a la recta CS en el punto D, y como D*d* está dada, el rectángulo D*d* × DN, esto es, el área DN*nd*, será proporcional al mismo tiempo. Por consiguiente, si PN*n* fuese una curva que el punto N toca siempre, y su asíntota fuese una recta SQ en ángulo recto con la línea CS, el área SQPND será proporcional al tiempo en el que el cuerpo en su descenso ha descrito la línea ST; en consecuencia, una vez hallada ese área estará dado también el tiempo. Q.E.I.



PROPOSICIÓN LV. TEOREMA XIX

Si un cuerpo se mueve en cualquier superficie curva cuyo eje pasa a través del centro de fuerza, y se traza desde el cuerpo una

perpendicular sobre el eje; y se traza una línea paralela e igual a ella desde cualquier punto dado del eje, afirmo que esa paralela describirá un área proporcional al tiempo.



Sea BKL una superficie curva, T un cuerpo que gira en ella, STR una curva que el cuerpo describe en la misma, S el comienzo de la curva, OMK el eje de la superficie curva, TN una recta trazada perpendicularmente desde el cuerpo al eje; OP una línea paralela e igual a ella trazada desde el punto dado O en el eje; AP la senda descrita por el punto P en el plano AOP donde se encuentra la línea circundante OP; A el comienzo de esa senda que corresponde al punto S; TC una recta trazada desde el cuerpo al centro; TG una parte proporcional a la fuerza centrípeta con la cual tiende el cuerpo hacia el centro C; TM una recta perpendicular a la superficie curva; TI una parte de ella proporcional a la fuerza de presión con la cual el cuerpo oprime a la superficie y, por lo mismo, con la cual se ve nuevamente repelido por la superficie hacia M; PTF una recta paralela al eje que atraviesa el cuerpo, y GF e IH rectas trazadas perpendicularmente desde los puntos G e I sobre esa paralela PHTF.

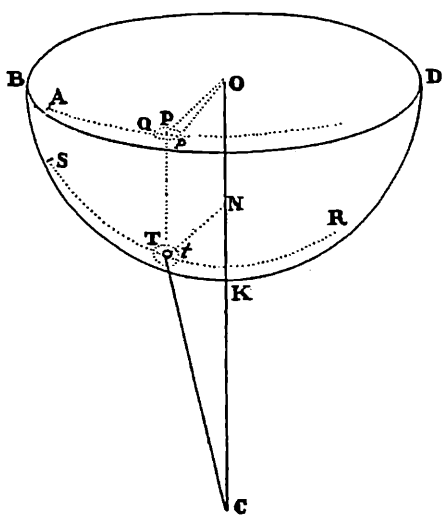
Afirmo ahora que el área AOP, descrita por el radio OP desde el comienzo del movimiento, es proporcional al tiempo. Pues la fuerza TG (por el Corolario II de las Leyes del Movimiento) se descompone en las fuerzas TF y FG; y la fuerza TI en las fuerzas TH e HI; pero las fuerzas TF y TH, que actúan en la dirección de la línea PF perpendicular al plano AOP, no introducen cambio alguno en el movimiento del cuerpo salvo en una dirección perpendicular a ese plano. En consecuencia, su movimiento, en tanto en cuanto tiene la misma dirección que la posición del plano, esto es, el movimiento del punto P, por el

cual es descrita en ese plano la proyección AP de la curva, es el mismo que si se suprimiesen las fuerzas TF y TH, y el cuerpo fuese afectado tan sólo por las fuerzas FG y HI; esto es, el mismo que si el cuerpo fuese a describir en el plano AOP la curva AP por medio de una fuerza centrípeta tendente al centro O, e igual a la suma de las fuerzas FG y HI. Pero con una fuerza semejante (por la Proposición I) el área AOP se describirá proporcional al tiempo. Q.E.D.

COROLARIO. Por el mismo razonamiento, si un cuerpo afectado por fuerzas tendentes a dos o más centros en la misma recta dada CO describiese en un espacio sin resistencia la curva ST, el área AOP sería siempre proporcional al tiempo.

PROPOSICIÓN LVI. PROBLEMA XXXVII

Concediendo la cuadratura de figuras curvilíneas, y suponiendo que están dadas tanto la ley de la fuerza centrípeta tendente hacia un centro dado como la superficie curva cuyo eje pasa a través de ese centro, se pide hallar la curva que un cuerpo describirá en esa superficie cuando se aleja desde un lugar dado con una velocidad dada y en una dirección dada en esa superficie.



Conservando la última construcción, hágase que el cuerpo T vaya desde el lugar dado S en la dirección de una línea dada por posición y gire en la curva STR, cuya proyección ortográfica en el plano BDO es AP. Y partiendo de la velocidad dada del cuerpo en la altura SC, estará dada también su velocidad en cualquier otra altura TC. Con esa velocidad, en un momento dado del tiempo, hágase que el cuerpo describa el segmento Tt de su cur-

va, siendo P*p* la proyección de ese segmento descrito en el plano AOP. Unase O*p* y, describiendo un pequeño círculo sobre la superficie curva en torno al centro T con el radio T*t*, hágase que la proyección de ese pequeño círculo en el plano AOP sea la elipse *p*Q. Y como la magnitud de ese pequeño círculo T*t* está dada, así como TN o PO, su distancia respecto del eje CO, la elipse *p*Q estará dada tanto en especie como en magnitud, como también su posición respecto de la recta PO. Y puesto que el área PO*p* es proporcional al tiempo y, por lo mismo, dada al estar dado el tiempo, el ángulo PO*p* estará dado.

Y estarán dados el punto *p*, intersección común de la elipse y la recta O*p*, junto con el ángulo OP*p*, con el que la proyección AP*p* de la curva corta la línea OP. Pero con ello aparece fácilmente (comparando la Proposición XLI con su Corolario II) la manera de determinar la curva AP*p*. Entonces, desde los diversos puntos P de esa proyección, levantando hasta el plano AOP la perpendicular PT, que encuentra a la superficie curva en T, estarán dados los diversos puntos T de la curva. Q.E.I.

SECCION XI

Sobre los movimientos de cuerpos que tienden unos a otros con fuerzas centrípetas

Hasta aquí he estado exponiendo las atracciones de cuerpos hacia un centro inmóvil, aunque muy probablemente no exista cosa semejante en la naturaleza de las cosas. Pues las atracciones suelen dirigirse hacia cuerpos, y las acciones de los cuerpos atraídos y atrayentes son siempre recíprocas e iguales, por la Tercera Ley; con lo cual si hay dos cuerpos ni el atraído ni el atrayente se encuentran verdaderamente en reposo, sino que ambos (por el Corolario IV de las Leyes del Movimiento) giran en torno a un centro común de gravedad, estando por así decirlo mutuamente atraídos. Y si existen más cuerpos, que o bien están atraídos por un cuerpo, atraído a su vez por ellos, o que se atraen todos mutuamente entre sí, tales cuerpos se moverán de modo tal entre sí que su centro común de gravedad se encontrará o bien en reposo o se moverá uniformemente hacia adelante en línea recta. En consecuencia, pasaré ahora a tratar el movimiento de cuerpos que se atraen los unos a los otros, considerando las fuerzas centrípetas como atracciones, aunque en estricto rigor físico pudieran llamarse más apropiadamente impulsos. Pero estas Proposiciones deben considerarse puramente matemáticas; en esa medida, prescindiendo de cualesquiera consideraciones físicas, utilizo un discurso llano para hacerme comprender mejor por un lector matemático.

PROPOSICIÓN LVII. TEOREMA XX

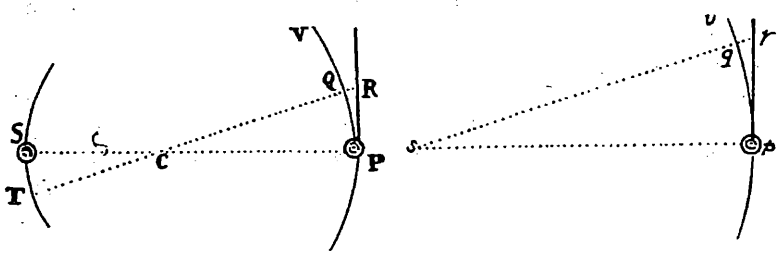
Dos cuerpos que se atraen mutuamente describen figuras semejantes en torno a su centro de gravedad común, y cada uno alrededor del otro.

Las distancias de los cuerpos respecto de su centro común de gravedad son inversamente proporcionales a los cuerpos; se encuentran por lo mismo en una razón dada entre sí y, en consecuencia, por composición de razones, guardan una razón dada con respecto a la distancia entre los cuerpos. Esas distancias se mueven en torno a su extremo común con un movimiento angular uniforme, pues yaciendo en la misma recta jamás cambia su inclinación respectiva. Pero las líneas rectas que guardan entre sí una razón dada, y giran en torno a sus extremos con un movimiento angular uniforme sobre planos que reposan junto con ellas, o son movidos con cualquier movimiento no angular, describen figuras enteramente semejantes alrededor de tales extremos. En consecuencia, las figuras descritas por la revolución de esas distancias son semejantes. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LVIII. TEOREMA XXI

Si dos cuerpos se atraen recíprocamente con fuerzas cualesquiera, y giran en torno al centro común de gravedad, afirmo que por las mismas fuerzas puede describirse alrededor de uno de estos cuerpos inmovido una figura semejante e igual a las figuras que los cuerpos con tal movimiento describen el uno en torno al otro.

Supóngase que los cuerpos S y P giran en torno a su centro común de gravedad C, procediendo desde S a T y desde P a Q.



Partiendo del punto dado *s*, trácense continuamente *sp* y *sq*, iguales y paralelas a SP y TQ; y la curva *pqv*, que el punto *p* describe en su revolución alrededor del punto fijo *s*, será semejante e igual a las curvas que los cuerpos S y P describen el uno en torno al otro; en consecuencia, por el Teorema XX, será semejante a las curvas ST y PQV que los mismos cuerpos describen en torno a su centro común de gravedad C; y ello porque las proporciones de las líneas SC, CP y SP, o *sp*, entre sí están dadas.

CASO 1. El centro común de gravedad C (por el Corolario IV de las Leyes del Movimiento) se encuentra o bien en reposo o moviéndose uniformemente en línea recta. Supongamos primero que está en reposo, situando dos cuerpos en *s* y *p*, uno inmóvil en *s* y el otro móvil en *p*, semejantes e iguales a los cuerpos S y P. Hágase luego que las rectas PR y *pr* toquen a las curvas PQ y *pq* en P y *p*, prolongándose CQ y *sq* hasta R y *r*. Como las figuras CPRQ y *sprq* son semejantes, RQ será a *rq* como CP a *sp*, hallándose por lo mismo en una razón dada. Así pues, si la fuerza con la cual el cuerpo P es atraído hacia el cuerpo S y, por tanto, hacia el centro intermedio C, se encontrase en la misma razón dada con la fuerza con la cual el cuerpo *p* es atraído hacia el centro *s*, esas fuerzas –en tiempos iguales– atraerían a los cuerpos desde las tangentes PR y *pr* hasta los arcos PQ y *pq*, a través de los intervalos proporcionales RQ y *rq*; y, en consecuencia, esta última fuerza (tendente a *s*) haría que el cuerpo *p* girase en la curva *pqv*, que se haría semejante a la curva PQV, donde la primera fuerza obliga al cuerpo a girar; y sus revoluciones se completarían en los mismos tiempos. Pero como esas fuerzas no se encuentran respectivamente en la razón de CP a *sp*, sino (por razón de la semejanza e igualdad de los cuerpos S y *s*, P y *p*, y la igualdad de las distancias SP y *sp*) que son mutuamente iguales, en tiempos iguales los cuerpos serán igualmente desviados de las tangentes; en esa medida, para que el cuerpo *p* pueda ser atraído a través del intervalo mayor *rq* se requiere un tiempo mayor, que variará como la raíz cuadrada de los intervalos; pues, por el Lema X, los espacios descritos al comienzo del movimiento son como el cuadrado de los tiempos. Supongamos entonces que la velocidad del cuerpo *p* sea a la velocidad del cuerpo P como la raíz cuadrada de la razón de la distancia *sp* a la distancia CP, de modo que los arcos *pq* y PQ, que se hallan en una proporción simple entre sí, puedan describirse en tiempos que son como la raíz cuadrada de las distancias; y los cuerpos P y *p*, atraídos

iempre por fuerzas iguales, describirán alrededor de los centros ijos C y *s* figuras semejantes PQV y *pqv*, la última de las cuales erá semejante e igual a la figura que el cuerpo P describe lrededor del cuerpo móvil S. Q.E.D.

CASO 2. Supongamos ahora que el centro común de gravedad, junto con el espacio en el cual los cuerpos se mue-en entre sí, progresa uniformemente en línea recta; y (por el Corolario VI de las Leyes del Movimiento) todos los movimien-os en este espacio se realizarán igual que antes, con lo cual los uerpos describirán el uno alrededor del otro las mismas figuras ue antes, que por lo mismo serán semejantes e iguales a la igura *pqv*. Q.E.D.

COROLARIO I. Dos cuerpos que se atraigan el uno al otro on fuerzas proporcionales a su distancia describen (por la Proposición X) alrededor de su centro común de gravedad, y el no alrededor del otro, elipses concéntricas; y, a la inversa, si se describen tales figuras las fuerzas son proporcionales a las distancias.

COROLARIO II. Y dos cuerpos, cuyas fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de su distancia, describen por las Proposiciones XI, XII y XIII) tanto alrededor de su centro común de gravedad como el uno en torno al otro, secciones cónicas que tienen su foco en el centro en torno al cual se describen las figuras. Y, a la inversa, si tales figuras se describen las fuerzas centrípetas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

COROLARIO III. Dos cuerpos cualesquiera que giren en torno a su centro común de gravedad describen áreas proporcionales a los tiempos, por radios trazados tanto hacia ese centro como hacia ellos mismos.

PROPOSICIÓN LIX. TEOREMA XXII

El tiempo periódico de dos cuerpos S *y* P *que giran alrededor de su centro común de gravedad* C, *es al tiempo periódico de uno de los cuerpos* P *que gira en torno al otro,* S, *fijo, describiendo una figura semejante e igual a aquellas que los cuerpos describen el uno alrededor del otro, como* $\sqrt{S}$ *es a* $\sqrt{(S+P)}$.

Pues por la demostración de la última Proposición los tiempos en los que se describen cualesquiera arcos semejantes

PQ y *pq* son como $\sqrt{CP}$ es a $\sqrt{SP}$, o $\sqrt{sp}$, esto es, como $\sqrt{S}$ es a $\sqrt{(S+P)}$. Y por composición de razones las sumas de los tiempos en los que se describen todos los arcos PQ y *pq* semejantes, esto es, los tiempos totales en los que se describen la totalidad de las figuras semejantes, se encuentran en la misma razón de $\sqrt{S}$ a $\sqrt{(S+P)}$. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LX. TEOREMA XXIII

Si dos cuerpos S *y* P, *que se atraen recíprocamente con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de sus distancias, giran en torno a su centro común de gravedad, afirmo que el eje principal de la elipse que cualquiera de los cuerpos –digamos* P– *describe por su movimiento alrededor del otro,* S, *será al eje principal de la elipse que el mismo cuerpo* P *pueda describir en el mismo tiempo periódico alrededor del otro cuerpo* S *fijo como la suma de los dos cuerpos* S + P *a la primera de las dos medias proporcionales entre esa suma y el otro cuerpo* S.

Pues si las elipses descritas fuesen iguales entre sí, sus tiempos periódicos por el último Teorema serían como la raíz cuadrada de la razón del cuerpo S a la suma de los cuerpos S + P. Disminúyase en esa razón el tiempo periódico en la última elipse, y los tiempos periódicos se harán iguales; pero, por la Proposición XV, el eje principal de la elipse será disminuido en una razón sesquiplicata (potencia $\frac{3}{2}$) de la anterior, esto es, en una razón respecto de la cual la razón de S a S + P es al cubo, y en consecuencia ese eje será al eje principal de la otra elipse como la primera de dos medias proporcionales entre S + P y S a S + P. Y, a la inversa, el eje principal de la elipse descrita en torno al cuerpo móvil será al eje principal de la descrita alrededor del inmóvil como S + P a la primera de dos medias proporcionales entre S + P y S. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXI. TEOREMA XXIV

Si dos cuerpos que se atraen mutuamente con cualquier tipo de fuerza, sin ser agitados ni obstruidos por otra cosa, son movidos de cualquier modo, esos movimientos serán los mismos que si no se

atrajesen mutuamente para nada, sino que fuesen ambos atraídos con las mismas fuerzas por un tercer cuerpo situado en su centro de gravedad común; y la ley de las fuerzas atractivas será la misma con respecto a la distancia de los cuerpos al centro común como con respecto a la distancia entre los dos cuerpos.

Pues aquellas fuerzas con las cuales se atraen mutuamente los cuerpos, tendiendo a los cuerpos tienden también al centro común de gravedad que yace directamente entre ellos; y son por eso las mismas que si procedieran de un cuerpo intermedio. Q.E.D.

Y como está dada la razón de la distancia de cada cuerpo respecto de ese centro común a la distancia entre los dos cuerpos, está dada la razón de cualquier potencia de una distancia a la misma potencia de la otra distancia; y también la razón de cualquier cantidad derivada de cualquier modo partiendo de una de las distancias, compuesta de cualquier modo con cantidades dadas, a otra cantidad derivada de modo semejante partiendo de la otra distancia, y tantas cantidades dadas que posean esa razón dada de las distancias a la primera. En consecuencia, si la fuerza con la cual un cuerpo es atraído por otro es directa o inversamente como la distancia de los cuerpos entre sí, o como cualquier potencia de esa distancia o, por último, como cualquier cantidad derivada de cualquier modo partiendo de esa distancia compuesta con cantidades dadas, la misma fuerza con la cual el mismo cuerpo es atraído hacia el centro común de gravedad será de modo análogo directa o inversamente como la distancia del cuerpo atraído respecto del centro común, o como cualquier potencia de esa distancia o, por último, como una cantidad derivada de modo similar a partir de esa distancia compuesta con cantidades dadas análogas. Esto es, la ley de la fuerza atractiva será idéntica con respecto a ambas distancias. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXII. PROBLEMA XXXVIII

Determinar los movimientos de dos cuerpos que se atraen mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias entre ellos, cuando los mencionados cuerpos se dejan caer desde lugares dados.

Por el último Teorema, los cuerpos serán movidos de modo semejante a como lo serían de verse atraídos por un tercero situado en el centro común de su gravedad; y por hipótesis ese centro será fijado al comienzo de su movimiento, con lo cual (por el Corolario IV de las Leyes del Movimiento) permanecerá siempre fijo. Los movimientos de los cuerpos deben en consecuencia (por el Problema XXV) ser determinados como si se vieran impelidos por fuerzas tendentes a ese centro; y entonces obtendremos los movimientos de los cuerpos que se atraen mutuamente. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXIII. PROBLEMA XXXIX

Determinar los movimientos de dos cuerpos que se atraen mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales a los cuadrados de su distancia, cuando parten de lugares dados en direcciones dadas y con velocidades dadas.

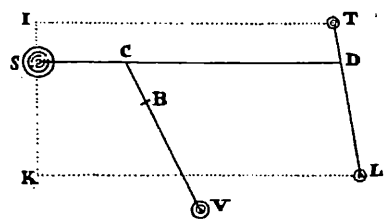
Estando dados los movimientos de los cuerpos en el comienzo, está dado también el movimiento uniforme del centro común de gravedad, y el movimiento del espacio que se mueve junto con ese centro uniformemente en línea recta, y también los movimientos iniciales de los cuerpos con respecto a ese espacio. Entonces (por el Corolario V de las Leyes del Movimiento y el último Teorema) los movimientos ulteriores en ese espacio se realizarán como si ese espacio y el centro común de gravedad estuviesen en reposo, y como si los cuerpos no se atrajesen, sino que fuesen atraídos por un tercer cuerpo situado en ese centro. En consecuencia, el movimiento en este espacio móvil de cada cuerpo partiendo de un lugar dado, en una dirección dada y con una velocidad dada, siendo afectado por una fuerza centrípeta tendente a ese centro, debe determinarse por los Problemas IX y XXVI, y al mismo tiempo se obtendrá el movimiento del otro alrededor del mismo centro. Con este movimiento compóngase el movimiento progresivo uniforme del sistema total del espacio y los cuerpos que giran allí, y se obtendrá el movimiento absoluto de los cuerpos en el espacio inmóvil. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXIV. PROBLEMA XL

Suponiendo que las fuerzas con las que se atraen mutuamente los cuerpos se incrementen en una razón simple de sus distancias con respecto al centro, se pide hallar los movimientos de varios cuerpos entre sí.

Supóngase que los dos primeros cuerpos T y L tienen su centro común de gravedad en D. Por el Corolario I del Teorema XXI, esos cuerpos describirán elipses con centros en D, cuyas magnitudes son conocidas por el Problema V.

Hágase ahora que un tercer cuerpo S atraiga a T y L con las fuerzas aceleratívas ST y SL, y que sea atraído a su vez por ellos. La fuerza ST (por el Corolario II de las Leyes del Movimiento) se descompone en las fuerzas SD y DT; y la fuerza SL en las fuerzas SD y DL. Las fuerzas DT y DL, que son como su suma TL y, así, como las fuerzas aceleratívas con las cuales se atraen mutuamente los cuerpos T y L, añadidas a las fuerzas de los cuerpos T y L, la primera a la primera y la última a la última, componen fuerzas proporcionales a las distancias DT y DL como antes, aunque mayores que las previas; y en consecuencia (por el Corolario I de la Proposición X, y los Corolarios I y VIII de la Proposición IV) harán que los cuerpos describan elipses como antes, pero con un movimiento más rápido. Las fuerzas aceleratívas SD y SD restantes, por las fuerzas motrices SD × T y SD × L que son como los cuerpos y atraen a esos cuerpos igualmente y en la dirección de las líneas TI y LK, paralelas a DS, no cambian para nada sus situaciones una con respecto a la otra, sino que hacen que se aproximen igualmente a la línea IK; que debe imaginarse trazada atravesando la mitad del cuerpo S y perpendicular a la línea DS. Pero esa aproximación a la línea IK será obstaculizada haciendo que el sistema de los cuerpos T y L por una parte, y el cuerpo S por la otra, gire con velocidades adecuadas alrededor del centro común de gravedad C. Con semejante movimiento, el cuerpo S, como la suma de las fuerzas motrices SD × T y SD × L es proporcional a la distancia CS, tiende hacia el centro C y describirá una elipse en torno a él; y el



punto D, como las líneas CS y CD son proporcionales, describirá una elipse análoga. Pero los cuerpos T y L, atraídos por las fuerzas motrices SD × T y SD × L, la primera por la primera y la segunda por la segunda, igualmente y en dirección de las paralelas TI y LK, como antes se dijo, continuarán (por los Corolarios V y VI de las Leyes del Movimiento) describiendo sus elipses alrededor del centro móvil D como antes. Q.E.I.

Añádase un cuarto cuerpo V y, mediante un razonamiento análogo, se demostrará que ese cuerpo y el punto C describirán elipses alrededor del centro común de gravedad B; los movimientos de los cuerpos T, L y S alrededor de los centros D y C permanecerán iguales, aunque acelerados. Y por el mismo método podríamos añadir cuerpos a placer. Q.E.I.

Este sería el caso aunque los cuerpos T y L se atrajesen entre sí con fuerzas aceleratívas superiores o inferiores a aquellas con las que atraen a los otros cuerpos en proporción a sus distancias. Supongamos que todas las atracciones aceleratívas sean una a la otra como las distancias multiplicadas por los cuerpos atractivos; de lo ya expuesto se concluye fácilmente que todos los cuerpos describirán elipses diferentes con iguales tiempos periódicos en torno a su centro común de gravedad B, en un plano inmóvil. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXV. TEOREMA XXV

Los cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de sus distancias respecto de sus centros, pueden moverse entre sí en elipses; y mediante radios trazados hasta los focos pueden describir áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos.

Demostramos en la última Proposición el caso donde los movimientos se realizarán exactamente en elipses. Cuanto más se aleje la ley de las fuerzas de la ley en ese caso, más se perturbarán unos a otros sus movimientos los cuerpos; y tampoco es posible que cuerpos que se atraen unos a otros con arreglo a la ley supuesta en esta Proposición se muevan exactamente en elipses, salvo manteniendo cierta proporción de distancias entre sí. Sin embargo, en los casos siguientes las órbitas no diferirán mucho de las elipses.

CASO 1. Imaginemos que varios cuerpos pequeños giran

alrededor de alguno muy grande a diferentes distancias, y supongamos fuerzas absolutas tendentes a cada uno de los cuerpos proporcionales a ellos. Y como (por el Corolario IV de las Leyes) el centro común de gravedad para todos se encuentra en reposo o se mueve uniformemente en línea recta, supongamos a los cuerpos tan pequeños que el cuerpo grande jamás puede hallarse a una distancia sensible de ese centro; entonces el cuerpo grande se encontrará o bien en reposo o moviéndose uniformemente hacia adelante en línea recta; y los cuerpos menores girarán en torno al grande en elipses, y por radios trazados hasta ellos describirán áreas proporcionales a los tiempos, si prescindimos de los errores que pueden introducirse por el alejamiento del cuerpo grande con respecto al centro común de gravedad, o por las acciones recíprocas de los cuerpos pequeños. Pero los cuerpos menores pueden disminuirse tanto que ese alejamiento y las acciones recíprocas de los cuerpos pueden hacerse inferiores a los asignables, con lo cual las órbitas pueden convertirse en elipses y las áreas responder a los tiempos sin error alguno superior a lo asignable. Q.E.O.

CASO 2. Imaginemos un sistema de cuerpos menores que giran alrededor de uno muy grande del modo recién descrito, o cualquier otro sistema de dos cuerpos que giran el uno en torno al otro moviéndose uniformemente hacia adelante en línea recta, y que mientras tanto es impelido lateralmente por la fuerza de otro cuerpo mucho mayor situado a gran distancia. Como las fuerzas aceleratívas iguales con las que son impelidos los cuerpos en direcciones paralelas no cambian la situación de los cuerpos entre sí, sino que sólo obligan al sistema total a cambiar de lugar mientras las partes siguen conservando sus movimientos recíprocos, es manifiesto que ningún cambio en esos movimientos de los cuerpos atraídos puede surgir de sus atracciones hacia el mayor, salvo por la desigualdad de las atracciones aceleratívas, o por las inclinaciones de las líneas unas respecto de otras en la dirección de las atracciones. Supongamos por eso que todas las atracciones aceleratívas hechas hacia el gran cuerpo sean entre ellas inversamente como los cuadrados de las distancias; y entonces, incrementando la distancia del gran cuerpo hasta que las diferencias de las rectas trazadas desde él a los otros con respecto a su longitud, y las inclinaciones respectivas de esas líneas, sean inferiores a cualquier diferencia dada, los movimientos de las partes del sistema continuarán sin errores que no sean inferiores a cualquier error dado. Y como por la

pequeña distancia de esas partes entre sí todo el sistema es atraído como si se tratara de un solo cuerpo, se moverá mediante esa atracción como si fuese un solo cuerpo; esto es, su centro de gravedad describirá alrededor del cuerpo grande una de las secciones cónicas (esto es, una parábola o hipérbola cuando la atracción es lánguida, y una elipse cuando es más vigorosa); y por radios trazados hasta ella describirá áreas proporcionales a los tiempos, sin otros errores que los provenientes de las distancias de las partes, y éstos son por suposición extremadamente pequeños y pueden disminuirse a placer. Q.E.O.

Mediante un razonamiento análogo pueden tratarse casos más complicados hasta lo infinito.

COROLARIO I. En el segundo Caso, cuanto más se aproxima el cuerpo muy grande al sistema de dos o más cuerpos en revolución, mayor será la perturbación en los movimientos de las partes del sistema entre sí; porque las inclinaciones de las líneas trazadas desde ese gran cuerpo a aquellas partes se hacen mayores, y la desigualdad de la proporción es mayor también.

COROLARIO II. Pero la perturbación será máxima si suponemos que las atracciones aceleratívas de las partes del sistema hacia el cuerpo mayor de todos no son inversamente como los cuadrados de las distancias desde ese gran cuerpo; especialmente si la desigualdad de esa proporción es mayor que la desigualdad de la proporción de las distancias respecto del gran cuerpo. Pues si la fuerza acelerativa, actuando en direcciones paralelas e igualmente, no provoca perturbación en los movimientos de las partes del sistema, es preciso, naturalmente, que cause una perturbación en alguna parte cuando actúa desigualmente, perturbación que será mayor o menor según sea mayor o menor la desigualdad. El exceso de los impulsos mayores que actúan sobre algunos cuerpos y no sobre otros debe necesariamente cambiar su situación respectiva. Y esta perturbación, añadida a la perturbación que surge de la desigualdad e inclinación de las líneas, hace mayor el conjunto de la perturbación.

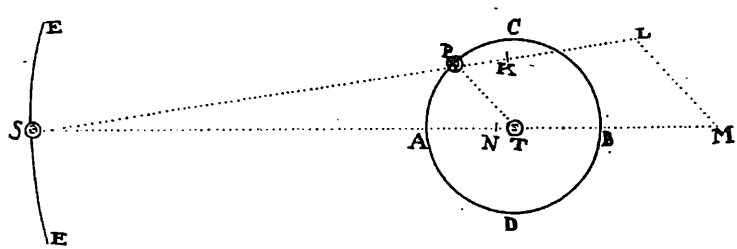
COROLARIO III. Así pues, si las partes de este sistema se mueven en elipses o círculos sin perturbación notable alguna, es manifiesto que si resultan en alguna medida impelidas por fuerzas aceleratívas tendentes a cualesquiera otros cuerpos el impulso es muy débil, o bien impreso casi igualmente y en direcciones paralelas sobre todas esas partes.

PROPOSICIÓN LXVI. TEOREMA XXVI

Si tres cuerpos, cuyas fuerzas decrecen cómo el cuadrado de las distancias, se atraen entre sí, y las atracciones aceleratívas de dos cualesquiera hacia el tercero son entre ellas inversamente como el cuadrado de las distintas, y los dos más pequeños giran en torno al mayor, afirmo que el interior de los dos cuerpos en revolución describirá por radios trazados hasta el más interno y mayor áreas más proporcionales a los tiempos, y una figura más próxima a la de una elipse con su foco en el punto de intersección de los radios, si ese gran cuerpo es perturbado por tales atracciones que si el gran cuerpo no fuese atraído para nada por los menores y permaneciese en reposo; o de lo que acontecería si ese gran cuerpo fuese mucho más o mucho menos atraído, o mucho más o mucho menos perturbado por las atracciones.

Esto resulta con suficiente claridad a partir de la demostración del segundo Corolario de la Proposición precedente; pero puede resolverse mediante una argumentación más nítida y universalmente convincente.

CASO 1. Supongamos que los cuerpos menores P y S giran en el mismo plano alrededor del cuerpo máximo T, describiendo el cuerpo P la órbita interior PAB, y el cuerpo S la órbita exterior ESE. Sea SK la distancia media de los cuerpos P y S, y exprésese la atracción acelerativa del cuerpo P hacia S, a esa distancia media, como la línea SK. Hágase SL a SK como el cuadrado de SK al cuadrado de SP, y SL será la atracción acelerativa del cuerpo P hacia S a cualquier distancia SP. Unase PT y trácese LM paralela a ella, encontrando a ST en M; y la atracción SL se descompondrá (por el Corolario II de las leyes del Movimiento) en las atracciones SM y LM. De este modo el cuerpo P será urgido por una triple fuerza acelerativa. Una de esas fuerzas tiende hacia T, y surge de las atracciones mutuas de los cuerpos



T y P. Por esta sola fuerza el cuerpo P describiría alrededor del cuerpo T, mediante el radio PT, áreas proporcionales a los tiempos y una elipse cuyo foco se encuentra en el centro del cuerpo T; y así sería tanto si el cuerpo T permaneciese inmovido como si fuese agitado por esa atracción. Esto resulta de la Proposición XI, de los Corolarios II y III al Teorema XXI. Otra fuerza es la de la atracción LM, que por tender desde P a T se sobreañadirá y coincidirá con ella, haciendo que las áreas sigan siendo proporcionales a los tiempos, por el Corolario III del Teorema XXI.

Pero como no es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia PT, compondrá al ser añadida a la fuerza previa una fuerza que difiere de tal proporción; tal variación, manteniéndose idéntico lo demás, será tanto mayor cuanto mayor sea la proporción de esta fuerza con respecto a la previa. Como por la Proposición XI y el Corolario II del Teorema XXI la fuerza con la cual se describe una elipse en torno al foco T debe ser dirigida hacia ese foco, y ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia PT, esa fuerza compuesta que difiere de tal proporción hará que la órbita PAB difiera de la figura de una elipse que tiene su foco en el punto T; y tanto más cuanto mayor sea la variación con respecto a esa proporción; y, en consecuencia, manteniendo iguales las demás cosas, tanto más cuanto mayor sea la proporción de la segunda fuerza LM respecto de la primera. Pero ahora la tercera fuerza, SM, que atrae al cuerpo P en una dirección paralela a ST, compone junto a las otras fuerzas una fuerza nueva que ya no se dirige de P a T; y que se desvía tanto más de esa dirección cuanto mayor es la proporción de la tercera fuerza a las otras, manteniéndose iguales las demás cosas, lo cual hace que el cuerpo P describa mediante el radio TP áreas ya no proporcionales a los tiempos, haciendo que la variación respecto de aquella proporcionalidad sea tanto mayor cuanto mayor sea la proporción de esta fuerza con respecto a las otras. Pero esta tercera fuerza incrementará la variación de la órbita PAB con respecto a la figura elíptica antes mencionada por dos motivos; en primer lugar, porque esa fuerza no se dirige desde P a T; y, en segundo lugar, porque no es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia PT. Entendido esto, es manifiesto que las áreas son máximamente proporcionales a los tiempos cuando esa tercera fuerza resulta mínima, manteniendo el resto su cantidad anterior; y que la órbita PAB se aproxima de modo máximo a la figura elíptica

antes mencionada cuando tanto la segunda como la tercera fuerza, y especialmente la tercera, son mínimas, conservando la primera su cantidad anterior.

Exprésese la atracción acelerativa del cuerpo T hacia S mediante la línea SN; si fuesen iguales entonces las atracciones aceleratívas SM y SN, atrayendo a los cuerpos T y P igualmente y en direcciones paralelas, éstos no cambiarían para nada su situación respectiva. Los movimientos de los cuerpos entre sí serían los mismos en ese caso que si no actuasen tales atracciones, por el Corolario VI de las Leyes del Movimiento. Y, por un razonamiento análogo, si la atracción SN es menor que la atracción SM, restará de la atracción SM la parte SN, de manera que sólo quedará la parte (de la atracción) MN para perturbar la proporcionalidad de las áreas y los tiempos, y la figura elíptica de la órbita. De modo semejante, si la atracción SN fuese mayor que la atracción SM la perturbación de la órbita y la proporción será producida exclusivamente por la diferencia MN. Así la atracción SN reduce siempre la atracción SM a la atracción MN, permaneciendo perfectamente inmodificadas la primera y la segunda atracción; con lo cual las áreas y los tiempos se aproximan de manera máxima a la proporcionalidad, y la órbita PAB a la figura elíptica antes mencionada, cuando la atracción MN es nula o la mínima posible; esto es, cuando las atracciones aceleratívas de los cuerpos P y T se acercan todo lo posible a la igualdad; esto es, cuando la atracción SN no es ni nula ni inferior a la más pequeña de todas las atracciones SM, sino por así decirlo una media entre la mayor y la menor de todas esas atracciones SM, esto es, ni mucho mayor ni mucho menor que la atracción SK. Q.E.D.

CASO 2. Supongamos ahora que los cuerpos menores P y S giran en torno a otro mayor T en planos diferentes. La fuerza LM, que actúa en la dirección de la línea PT situada en el plano de la órbita PAB, tendrá el mismo efecto que antes, y tampoco arrastrará al cuerpo P fuera del plano de su órbita. Pero NM, la otra fuerza, que actúa en la dirección de una línea paralela a ST (y, por lo mismo, inclinada hacia el plano de la órbita PAB cuando el cuerpo S está fuera de la línea de los nodos), introduce además de la perturbación del movimiento recientemente mencionada como longitud otra perturbación como latitud, atrayendo al cuerpo P desde el plano de su órbita. Y esta perturbación, en cualquier situación dada de los cuerpos P y T entre sí, será como la fuerza generativa MN; por lo cual se hace mínima

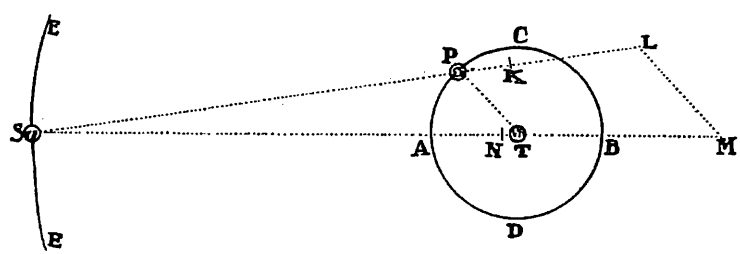
cuando la fuerza MN es mínima, esto es (como acaba de mostrarse), cuando la atracción SN no es ni mucho mayor ni mucho menor que la atracción SK. Q.E.D.

COROLARIO I. Puede inferirse de ello fácilmente que si varios cuerpos menores P, S, R, etc., giran en torno a un cuerpo muy grande T, el movimiento del más interior de los cuerpos en revolución P será mínimamente perturbado por las atracciones de los otros cuando el gran cuerpo es tan atraído y perturbado por el resto (con arreglo a la razón de las fuerzas aceleratívas), como los otros entre sí.

COROLARIO II. En un sistema de tres cuerpos T, P y S, si las atracciones aceleratívas de dos cualesquiera de ellos hacia un tercero o entre sí son inversamente como los cuadrados de las distancias, el cuerpo P describirá mediante el radio PT su área en torno al cuerpo T más rápidamente cerca de la conjunción A y la oposición B que cerca de las cuadraturas C y D. Pues cualquier fuerza que urja al cuerpo P sin urgir al cuerpo T, no actuando en la dirección de la línea PT, acelera o retrasa la descripción del área según sea su dirección la misma o contraria a la del movimiento del cuerpo. Tal es la fuerza NM. En el paso del cuerpo P desde C a A, esta fuerza tiende hacia la dirección en la que se está moviendo el cuerpo y, en consecuencia, lo acelera; hasta llegar a D tiende en dirección opuesta, y retrasa el movimiento; luego sigue en la dirección del cuerpo hasta B y, por último, adopta una dirección contraria al moverse desde B a C.

COROLARIO III. Y por el mismo razonamiento se muestra que el cuerpo P, manteniéndose igual las otras cosas, se mueve más rápidamente en la conjunción y en la oposición que en las cuadraturas.

COROLARIO IV. Manteniéndose iguales las otras cosas, la órbita del cuerpo P es más curva en las cuadraturas que en la conjunción y la oposición. Pues cuanto más rápidamente se mueven los cuerpos menos se desvían de una senda rectilínea. Además, la fuerza KL, o NM, es en la conjunción y la oposición

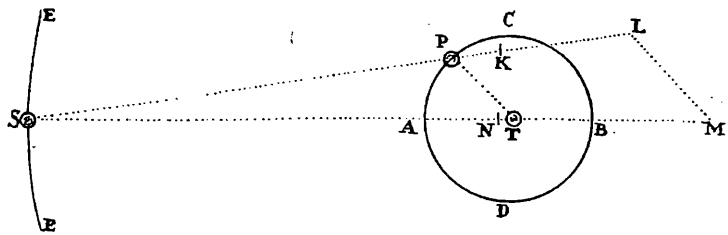


contraria a la fuerza con la cual atrae el cuerpo T al cuerpo P, y la disminuye por lo mismo; pero el cuerpo P se desviará tanto menos de una senda rectilínea cuanto menos se vea impelido hacia el cuerpo T.

COROLARIO V. Así pues, permaneciendo iguales las otras cosas, el cuerpo P se aleja más del cuerpo T en las cuadraturas que en la conjunción y oposición. No obstante, esto se dice sin tomar en cuenta la excentricidad variable. Pues si la órbita del cuerpo P fuese excéntrica, su excentricidad (como demostrará el Corolario IX) será máxima cuando los ápsides se encuentren en las sicigias; y puede entonces suceder que, al aproximarse al ápside más lejano, el cuerpo P se aleje más del cuerpo T en las sicigias que en las cuadraturas.

COROLARIO VI. Como la fuerza centrípeta del cuerpo central T, que retiene en su órbita al cuerpo P, se incrementa en las cuadraturas por la suma debida a la fuerza LM, y disminuye en las sicigias por la resta de la fuerza KL, y como la fuerza KL es mayor que LM, resulta más disminuida que incrementada; además, como esa fuerza centrípeta (por el Corolario II, Proposición IV) varía directamente como el radio TP, e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico, es obvio que la razón resultante es disminuida por la acción de la fuerza KL; y, en consecuencia, que el tiempo periódico, suponiendo que no se modifique el radio de la órbita PT, se incrementará como la raíz cuadrada de la razón en la que es disminuida la fuerza centrípeta; con lo cual, suponiendo incrementado o disminuido este radio, el tiempo periódico se incrementará más o disminuirá menos que en la potencia $\frac{3}{2}$ de ese radio, por el Corolario VI de la Proposición IV. Si esa fuerza del cuerpo central languideciera gradualmente, al verse progresivamente menos atraído el cuerpo P se alejaría más y más del centro T; y, al contrario, si se viese incrementada se acercaría más. En consecuencia, si la acción del cuerpo distante S, por la cual es disminuida esa fuerza, fuese a crecer y decrecer alternativamente, el radio TP crecería y decrecería alternativamente; y el tiempo periódico se incrementaría y disminuiría en una razón compuesta por la potencia $\frac{3}{2}$ del radio y la raíz cuadrada de la razón en que disminuyó o se incrementó la fuerza centrípeta del cuerpo central T, por el incremento o reducción en la acción del cuerpo distante S.

COROLARIO VII. De lo antes expuesto se sigue también que el eje de la elipse descrita por el cuerpo P, o la línea de los ápsides, se mueve alternativamente hacia atrás y hacia adelante



por lo que respecta a su movimiento angular, pero más hacia adelante que hacia atrás, y por exceso de su movimiento directo es arrastrada en conjunto hacia adelante. Pues la fuerza con la cual el cuerpo P es urgido hacia el cuerpo T en las cuadraturas, donde la fuerza MN se desvanece, está compuesta por la fuerza LM y la fuerza centrípeta con la cual el cuerpo T atrae al cuerpo P.

Si la distancia PT se incrementa, la primera fuerza LM se incrementa casi en la misma proporción, y la otra fuerza se reduce como el cuadrado de la razón de la distancia; con lo cual la suma de esas dos fuerzas se reduce en menos que el cuadrado de la razón de la distancia PT; con lo cual, por el Corolario I de la Proposición XLV, las líneas de los ápsides o, cosa idéntica, el ápside superior retrocederá. Pero en la conjunción y oposición la fuerza con la que es urgido el cuerpo P hacia el cuerpo T es la diferencia de la fuerza KL y la fuerza con la cual el cuerpo T atrae al cuerpo P; y esa diferencia –habida cuenta de que la fuerza KL es incrementada muy aproximadamente en la razón de la distancia PT– se reduce en más que el cuadrado de la razón de la distancia PT; con lo cual, por el Corolario I de la Proposición XLV, la línea de los ápsides se adelantará. En los lugares situados entre las sicigias y las cuadraturas el movimiento de la línea de los ápsides depende de ambas causas conjuntamente, de manera que avanza o retrocede en proporción al exceso de una de esas causas sobre la otra. Puesto que la fuerza KL es en las sicigias casi el doble que la fuerza LM en las cuadraturas, el exceso se encontrará en el lado de la fuerza KL y, en consecuencia, la línea de los ápsides será llevada hacia adelante. La verdad de este Corolario y el precedente se comprenderá más fácilmente concibiendo el sistema de los dos cuerpos T y P como si estuviese rodeado por todas partes de diversos cuerpos S, S, S, etc., dispuestos en torno a la órbita ESE. Pues por las acciones de esos cuerpos la acción del cuerpo

T será disminuida a cada lado, y decrecerá en más que el cuadrado de la razón de la distancia.

COROLARIO VIII. Pero como el movimiento directo o retrógrado de los ápsides depende de la reducción de la fuerza centrípeta, esto es, de encontrarse en una razón mayor o menor que el cuadrado de la razón de la distancia TP, en el paso del cuerpo desde el ápside inferior al superior; y de un incremento semejante en su retorno al ápside inferior nuevamente, haciéndose máximo cuando la proporción de la fuerza en el ápside superior a la fuerza en el ápside inferior se aleja más del cuadrado inverso de la razón de las distancias, es evidente que cuando los ápsides están en las sicigias se moverán hacia adelante más rápidamente por razón de la fuerza KL substraída o NM − LM; y en las cuadraturas irán hacia atrás más lentamente por la fuerza adicional LM. Como la velocidad de la progresión, o la lentitud de la retrogresión, se mantienen durante largo tiempo, esta desigualdad se hace superlativamente grande.

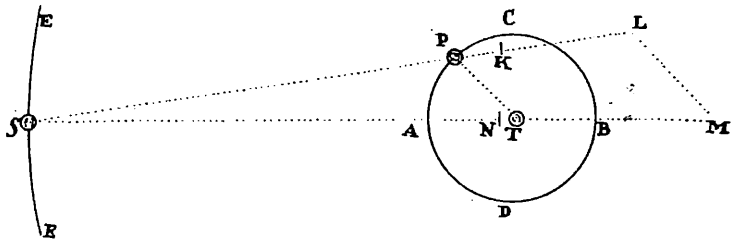
COROLARIO IX. Si por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia desde cualquier centro un cuerpo es obligado a girar en una elipse alrededor de ese centro; y luego, en su descenso desde el ápside superior al inferior, por una continua aparición de una nueva fuerza esa fuerza es incrementada en más que el cuadrado de la razón de la distancia disminuida; es manifiesto que el cuerpo, siendo impelido siempre hacia el centro por la continua aparición de esa nueva fuerza, se inclinará más hacia ese centro que si se viese urgido exclusivamente por esa fuerza que decrece como el cuadrado de la distancia disminuida, describiendo por eso una órbita interior a esa órbita elíptica, mientras el ápside inferior se aproxima más al centro que antes. En consecuencia, la aparición de esta nueva fuerza hará la órbita más excéntrica. Si ahora, mientras el cuerpo está volviendo desde el ápside inferior al superior, decreciese en los mismos grados que aumentó antes, el cuerpo retornaría a su primera distancia; con lo cual si la fuerza decrece en una razón aún mayor el cuerpo, siendo menos atraído que antes, ascenderá a una distancia aún mayor, incrementándose así la excentricidad de la órbita. En consecuencia, si la razón del incremento o reducción de la fuerza centrípeta es aumentada con cada revolución, se aumentará igualmente la excentricidad; y, al contrario, si esa razón decrece la excentricidad disminuirá.

Así pues, cuando en el sistema de los cuerpos T, P y S los

ápsides de la órbita PAB están en las cuadraturas, la razón de ese aumento y disminución se hace mínima, haciéndose máxima cuando los ápsides están en las sicigias. Si los ápsides están situados en las cuadraturas la razón cerca de los ápsides es menor, y cerca de las sicigias mayor, que el cuadrado de la razón de las distancias; y de esa razón mayor surge un movimiento directo de la línea de los ápsides, como acaba de ser mencionado. Pero si consideramos la razón del aumento o reducción global en el progreso entre los ápsides, es menos que el cuadrado de la razón de las distancias. La fuerza en el ápside superior es con respecto a la fuerza en el ápside inferior menor que el cuadrado de la razón de la distancia del ápside superior desde el foco de la elipse a la distancia del ápside inferior desde el mismo foco; y a la inversa, cuando los ápsides están situados en las sicigias, la fuerza en el ápside inferior guarda con la fuerza en el ápside superior una proporción mayor que el cuadrado de la razón de las distancias. Porque las fuerzas LM en las cuadraturas, añadidas a las fuerzas del cuerpo T, componen fuerzas en una razón menor; y las fuerzas en las sicigias, restadas de las fuerzas del cuerpo T, dejan a las fuerzas en una razón mayor. Así pues, la razón del aumento y reducción global en el paso entre los ápsides es mínima en las cuadraturas y máxima en las sicigias; por lo cual en el paso de los ápsides desde las cuadraturas hasta las sicigias se ve continuamente aumentada, incrementando la excentricidad de la elipse; y en el paso de las sicigias a las cuadraturas decrece continuamente, y disminuye su excentricidad.

COROLARIO X. Para poder dar cuenta de los errores de latitud, supongamos que el plano de la órbita EST permanece inmóvil; y partiendo de la causa de los errores antes explicada es manifiesto que de las dos fuerzas NM y ML, que son su causa única y total, la fuerza ML actúa siempre en el plano de la órbita PAB y nunca perturba los movimientos en cuanto a latitud; la fuerza NM, cuando los nodos están en las sicigias, actúa también en el mismo plano de la órbita y no afecta en ese momento a tales movimientos.

Pero cuando los nodos están en las cuadraturas los perturba mucho y, atrayendo continuamente al cuerpo P hacia fuera del plano de su órbita, disminuye la inclinación del plano en el paso del cuerpo desde las cuadraturas hasta las sicigias, para luego incrementarla en el paso desde las sicigias a las cuadraturas. Llega a suceder entonces que cuando el cuerpo está en las



sicigias la inclinación es mínima, y casi vuelve a la primera magnitud cuando el cuerpo llega al nodo siguiente. Pero si los nodos están situados en los octantes tras las cuadraturas, esto es, entre C y A, D y B, será manifiesto por lo recién mostrado que en el paso del cuerpo P desde cualquier nodo al decimonoveno grado desde él la inclinación del plano es continuamente disminuida; luego, en el paso de 45 grados hasta la siguiente cuadratura la inclinación aumenta; y luego, una vez más, tras atravesar otros 45 grados hasta el nodo siguiente, se ve disminuida. En consecuencia, la inclinación es más disminuida que incrementada, y en el nodo siguiente es siempre inferior que en el previo. Y, por un razonamiento similar, la inclinación es más incrementada que disminuida en los otros octantes entre A y D, B y C. Por lo cual la inclinación es máxima cuando los nodos están en las sicigias. En su paso desde las sicigias a las cuadraturas la inclinación es disminuida en cada aproximación del cuerpo a los nodos; y se hace mínima cuando los nodos están en las cuadraturas, y el cuerpo en las sicigias; entonces aumenta en los mismos grados que se redujo antes, y cuando los nodos se acercan a la siguiente sicigia vuelve a su primera magnitud.

COROLARIO XI. Dado que cuando los nodos están en las cuadraturas el cuerpo P es atraído continuamente desde el plano de su órbita; y dado que esa atracción se hace hacia S en su paso desde el nodo C a través de la conjunción A hasta el nodo D; y en la dirección opuesta en su paso desde el nodo D a través de la oposición B hasta el nodo C; es manifiesto que en su movimiento desde el nodo C el cuerpo se aleja continuamente desde el plano precedente CD de su órbita hasta aproximarse al nodo siguiente; por lo cual en ese nodo, estando ahora a su máxima distancia con respecto al primer plano CD, no pasará a través del plano de la órbita EST en D, el otro nodo de dicho plano, sino en un punto más próximo al cuerpo S, que por lo mismo se

convierte en un nuevo lugar del nodo tras su lugar precedente. Y, por un razonamiento análogo, los nodos continuarán alejándose en su paso desde este nodo al siguiente. Así pues, cuando los nodos están situados en las cuadraturas se alejan sin cesar; y en las sicigias, donde no puede producirse perturbación del movimiento en cuanto a latitud se refiere, reposan; en los lugares intermedios comparten ambas condiciones, alejándose más lentamente; y siendo siempre retrógrados o estacionarios, siempre serán arrastrados hacia atrás o bien obligados a alejarse en cada revolución.

COROLARIO XII. Todos los errores descritos en estos Corolarios son un poco mayores en la conjunción de los cuerpos P y S que en su oposición; porque las fuerzas generadoras NM y ML son mayores.

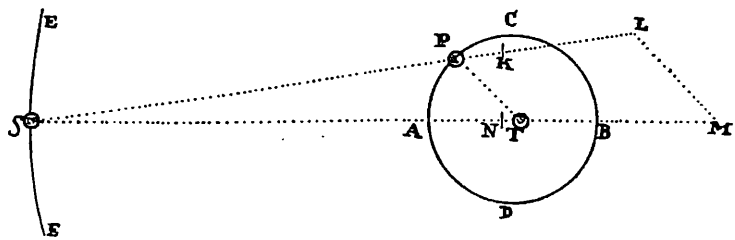
COROLARIO XIII. Y como las causas y proporciones de los errores y variaciones mencionados en estos Corolarios no dependen de la magnitud del cuerpo S, se sigue que todas las cosas antes demostradas acontecerán si la magnitud del cuerpo S es imaginada lo bastante grande para que el sistema de los cuerpos P y T pueda girar a su alrededor. Y partiendo de este incremento del cuerpo S, y el consiguiente incremento de su fuerza centrípeta, del cual surgen los errores del cuerpo P, se seguirá qué todos esos errores, a iguales distancias, serán mayores en ese caso que en el otro, donde el cuerpo S gira en torno al sistema de los cuerpos P y T.

COROLARIO XIV. Pero como las fuerzas NM y ML cuando el cuerpo S se encuentra a enorme distancia son casi como la fuerza SK y la razón PT a ST conjuntamente; esto es, si tanto la distancia PT como la fuerza absoluta del cuerpo S se dan, inversamente como ST^3; y puesto que tales fuerzas NM y ML son las causas de todos los errores y efectos tratados en los Corolarios previos, es manifiesto que todos esos efectos, si el sistema de los cuerpos T y P continúa como antes y sólo se modifica la distancia ST y la fuerza absoluta del cuerpo S, se hallarán muy aproximadamente en una razón compuesta por la razón directa de la fuerza absoluta del cuerpo S y la razón inversa de la distancia ST al cubo. En consecuencia, si el sistema de los cuerpos T y P gira alrededor de un cuerpo distante S, las fuerzas NM y ML y sus efectos (por los Corolarios II y VI, Proposición IV) serán inversamente como el cuadrado del tiempo periódico. Y así también, si la magnitud del cuerpo S es proporcional a su fuerza absoluta, las fuerzas NM y ML y sus

efectos serán directamente como el cubo del diámetro aparente del cuerpo distante S visto desde T; y a la inversa. Porque esas razones son las mismas que la razón compuesta antes mencionada.

COROLARIO XV. Si las órbitas ESE y PAB, reteniendo su figura, proporciones e inclinación respectiva, alterasen su magnitud y si las fuerzas de los cuerpos S y T permaneciesen o bien inalteradas o se modificaran en cualquier razón dada, esas fuerzas (esto es, la fuerza del cuerpo T, que obliga al cuerpo P a desviarse de un curso rectilíneo y entrar en la órbita PAB, y la fuerza del cuerpo S, que hace al cuerpo P desviarse de dicha órbita) actuarán siempre del mismo modo, y en la misma proporción. Se sigue de ello que todos los efectos serán semejantes y proporcionales, y que los tiempos de esos efectos serán proporcionales también; esto es, que todos los errores lineales serán como los diámetros de las órbitas, y los errores angulares como antes; y los tiempos de errores lineales semejantes, o errores angulares iguales, son como los tiempos periódicos de las órbitas.

COROLARIO XVI. Así pues, si las figuras de las órbitas y sus inclinaciones respectivas están dadas, y se modifican de cualquier manera las magnitudes, fuerzas y distancias de los cuerpos, podemos partiendo de los errores y tiempos de esos errores en un caso obtener muy aproximadamente los errores y tiempos de los errores en otro caso. Pero esto puede hacerse más expeditivamente por el siguiente método. Permaneciendo inalteradas las otras cosas, las fuerzas NM y ML son como el radio TP; y sus efectos periódicos (por el Corolario II, Lema X) son como las fuerzas y el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo P conjuntamente. Estos son los errores lineales del cuerpo P; los errores angulares según aparecen desde el centro T (esto es, el movimiento de los ápsides y de los nodos, y todos los errores aparentes de latitud y longitud) son en cada revolución del cuerpo P como el cuadrado del tiempo de la revolución, muy aproximadamente. Compónganse esas razones con las razones del Corolario XIV y en cualquier sistema de cuerpos T, P y S, donde P gira alrededor de T muy cerca de él, y T gira alrededor de S a una gran distancia, los errores angulares del cuerpo P, observados desde el centro T, serán en cada revolución del cuerpo P directamente como el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo P, e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo T.



En consecuencia, el movimiento medio de la línea de los ápsides estará en una razón dada con el movimiento medio de los nodos; y ambos movimientos serán directamente como el tiempo periódico del cuerpo P, e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo T. El incremento o disminución de la excentricidad e inclinación de la órbita PAB no implica variación sensible en los movimientos de los ápsides y nodos, salvo que sea efectivamente muy grande.

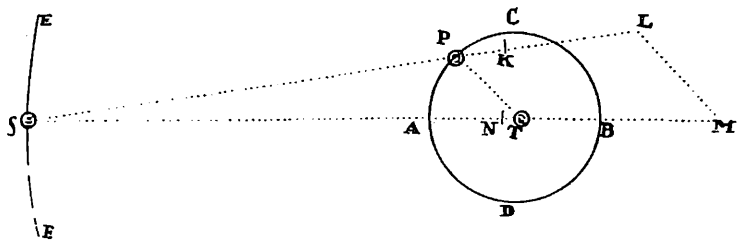
COROLARIO XVII. Puesto que la línea LM se hace unas veces mayor y otras menor que el radio PT, expresemos la cantidad media de la fuerza LM mediante ese radio PT; y esa fuerza media sería entonces a la fuerza media SK o SN (que puede también expresarse por ST) como la longitud PT a la longitud ST. Pero la fuerza media SN o ST, en cuya virtud el cuerpo T es retenido en la órbita que describe en torno a S, guarda con la fuerza por la cual el cuerpo P es retenido en su órbita alrededor de T una razón compuesta por la razón del radio ST al radio PT y el cuadrado de la razón del tiempo periódico del cuerpo P en torno a T al tiempo periódico del cuerpo T en torno a S. Y, en consecuencia, la fuerza media LM guarda con la fuerza mediante la cual el cuerpo P es retenido en su órbita en torno a T (o por la cual el mismo cuerpo P podría girar a la distancia PT en el mismo tiempo periódico alrededor de cualquier punto inmóvil T) la misma razón al cuadrado de los tiempos periódicos. Si los tiempos periódicos están dados junto con la distancia PT, estará dada también la fuerza media LM; y estando dada esa fuerza lo está también, muy aproximadamente, la fuerza MN, por la analogía de las líneas PT y MN.

COROLARIO XVIII. Por las mismas leyes en cuya virtud el cuerpo P gira en torno al cuerpo T, supongamos que muchos cuerpos fluidos se mueven alrededor de T a distancias iguales de él; y que son tan numerosos que todos ellos pueden hacerse

contiguos entre sí formando un anillo fluido, de figura circular y concéntrica al cuerpo T; y las diversas partes de ese anillo, realizando sus movimientos por la misma ley del cuerpo P, se acercarán más al cuerpo T y se moverán más velozmente en la conjunción y oposición de ellos mismo y el cuerpo S que en las cuadraturas. Y los nodos de este anillo, o sus intersecciones con el plano de la órbita del cuerpo S o T, permanecerán en las sicigias; pero desde las sicigias serán arrastrados hacia atrás, o en un movimiento retrógrado, con velocidad máxima en las cuadraturas y más lentamente en otros lugares. La inclinación de este anillo variará también, y su eje oscilará en cada revolución, y cuando se completa la revolución volverá a su situación previa, aunque será arrastrado circularmente un poco por la precesión de los nodos.

COROLARIO XIX. Supongamos ahora que el cuerpo esférico T, formado por alguna materia no fluida, sea aumentado y se extienda por todas partes tanto como ese anillo, y que alrededor de su circunferencia se cortase un canal conteniendo agua, girando esta esfera uniformemente alrededor de su propio eje en el mismo tiempo periódico. Siendo acelerada y retardada alternativamente (como en el último Corolario), ese agua será más veloz en las sicigias y más lenta en las cuadraturas que la superficie del globo, por lo cual fluirá y refluirá en su canal como hace el mar. Si se suprimiera la atracción del cuerpo S, el agua no adquiriría movimiento alguno de flujo y reflujo girando en torno al centro quieto del globo. Es el mismo caso de un globo que se mueve uniformemente en línea recta mientras gira en torno a su centro (por el Corolario V de las Leyes del Movimiento) y el de un globo uniformemente desviado de su curso rectilíneo (por el Corolario VI de las mismas Leyes). Pero si el cuerpo S actúa sobre él, por esta variante atracción el agua recibirá ese nuevo movimiento; pues existirá una atracción más fuerte sobre aquella parte del agua más próxima al cuerpo, y otra más débil sobre la parte más remota. Y la fuerza LM atraerá al agua hacia abajo en las cuadraturas, haciéndola descender hasta las sicigias; y la fuerza KL la atraerá hacia arriba en las sicigias, anulará su descenso y hará que ascienda hasta las cuadraturas; exceptuando sólo que el movimiento de flujo y reflujo pueda ser dirigido por el canal, y resultar algo retrasado por la fricción.

COROLARIO XX. Si el anillo ahora se endurece y el globo disminuye, el movimiento de flujo y reflujo cesará; pero persisti-



rá el movimiento pendular de la inclinación y precesión de los nodos. Supongamos que el globo tiene el mismo eje que el anillo y realice sus revoluciones en los mismos tiempos, y que en su superficie toque el anillo por dentro y se adhiera a él; como el globo comparte entonces el movimiento del anillo, todo este cuerpo oscilará y los nodos retrocederán, pues el globo –como ahora mostraremos– es perfectamente indiferente al hecho de recibir todas las impresiones. El máximo ángulo de inclinación para el anillo sólo se da cuando los nodos están en las sicigias. En el progreso desde los nodos hasta las cuadraturas se esfuerza por reducir su inclinación, y mediante ese esfuerzo imprime un movimiento a todo el globo. El globo retiene este movimiento impreso, hasta que el anillo por un esfuerzo contrario destruye ese movimiento e imprime un nuevo movimiento en una dirección contraria. Y así el movimiento máximo de la inclinación decreciente acontece cuando los nodos están en las cuadraturas, y el mínimo ángulo de inclinación en los octantes tras las cuadraturas; y nuevamente el máximo movimiento de la reclinación acontece cuando los nodos están en las sicigias; y el máximo ángulo de inclinación en los octantes siguientes. Es el mismo caso de un globo sin ese anillo, si fuese un poco más alto o más denso en las regiones ecuatoriales que en las polares; pues el exceso de materia en las regiones próximas al ecuador ocupa el lugar del anillo. Y aunque supusiéramos que la fuerza centrípeta de este globo se aumentara de tal manera que todas sus partes tendieran hacia abajo, como gravitan hacia el centro todas las partes de nuestra Tierra, los fenómenos de este Corolario y el precedente apenas se verían alterados; salvo porque se modificarían los lugares de altura máxima y mínima del agua, pues el agua ya no es sostenida y mantenida en su órbita por su fuerza centrífuga, sino por el canal donde fluye. Y, además, la fuerza LM atrae al agua hacia abajo de modo

máximo en las cuadraturas, y la fuerza KL o NM – LM la atrae hacia arriba de modo máximo en las sicigias. Y esas fuerzas combinadas dejan de atraer al agua hacia abajo y comienzan a atraerla hacia arriba en los octantes antes de las sicigias; y dejan de atraer al agua hacia arriba y comienzan a atraerla hacia abajo en los octantes tras las sicigias. Con lo cual la máxima altura del agua puede acontecer alrededor de los octantes tras las sicigias; y la mínima altura alrededor de los octantes tras las cuadraturas; con la única excepción de que el movimiento de ascenso o descenso impreso por esas fuerzas puede por la inercia del agua continuar un poco más, o ser detenido algo antes por impedimentos en su canal.

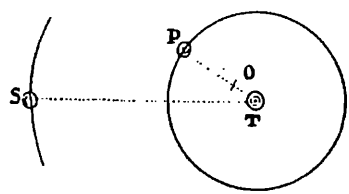
COROLARIO XXI. Por la misma razón ese exceso de materia en las regiones ecuatoriales de un globo hace que los nodos retrocedan, con lo cual por el incremento de esa materia se aumenta el movimiento retrógrado, por la disminución se disminuye y por la ablación cesa; se sigue que surgirá un movimiento directo de los nodos si el globo fuese más deprimido, o tuviese una consistencia menos densa cerca del ecuador que cerca de los polos.

COROLARIO XXII. De este modo, partiendo del movimiento de los nodos, se conoce la constitución del globo. Esto es, si el globo retiene inalterablemente los mismos polos, y el movimiento de los nodos es retrógrado, hay un exceso de materia cerca del ecuador; pero si ese movimiento es directo, habrá una deficiencia. Supongamos que un globo uniforme y exactamente esférico se encuentre primero en reposo en un espacio libre, y que luego por algún impulso impreso oblicuamente sobre su superficie sea apartado de su lugar, recibiendo un movimiento en parte circular y en parte rectilíneo. Como este globo es perfectamente indiferente a todos los ejes que pasan a través de su centro, y carece de propensión alguna a cualquier eje o situación del eje, es manifiesto que por su propia fuerza jamás cambiará su eje o la dirección de su eje. Supongamos ahora que este globo fuese impelido oblicuamente por un nuevo impulso en la misma parte de su superficie que antes; y como el efecto de un impulso no es modificado para nada por el hecho de llegar antes o después, es manifiesto que ambos impulsos, sucesivamente impresos, producirán el mismo movimiento, como si se hubieran impreso al mismo tiempo, esto es, el mismo movimiento que si el globo hubiese sido impelido por una fuerza simple compuesta por ambos (por el Corolario II de las Leyes), esto es, un

movimiento simple alrededor de un eje con una inclinación dada. Y el caso es el mismo si el segundo impulso se hiciese sobre cualquier otro lugar del ecuador del primer movimiento; y también si el primer impulso se hiciese sobre cualquier lugar en el ecuador del movimiento que se generaría exclusivamente por el segundo impulso; y, en consecuencia, también cuando ambos impulsos se realizan en cualesquiera lugares; pues esos impulsos generarán el mismo movimiento circular que si se imprimiesen juntos, y simultáneamente, en el lugar de la intersección de los ecuadores de los movimientos que cada uno de ellos generaría por separado. Así pues, un globo homogéneo y perfecto no retendrá varios movimientos delimitados, sino que unirá todos los allí impresos, reduciéndolos a uno; girando todo cuanto puede siempre con un movimiento simple y uniforme en torno a un solo eje dado, con una inclinación siempre invariable. Y la inclinación del eje, o la velocidad de la rotación, no será modificada por una fuerza centrípeta. Pues si se supone que el globo está dividido en dos hemisferios, por cualquier plano que pase por su propio centro y el centro hacia el cual se dirige la fuerza, la fuerza centrípeta urgirá siempre de modo igual a cada hemisferio, por lo cual no inclinará el globo hacia ningún lado en relación con su movimiento alrededor de su propio eje. Pero añádase en cualquier lugar entre el polo y el ecuador materia acumulada en forma de monte y esto, por su continuo esfuerzo por alejarse del centro de su movimiento, perturbará el movimiento del globo, haciendo que sus polos vaguen por su superficie describiendo círculos en torno a sí mismos y los puntos opuestos a ellos. Esta enorme desviación sólo puede corregirse situando a esa montaña bien en uno de los polos –en cuyo caso, por el Corolario XXI, los nodos del ecuador se adelantarán– o bien en las regiones ecuatoriales, en cuyo caso, por el Corolario XX, los nodos retrocederán; o bien, por último, añadiendo al otro lado del eje una nueva cantidad de materia con la cual equilibrar a la montaña en su movimiento; y entonces los nodos se adelantarán o retrocederán según que la montaña y esta materia recién añadida estén más cerca del polo o del ecuador.

PROPOSICIÓN LXVII. TEOREMA XXVII

Suponiendo las mismas leyes de las atracciones, afirmo que el cuerpo exterior S, *por radios trazados hasta el centro común de gravedad* O *de los cuerpos interiores* P *y* T, *describe alrededor de ese centro áreas más proporcionales a los tiempos, y una órbita más próxima a la forma de una elipse con su foco en ese centro, de lo que podría girando alrededor del cuerpo más interno y mayor* T *mediante radios trazados hasta ese cuerpo.*



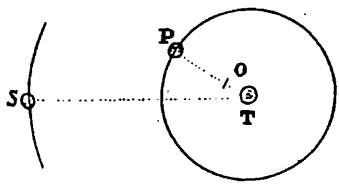
Porque las atracciones del cuerpo S hacia T y P componen su atracción absoluta, que se dirige más hacia O, el centro común de gravedad para los cuerpos T y P, que hacia el mayor de los cuerpos, T; y se acerca más a la proporción inversa al cuadrado de la distancia SO que al cuadrado de la distancia ST, como consta fácilmente reflexionando sobre ello.

PROPOSICIÓN LXVIII. TEOREMA XXVIII

Suponiendo las mismas leyes de atracción, afirmo que el cuerpo exterior S, *por radios trazados hasta el centro común de gravedad* O *de los cuerpos internos* P *y* T, *describirá alrededor de ese centro áreas más proporcionales a los tiempos, y una órbita más próxima a la forma de una elipse con su foco en ese centro, si el cuerpo más interno y mayor fuese perturbado por esas atracciones tanto como los demás que si se encontrase en reposo sin atracción alguna, o fuese atraído mucho más o mucho menos, y estuviese mucho más o mucho menos perturbado.*

Esto podría demostrarse como la Proposición LXVI, pero mediante un razonamiento más prolijo del que prescindo. Será suficiente considerarlo de este modo. Partiendo de la demostración de la Proposición última, es obvio que el centro hacia el cual se ve urgido el cuerpo S por las dos fuerzas conjuntamente está muy cerca del centro común de gravedad de los otros dos cuerpos. Si este centro coincidiese con el centro común, y si

además el centro común de gravedad para los tres cuerpos estuviese en reposo, el cuerpo S por una parte y el centro común de gravedad de los otros dos cuerpos por la otra describirían verdaderas elipses en torno a ese quieto centro común. Esto resulta del Corolario II de la Proposición LVIII, comparado con lo que se demostró en las Proposiciones LXIV y LXV. Este exacto movimiento elíptico será un poco perturbado por la distancia del centro de los dos cuerpos al centro hacia el cual es atraído el tercer cuerpo S. Añádase además un movimiento al centro común de los tres, y la perturbación aumentará más todavía. La perturbación es así mínima cuando el centro común de los tres cuerpos está en reposo; esto es, cuando el cuerpo más interior y grande, T, resulta atraído de acuerdo con la misma ley que el resto; y es siempre máxima cuando el centro común de los tres, por la disminución del movimiento del cuerpo T, comienza a ser movido y se agita más y más.



COROLARIO. Y, de este modo, si varios cuerpos más pequeños giran en torno al grande puede inferirse fácilmente que las órbitas descritas se acercarán más a elipses, y las descripciones de áreas serán más uniformes si todos los cuerpos se atraen y perturban entre sí con fuerzas aceleratívas, que son directamente como sus fuerzas absolutas e inversamente como los cuadrados de las distancias, y si el foco de cada órbita se sitúa en el centro común de gravedad de todos los cuerpos interiores (esto es, si el foco de la primera y más interna órbita se sitúa en el centro de gravedad del cuerpo más grande e interior; el foco de la segunda en el centro común de gravedad de los dos cuerpos más interiores; el foco de la tercera en el centro común de gravedad de los tres más interiores, y así sucesivamente), que si el cuerpo más interior estuviese en reposo y fuese convertido en foco común de todas las órbitas.

PROPOSICIÓN LXIX. TEOREMA XXIX

En un sistema de varios cuerpos A, B, C, D, *etc., si uno de esos cuerpos, digamos* A, *atrae a todo el resto,* B, C, D, *etc., con fuerzas aceleratívas que son inversamente como los cuadrados de las*

distancias desde el cuerpo atractivo; y otro cuerpo, digamos B, *atrae también al resto con fuerzas que son inversamente como los cuadrados de las distancias desde el cuerpo atractivo, las fuerzas absolutas de los cuerpos atractivos* A *y* B *serán entre sí como los cuerpos mismos* A *y* B *a quienes pertenecen tales fuerzas.*

Pues las aceleraciones atractivas de todos los cuerpos B, C, D, etc., hacia A son por hipótesis iguales entre sí a iguales distancias; y de modo semejante las atracciones aceleratívas de todos los cuerpos hacia B son también iguales entre sí a distancias iguales. Pero la fuerza atractiva absoluta del cuerpo A es a la fuerza atractiva absoluta del cuerpo B como la atracción acelerativa de todos los cuerpos hacia A es a la atracción acelerativa de todos los cuerpos hacia B a iguales distancias; y la aceleración atractiva del cuerpo B hacia A es también a la aceleración atractiva del cuerpo A hacia B. Pero la aceleración atractiva del cuerpo B hacia A es a la aceleración atractiva del cuerpo A hacia B como la masa del cuerpo A es a la masa del cuerpo B; porque las fuerzas motrices que (por las Definiciones segunda, quinta y octava) son como las fuerzas aceleratívas y los cuerpos atraídos son aquí iguales entre sí por la tercera Ley. Por consiguiente, la fuerza atractiva absoluta del cuerpo A es la fuerza atractiva absoluta del cuerpo B como la masa del cuerpo A es a la masa del cuerpo B. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, si cada uno de los cuerpos del sistema A, B, C, D, etc., atrae singularmente a todo el resto con fuerzas aceleratívas que son inversamente como los cuadrados de las distancias desde el cuerpo atractivo, las fuerzas absolutas de todos esos cuerpos serán entre sí como los cuerpos mismos.

COROLARIO II. Por un razonamiento análogo, si cada uno de los cuerpos del sistema A, B, C, D, etc., atrae singularmente a todo el resto con fuerzas aceleratívas, que se encuentran directa o inversamente en la razón de cualquier potencia de las distancias desde el cuerpo atractivo, o que son definidas por las distancias desde cada uno de los cuerpos atractivos de acuerdo con cualquier ley común, es obvio que las fuerzas absolutas de esos cuerpos son como los cuerpos mismos.

COROLARIO III. En un sistema de cuerpos cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias, si los menores giran en torno a uno muy grande en elipses, teniendo su foco común en el centro de ese gran cuerpo con una figura exac-

tísima, y describen por radios trazados hasta ese gran cuerpo áreas exactamente proporcionales a los tiempos, las fuerzas absolutas de esos cuerpos entre sí se encontrarán exacta o casi exactamente en la razón de los cuerpos. Y a la inversa. Esto resulta del Corolario de la Proposición XLVIII, comparado con el primer Corolario de esta Proposición.

ESCOLIO

Estas Proposiciones nos llevan a la analogía existente entre las fuerzas centrípetas y los cuerpos centrales a los que se dirigen habitualmente esas fuerzas; es razonable suponer que fuerzas dirigidas hacia los cuerpos dependen de la naturaleza, y cantidad de esos cuerpos, como vemos que sucede en los experimentos magnéticos. Y cuando se producen tales casos hemos de calcular las atracciones de los cuerpos asignando a cada una de sus partículas su fuerza adecuada, y hallando luego la suma de todas. Utilizo aquí la palabra *atracción* en general, indicando cualquier esfuerzo hecho por los cuerpos para aproximarse entre sí, ya sea que surja de la acción de los cuerpos mismos tendiendo los unos hacia los otros o perturbándose los unos a los otros por espíritus emitidos; ya sea que surja por la acción del éter o del aire, o de cualquier medio, corpóreo o incorpóreo, de cualquier modo que impela a los cuerpos allí situados los unos hacia los otros. Utilizo en el mismo sentido general la palabra *impulso*, sin definir en este tratado las especies o cualidades físicas de las fuerzas y reduciéndome a investigar las cantidades y proporciones matemáticas de las mismas, como mencioné antes en las Definiciones. En matemáticas hemos de investigar las cantidades de las fuerzas con su proporción consiguiente en cualesquiera condiciones supuestas; luego, cuando descendamos a la física, compararemos esas proporciones con los fenómenos, para poder conocer qué condiciones de esas fuerzas responden a las diversas clases de cuerpos atractivos. Partiendo de ello podremos argumentar con mayor seguridad sobre las especies físicas, las causas y las proporciones de las fuerzas. Veamos, pues, con qué fuerzas deben actuar entre sí cuerpos esféricos consistentes en partículas dotadas de poderes atractivos del modo antes mencionado; y qué tipo de movimientos se seguirán de ellas.

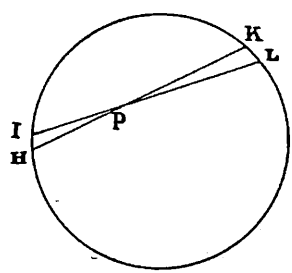
SECCION XII

Sobre las fuerzas atractivas de cuerpos esféricos

PROPOSICIÓN LXX. TEOREMA XXX

Si hacia cada punto de una superficie esférica tienden fuerzas centrípetas iguales que decrecen como el cuadrado de las distancias desde esos puntos, afirmo que un corpúsculo situado dentro de tal superficie no será atraído por esas fuerzas en ningún sentido.

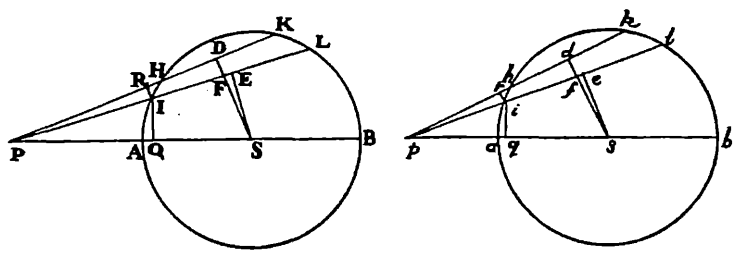
Supongamos que HIKL sea esa superficie esférica y P un corpúsculo situado dentro. A través de P trácense hasta esa superficie dos líneas HK y IL, interceptando arcos muy pequeños HI y KL; como (por el Corolario III, Lema VII) los triángulos HPI y LPK son semejantes, esos arcos serán proporcionales a las distancias HP y LP; y cualesquiera partículas en HI y KL de la superficie esférica determinada con rectas que atraviesan P, serán como el cuadrado de esas distancias. En consecuencia, las fuerzas de esas partículas ejercidas sobre el cuerpo P son iguales entre sí. Pues las fuerzas son directamente como las partículas e inversamente como el cuadrado de las distancias. Y esas dos razones componen la razón de igualdad, 1:1. Como las atracciones son iguales pero ejercidas en direcciones opuestas, se destruyen una a la otra. Y por un razonamiento semejante todas las atracciones de la superficie esférica son destruidas por atracciones contrarias. Por lo cual el cuerpo P no será en ningún sentido impelido por tales atracciones. Q.E.D.



PROPOSICIÓN LXXI. TEOREMA XXXI

Suponiendo las mismas cosas, afirmo que un corpúsculo situado fuera de la superficie esférica es atraído hacia el centro de la esfera con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro.

AHKB y *ahkb* son dos superficies esféricas iguales descritas en torno a los centros S y *s*; sus diámetros son AB y *ab*; P y *p* son dos corpúsculos situados fuera de las esferas en los diámetros prolongados. Trácense desde los corpúsculos las líneas PHK, PIL, *phk* y *pil* desgajando de los círculos máximos AHB, *ahb* los arcos iguales HK, *hk*, IL, *il*; abátanse hasta esas líneas las perpendiculares SD, *sd*, SE, *se*, IR, *ir*, haciendo que SD y *sd* corten a PL y *pl* en F y *f*. Abátanse también hasta los diámetros las perpendiculares IQ e *iq*. Supóngase que se desvanecen los



ángulos DPE y *dpe*; como DS y *ds*, ES y *es* son iguales, las líneas PE, PF, y *pe*, *pf*, y las pequeñas líneas DF y *df* pueden tomarse por iguales, porque cuando los ángulos DPE y *dpe* se desvanecen su última razón es la razón de igualdad. Establecidas estas cosas, se sigue que

$$PI : PF = RI : DF$$

y $pf : pi = df$ o $DF : ri$.

Multiplicando términos correspondientes,

$$PI \times pf : PF \times pi = RI : ri = \text{arco } IH : \text{arco } ih$$

(por el Corolario III, Lema VII).

Nuevamente, $PI : PS = IQ : SE$

y $ps : pi = se$ o $SE : iq$.

Luego $PI \times ps : PS \times pi = IQ : iq$.

Multiplicando conjuntamente términos correspondientes de esta proporción y la derivada precedentemente de modo semejante,

$$PI^2 \times pf \times ps : pi^2 \times PF \times PS = HI \times IQ : ih \times iq,$$

esto es, como la superficie circular descrita por el arco IH al girar el semicírculo AKB en torno al diámetro AB es a la superficie circular descrita por el arco *ih* al girar el semicírculo *akb* en torno al diámetro *ab*. Y las fuerzas con las cuales esas superficies atraen a los corpúsculos P y *p* en la dirección de líneas tendentes a tales superficies son directamente, por la hipótesis, como las superficies mismas e inversamente como los cuadrados de las distancias de las superficies desde dichos corpúsculos; esto es, como $pf \times ps$ es a $PF \times PS$. Y a su vez esas fuerzas son a las partes oblicuas de ellas que (por la descomposición de fuerzas como en el Corolario II de las Leyes) tienden hacia los centros en las direcciones de las líneas PS y *ps* como PI a PQ, y *pi* a *pq*; esto es (debido a los triángulos semejantes PIQ y PSF, *piq* y *psf*), como PS a PF y *ps* a *pf*. Así pues, la atracción del corpúsculo P hacia S es a la atracción del corpúsculo *p* hacia *s* como $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ es a $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, esto es, como ps^2 es a PS^2. Y, mediante un razonamiento similar, las fuerzas con las cuales las superficies descritas por la revolución de los arcos KL, *kl* atraen a esos corpúsculos serán como ps^2 a PS^2. Y en la misma razón se encontrarán las fuerzas de todas las superficies en que puedan dividirse las superficies esféricas tomando siempre *sd* como igual a SD y *se* igual a SE. Con lo cual, por composición, las fuerzas de todas las superficies esféricas ejercidas sobre tales corpúsculos se encontrarán en la misma razón. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXII. TEOREMA XXXII

Si hacia los diversos puntos de una esfera tienden fuerzas centrípetas iguales que decrecen como el cuadrado de las distancias a dichos puntos; y están dadas tanto la densidad de la esfera como la razón del diámetro de la esfera a la distancia del corpúsculo a su centro, afirmo que la fuerza con la cual resulta atraído el corpúsculo es proporcional al semidiámetro de la esfera.

Pues imaginemos que dos corpúsculos son diversamente atraídos por dos esferas, uno por una y otro por otra, y que sus distancias a los centros de las esferas son proporcionales a los diámetros de las esferas respectivamente; y que las esferas se resuelven en partículas semejantes, dispuestas en una situación semejante a los corpúsculos. Entonces las atracciones de un corpúsculo con respecto a las diversas partículas de una esfera estarán con las atracciones del otro respecto de otras tantas partículas análogas de la otra esfera en una razón compuesta por la razón de las partículas directamente, y el cuadrado de las distancias inversamente. Pero las partículas son como las esferas, esto es, como los cubos de los diámetros, y las distancias son como los diámetros; y la primera razón directamente, con la última razón tomada al cuadrado inversamente, se convierte en la razón de diámetro a diámetro. Q.E.D.

COROLARIO I. Así pues, si los corpúsculos giran en círculos alrededor de esferas compuestas de materia igualmente atractiva, y las distancias a los centros de las esferas son proporcionales a sus diámetros, sus tiempos periódicos serán iguales.

COROLARIO II. Y, al revés, si los tiempos periódicos son iguales, las distancias serán proporcionales a los diámetros. Estos dos Corolarios resultan del Corolario III, Proposición IV.

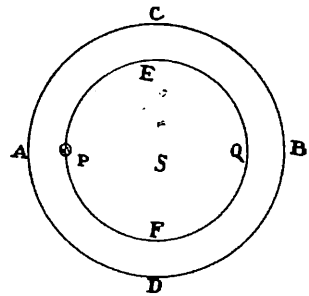
COROLARIO III. Si hacia los diversos puntos de dos sólidos cualesquiera, de figura semejante e igual densidad, tienden fuerzas centrípetas iguales, decrecientes como el cuadrado de las distancias a esos puntos, las fuerzas con las que serán atraídos por ellas corpúsculos situados en una posición semejante a los dos sólidos serán entre sí como los diámetros de tales sólidos.

PROPOSICIÓN LXXIII. TEOREMA XXXIII

Si hacia los diversos puntos de una esfera dada tienden fuerzas centrípetas iguales, que decrecen como los cuadrados de las distancias a los puntos, afirmo que un corpúsculo situado dentro de la esfera es atraído por una fuerza proporcional a su distancia al centro.

En la esfera ACBD, descrita alrededor del centro S, sitúese el corpúsculo P; y en torno al mismo centro S, con el intervalo SP,

imaginese descrita una esfera interior PEQF. Es manifiesto (por la Proposición LXX) que las superficies esféricas concéntricas de las que se compone la diferencia AEBF de las esferas no tienen efecto alguno sobre el cuerpo P, pues sus atracciones son destruidas por atracciones contrarias. Resta por eso sólo la atracción de la esfera interior PEQF. Y (por la Proposición LXXII) es como la distancia PS. Q.E.D.



ESCOLIO

Por las superficies de que aquí imagino compuestos a los sólidos no quiero indicar superficies puramente matemáticas, sino orbes tan extremadamente tenues que su espesor es como nulo; esto es, los orbes evanescentes en que acabará consistiendo la esfera cuando el número de orbes es incrementado y disminuido su espesor hasta lo infinito. Del mismo modo, los puntos de que se dicen compuestas las líneas, las superficies y los sólidos deben entenderse como partículas iguales, de magnitud despreciable.

PROPOSICIÓN LXXIV. TEOREMA XXXIV

Suponiendo las mismas cosas, afirmo que un corpúsculo situado fuera de la esfera es atraído con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro.

Pues supóngase que la esfera se divide en innumerables esferas concéntricas, y las atracciones de los corpúsculos que surgen de las diversas superficies serán inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia del corpúsculo al centro de la esfera (por la Proposición LXXI). Y, por composición, la suma de tales atracciones, esto es, la atracción del corpúsculo con respecto a toda la esfera, estará en la misma razón. Q.E.D.

COROLARIO I. Así pues, las atracciones de esferas homogéneas a iguales distancias de los centros serán como las esferas mismas. Porque (por la Proposición LXXII) si las distancias son proporcionales a los diámetros de las esferas, las fuerzas serán como los diámetros. Disminúyase la distancia mayor en esa razón; siendo ahora iguales las distancias, la atracción se incrementará como el cuadrado de esa razón, siendo por ello a la otra atracción como el cubo de esa razón, conservando así la razón de las esferas.

COROLARIO II. A cualesquiera distancias las atracciones son como las esferas aplicadas a los cuadrados de las distancias.

COROLARIO III. Si un corpúsculo situado fuera de una esfera homogénea es atraído por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro, y la esfera consiste en partículas atractivas, la fuerza de cada partícula decrecerá como el cuadrado de la distancia a cada partícula.

PROPOSICIÓN LXXV. TEOREMA XXXV

Si hacia los diversos puntos de una esfera dada tienden fuerzas centrípetas iguales que decrecen como el cuadrado de las distancias al punto, afirmo que otra esfera similar será atraída por ella con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los centros.

Pues la atracción de toda partícula es inversamente como el cuadrado de su distancia al centro de la esfera que atrae (por la Proposición LXXIV), siendo así la misma que si la totalidad de esa fuerza atractiva surgiese de un corpúsculo singular situado en el centro de tal esfera. Pero esta atracción es tan grande como, por otra parte, sería la atracción del mismo corpúsculo si fuese atraído por las diversas partículas de la esfera atraída con la misma fuerza con la cual son atraídas por él. Pero esa atracción del corpúsculo (por la Proposición LXXIV) sería inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la esfera, con lo cual la atracción de la esfera, igual a ella, se encuentra también en la misma razón. Q.E.D.

COROLARIO I. Las atracciones de esferas hacia otras esferas

homogéneas son como las esferas atractivas aplicadas a los cuadrados de las distancias a los centros de aquellas a las que atraen.

COROLARIO II. El caso es el mismo cuando la esfera atraída atrae a su vez. Pues los diversos puntos de una atraen a los diversos puntos de la otra con la misma fuerza con la cual ellos mismos son atraídos a su vez por los otros; y como en todas las atracciones (por la Ley III) el punto atraído y el atrayente son igualmente urgidos, la fuerza será doblada por sus atracciones mutuas conservándose las proporciones.

COROLARIO III. Las diversas verdades antes demostradas, sobre el movimiento de los cuerpos en torno al foco de las secciones cónicas, ocurrirán cuando una esfera sea situada en el foco y los cuerpos se muevan fuera de ella.

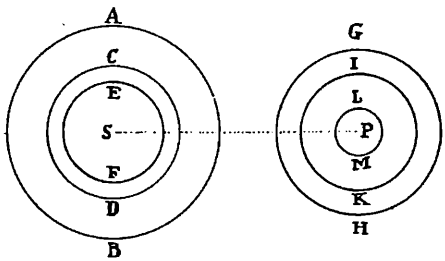
COROLARIO IV. Las cosas que antes se demostraron sobre el movimiento de cuerpos en torno al centro de las secciones cónicas ocurrirán cuando los movimientos se realicen dentro de la esfera.

PROPOSICIÓN LXXVI. TEOREMA XXXVI

Si las esferas fuesen desiguales (en cuanto a densidad de materia y fuerza atractiva) en la misma razón progresiva desde el centro hasta la circunferencia, pero semejantes para todo lo demás a cada distancia dada al centro, y la fuerza atractiva de cada punto decrece como el cuadrado de la distancia al cuerpo atraído, afirmo que la fuerza total con la cual una de esas esferas atrae a la otra será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los centros.

Imagínense varias esferas concéntricas semejantes AB, CD, EF, etc., que añadidas las interiores a las exteriores pueden componer una materia más densa hacia el centro, y substraídas unas de otras la dejan más tenue. Entonces, por la Proposición LXXV, esas esferas atraerán a otras esferas concéntricas semejantes GH, IK, LM, etc., una a una, con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia SP. Y, por adición o substracción, la suma de todas esas fuerzas, o el exceso de cualquiera sobre las otras, esto es, la fuerza con la cual toda la

esfera AB (compuesta de cualesquiera esferas concéntricas o de sus diferencias) atraerá a toda la esfera GH (compuesta de cualesquiera esferas concéntricas o de sus diferencias) guardará la misma razón.



Increméntese hasta lo infinito el número de las esferas concéntricas, de manera que la densidad de materia y la fuerza atractiva puedan en el progreso desde la circunferencia hasta el centro aumentar o decrecer de acuerdo con cualquier ley dada; y por adición de materia no atractiva complétese el defecto de densidad, para que las esferas puedan adquirir cualquier forma deseada. La fuerza con la cual una de ellas atrae a la otra seguirá conservando, por el razonamiento precedente, la misma razón inversa del cuadrado de la distancia. Q.E.D.

COROLARIO I. De este modo, si muchas esferas de este tipo, semejantes en todos los aspectos, se atraen recíprocamente, las aceleraciones atractivas de cada una a cada una, a cualesquiera distancias iguales desde los centros, serán como las esferas atractivas.

COROLARIO II. Y a cualesquiera distancias desiguales como las esferas atractivas divididas por los cuadrados de las distancias entre los centros.

COROLARIO III. Las atracciones motrices, o los pesos de las esferas en las esferas, serán a distancias iguales de los centros como las esferas atractivas y las atraídas conjuntamente, esto es, como los productos que surgen de multiplicar las esferas una por otra.

COROLARIO IV. Y a distancias desiguales directamente como esos productos e inversamente como los cuadrados de las distancias entre los centros.

COROLARIO V. Estas proporciones se mantienen también cuando la atracción surge del poder atractivo de ambas esferas ejercido recíprocamente. Pues la atracción simplemente se dobla por la conjunción de las fuerzas, manteniéndose como antes las proporciones.

COROLARIO VI. Si esferas de este tipo giran en torno a otras en reposo, cada una en torno a cada una, y las distancias entre

los centros de los cuerpos quietos y movidos son proporcionales a los diámetros de los cuerpos quietos, los tiempos periódicos serán iguales.

COROLARIO VII. Y si los tiempos periódicos son iguales, las distancias serán proporcionales a los diámetros.

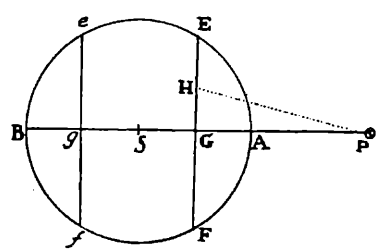
COROLARIO VIII. Todas las verdades antes demostradas, concernientes a los movimientos de cuerpos en torno a los focos de secciones cónicas, ocurrirán cuando una esfera atractiva de forma y condición semejante a las antes descritas sea situada en el foco.

COROLARIO IX. Y también cuando los cuerpos en revolución atraen a esferas de cualquier condición semejante a las descritas antes.

PROPOSICIÓN LXXVII. TEOREMA XXXVII

Si hacia los diversos puntos de esferas tienden fuerzas centrípetas proporcionales a las distancias de los puntos a los cuerpos atraídos, afirmo que la fuerza compuesta con la cual se atraen una a la otra dos esferas es como la distancia entre los centros de las esferas.

CASO 1. Sea AEBF una esfera; S su centro, P un corpúsculo atraído y PASB el eje de la esfera que atraviesa el centro del corpúsculo; EF y *ef* dos planos que cortan a la esfera siendo perpendiculares al eje y equidistantes, uno a un lado y el otro al otro, del centro de la esfera; G y *g* las intersecciones de los planos y el eje, y H cualquier punto en el plano EF.

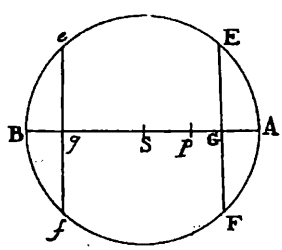


La fuerza centrípeta del punto H sobre el corpúsculo P, ejercida en la dirección de la línea PH, es como la distancia PH; y (por el Corolario II de las Leyes) la misma fuerza ejercida en la dirección de la línea PG, o hacia el centro S, es como la longitud PG. Por consiguiente, la fuerza de todos los puntos en el plano EF (esto es, de todo el plano), por la cual es atraído el corpúsculo P hacia el centro S, es como la distancia

PG multiplicada por el número de esos puntos, esto es, como el sólido contenido bajo ese plano EF y la distancia PG. Y de modo semejante la fuerza del plano *ef*, por la cual es atraído el corpúsculo hacia el centro S, es como ese plano multiplicado por su distancia P*g*, o como el plano igual EF multiplicado por la distancia P*g*; y la suma de las fuerzas de ambos planos es como el plano EF multiplicado por la suma de las distancias PG y P*g*, esto es, como ese plano multiplicado por el doble de la distancia PS del centro y el corpúsculo, esto es, como dos veces el plano EF multiplicado por la distancia PS, o como la suma de los planos iguales EF y *ef* multiplicada por la misma distancia. Y, por un razonamiento análogo, las fuerzas de los planos de la esfera, equidistantes del centro, son como la suma de tales planos multiplicada por la distancia PS, esto es, como toda la esfera y la distancia PS conjuntamente. Q.E.D.

CASO 2. Atraiga ahora el corpúsculo P a la esfera AEBF. Por el mismo razonamiento, resultará que la fuerza con la cual es atraída la esfera es como la distancia PS. Q.E.D.

CASO 3. Imagínese otra esfera compuesta por innumerables corpúsculos P; puesto que la fuerza con la cual es atraído cada corpúsculo es como la distancia del corpúsculo al el centro de la primera esfera, y como la misma esfera conjuntamente, siendo por eso la misma que si todo ello procediera de un corpúsculo singular situado en el centro de la esfera, la fuerza global con la que son atraídos todos los corpúsculos en la segunda esfera, esto es, con la cual es atraída toda la esfera, será la misma que si tal esfera fuese atraída por una fuerza que surgiese de un corpúsculo singular en el centro de la primera esfera, siendo por consiguiente proporcional a la distancia entre el centro de las esferas. Q.E.D.



CASO 4. Si las esferas se atraen recíprocamente la fuerza se doblará, pero se mantendrá la proporción. Q.E.D.

CASO 5. Sitúese el corpúsculo *p* dentro de la esfera AEBF; como la fuerza del plano *ef* sobre el corpúsculo es como el sólido contenido bajo ese plano y la distancia *pg*; y como la fuerza contraria del plano EF es como el sólido contenido bajo ese plano y la distancia *p*G, la fuerza compuesta por ambas será como la diferencia de los sólidos, esto es, como la suma de los

planos iguales multiplicada por la mitad de la diferencia de las distancias; esto es, como aquella suma multiplicada por *p*S, distancia del corpúsculo al centro de la esfera. Y, por un razonamiento análogo, la atracción de todos los planos EF, *ef*, a lo largo de toda la esfera, esto es, la atracción de toda la esfera, es en conjunto como la suma de todos los planos, o como el conjunto de la esfera, y como *p*S, distancia del corpúsculo al centro de la esfera. Q.E.D.

CASO 6. Y si se compusiese una nueva esfera a partir de innumerables corpúsculos como *p*, situada dentro de la primera esfera AEFB, puede probarse como antes que la atracción, ya sea singular de una esfera con respecto a la otra, o mutua, será como la distancia *p*S de los centros. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXVIII. TEOREMA XXXVIII

Si en el progreso desde el centro hasta la circunferencia las esferas fuesen distintas y desiguales, pero semejantes a cada lado en torno a todas las distancias dadas al centro, y la fuerza atractiva de cada punto fuese como la distancia al cuerpo atraído, afirmo que la fuerza total con la cual se atraen mutuamente dos esferas de este tipo es proporcional a la distancia entre los centros de las esferas.

Esto queda demostrado por la Proposición precedente, tal como la Proposición LXXVI fue demostrada por la LXXV.

COROLARIO. Las cosas que se demostraron antes en la Proposición X y en la LXIV, sobre el movimiento de cuerpos en torno a los centros de secciones cónicas, acontecen cuando todas las atracciones provienen de la fuerza de cuerpos esféricos del tipo antes descrito y los cuerpos atraídos son esferas de la misma especie.

ESCOLIO

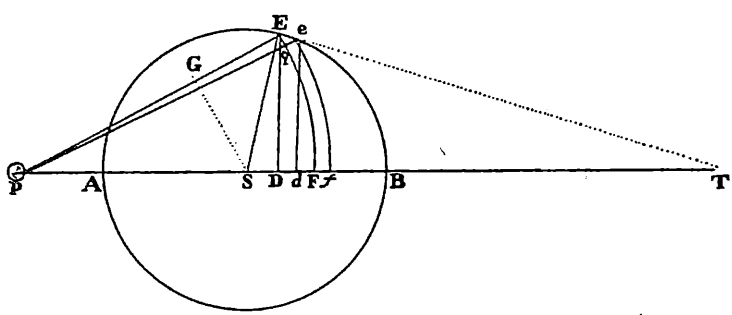
He explicado los dos casos principales de atracciones; a saber, cuando las fuerzas centrípetas decrecen como el cuadrado de la razón de las distancias, o cuando se incrementan en una razón simple de las distancias, haciendo que en ambos casos los cuerpos giren en secciones cónicas y compongan cuerpos esféricos cuyas fuerzas centrípetas observan la misma ley de incre-

mento o reducción al alejarse del centro, como hacen las fuerzas de las partículas mismas. Cosa ésta digna de ser tenida en cuenta. Sería demasiado tedioso recorrer los otros casos, cuyas conclusiones son menos elegantes, con la minuciosidad empleada para los primeros. Prefiero incluirlos y determinarlos a todos mediante un método general, que a continuación se expone.

LEMA XXIX

Si en torno al centro S *se describe cualquier círculo como* AEB, *y en torno al centro* P *se describen también dos círculos* EF *y ef, que cortan al primero en* E *y e, y a la línea* PS *en* F *y f; y se abaten hasta* PS *las perpendiculares* ED *y ed, afirmo que si la distancia de los arcos* EF *y ef se supone infinitamente disminuida, la razón última de la línea evanescente* D*d a la línea evanescente* F*f es la misma que la de la línea* PE *a la línea* PS.

Pues si la línea P*e* corta al arco EF en *q*; y la recta E*e* que coincide con el arco evanescente E*e* se prolonga hasta encontrar



a la recta PS en T, y se abate desde S hasta PE la perpendicular SG, como son semejantes los triángulos DTE, *d*T*e* y DES,

D*d* : E*e* = DT : TE = DE : ES,

y como los triángulos E*eq* y ESG (por el Lema VIII, y el Corolario III del Lema VII) son semejantes

E*e* : *eq* o F*f* = ES : SG.

Multiplicando a la vez términos correspondientes de las dos proporciones,

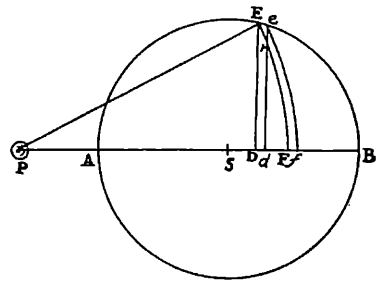
D*d* : F*f* = DE : SG = PE : PS

(por los triángulos semejantes PDE y PGS). Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXIX. TEOREMA XXXIX

Si una superficie EF*fe, cuya latitud ès infinitamente disminuida hasta desvanecerse, por su revolución en torno al eje* PS *describe un sólido cóncavo-convexo, hacia cuyas varias partículas iguales tienden iguales fuerzas centrípetas, afirmo que la fuerza con la cual ese sólido atrae a un corpúsculo situado en* P *está en una razón compuesta por la razón del sólido* $DE^2 \times Ff$ *y la razón de la fuerza con la cual la partícula dada en el lugar* F*f atraería al mismo corpúsculo.*

Pues si consideramos en primer lugar la fuerza de la superficie esférica FE, generada por la revolución del arco FE, que se corta en algún punto como *r* por la línea *de*, la parte anular de la superficie generada por la revolución del arco *r*E será como la pequeña línea D*d*, permaneciendo igual el radio de la esfera PE, como demostró *Arquímedes* en su libro *Esfera y Cilindro*. Y la fuerza de esta superficie, ejercida en la dirección de las líneas PE o P*r* de la superficie cónica, será como esa superficie anular misma, esto es, como la pequeña línea D*d* o, cosa idéntica, como el rectángulo bajo el radio dado PE de la esfera y la pequeña línea D*d*; pero esa fuerza, ejercida en la dirección de la línea PS hacia el centro S, será menor en la razón de PD a PE, siendo por ello como PD $\times$ D*d*. Supongamos ahora que la línea DF es dividida en innumerables partículas iguales, cada una de las cuales se llamará D*d*, y entonces la superficie FE estará dividida en otros tantos anillos, cuyas fuerzas serán como la suma de todos los rectángulos $PD \times Dd$, esto es, como $1/2\ PF^2 - 1/2\ PD^2$ y, por consiguiente, como DE^2.

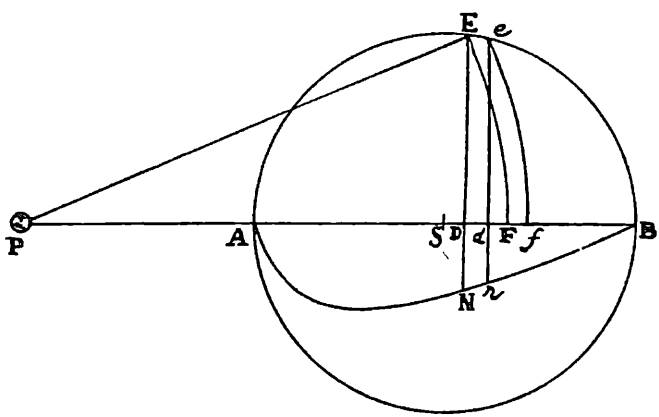


Multiplíquese ahora la superficie FE por la altura F*f*, y la fuerza del sólido EF*fe* ejercida sobre el corpúsculo P será como $DE^2 \times Ff$, siempre que está dada la fuerza con la cual actúa cualquier partícula como F*f* sobre el corpúsculo P a la distancia PF. Pero si esa fuerza no está dada, la fuerza del sólido EF*fe* será conjuntamente como el sólido $DE^2 \times Ff$ y esa fuerza no dada. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXX. TEOREMA XL

Si hacia las diversas partes iguales de una esfera ABE *descrita en torno al centro* S *tienden fuerzas centrípetas iguales; y desde los diversos puntos* D *en el eje de la esfera* AB *donde está situado un corpúsculo* P *se levantan las perpendiculares* DE, *que encuentran a la esfera en* E, *y si en esas perpendiculares las longitudes* DN *se toman como la cantidad* $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, *y conjuntamente como la fuerza que una partícula de la esfera situada en el eje ejerce a la distancia* PE *sobre un corpúsculo* P, *afirmo que la fuerza total con la que el corpúsculo* P *es atraído hacia la esfera es como el área* ANB, *comprendida bajo el eje de la esfera* AB, *y la curva* ANB, *lugar del punto* N.

Pues, suponiendo subsistente la construcción del último Lema y el último Teorema, considérese el eje de la esfera AB dividido en innumerables partículas iguales D*d*, y la totalidad de



la esfera dividida en otras tantas láminas cóncavo-convexas EF*fe*; y levántese la perpendicular *dn*. Por el último Teorema, la fuerza con la cual la lámina EF*fe* atrae al corpúsculo P es como $DE^2 \times Ff$ y la fuerza de una partícula ejercida a la distancia PE o PF, conjuntamente. Pero (por el último Lema) D*d* es a F*f* como PE a PS, por lo cual F*f* es igual a $\frac{PS \times Dd}{PE}$; y $DE^2 \times Ff$ es igual a $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$; y, en consecuencia, la fuerza

de la lámina EF*fe* es como $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$ y la fuerza de una partícula ejercida a la distancia PF, conjuntamente; esto es, por suposición, como DN × D*d*, o como el área evanescente DN*nd*. En consecuencia, las fuerzas de todas las láminas ejercidas sobre el corpúsculo P son como todas las áreas DN*nd*, con lo cual la fuerza total de la esfera será como toda el área ANB. Q.E.D.

COROLARIO I. De ahí que si la fuerza centrípeta tendente hacia las diversas partículas se mantiene idéntica a todas las distancias, y DN se hace como $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, la fuerza total con la cual el corpúsculo es atraído por la esfera es como el área ANB.

COROLARIO II. Si la fuerza centrípeta de las partículas fuese inversamente como la distancia del corpúsculo atraído por ella, y DN se hiciese como $\frac{DE^2 \times PS}{PE^2}$, la fuerza con la cual el corpúsculo P es atraído por toda la esfera será como el área ANB.

COROLARIO III. Si la fuerza centrípeta de las partículas fuese inversamente como el cubo de la distancia del corpúsculo atraído por ella, y DN se hiciese como $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$, la fuerza con la cual el corpúsculo es atraído por toda la esfera será como el área ANB.

COROLARIO IV. En general, si la fuerza centrípeta tendente a las diversas partículas de la esfera se supone inversamente como la cantidad V; y DN se hace como $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, la fuerza con la cual un corpúsculo es atraído por toda la esfera será como el área ANB.

PROPOSICIÓN LXXXI. PROBLEMA XLI

Manteniéndose las cosas como antes, se requiere medir el área ANB.

Desde el punto P trácese la recta PH que toca a la esfera en H; y abatiendo sobre el eje PAB la perpendicular HI, biséctese PI en L; y (por la Proposición XII, Libro II de los *Elementos* de

Euclides) PE^2 será igual a $PS^2 + SE^2 + 2PS \times SD$. Pero como los triángulos SPH y SHI son semejantes, SE^2 o SH^2 es igual al rectángulo $PS \times IS$. En consecuencia, PE^2 es igual al rectángulo contenido bajo PS y $PS + SI + 2SD$; esto es, bajo PS y $2LS + 2SD$; esto es, bajo PS y 2LD. Por lo demás, DE^2 es igual a $SE^2 - SD^2$, o

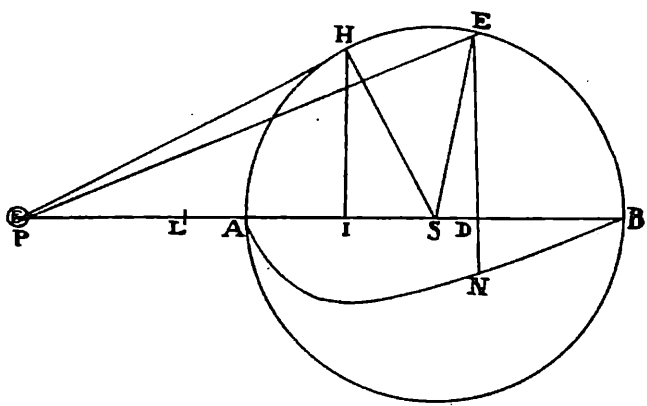
$$SE^2 - LS^2 + 2LS \times LD - LD^2,$$

esto es, $2LS \times LD - LD^2 - LA \times LB$.

Porque $LS^2 - SE^2$ o $LS^2 - SA^2$ (por la Proposición VI, Libro II de los *Elementos* de *Euclides*) es igual al rectángulo $LA \times LB$.

Si en vez de DE^2 escribimos

$$2LS \times LD - LD^2 - LA \times LB,$$



la cantidad $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, que (por el Corolario IV de la Proposición precedente) es como la longitud de la ordenada DN, se descompondrá en tres partes

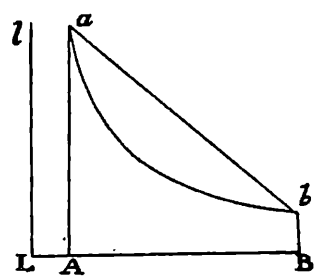
$$\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^2 \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V};$$

donde si en vez de V escribimos la razón inversa de la fuerza centrípeta, y en vez de PE la media proporcional entre PS y 2LD, esas tres partes se convertirán en ordenadas de otras tantas curvas, cuyas áreas se descubren por los métodos comunes. Q.E.D.

EJEMPLO 1. Si la fuerza centrípeta tendente a las diversas partículas de la esfera fuese inversamente como la distancia, en vez de V escríbase la distancia PE, luego $2PS \times LD$ por PE^2, y

DN se hará como $SL - LD/2 - \frac{LA \times LB}{2LD}$. Supóngase DN igual a su doble $2SL - LD - \frac{LA \times LB}{LD}$; y la parte dada de la ordenada 2SL prolongada en la longitud AB describirá el área rectangular $2SL \times AB$; y la parte indefinida LD, trazada perpendicularmente en la misma longitud con un movimiento continuado, de manera que bien por incremento o decremento permanezca siempre igual a la longitud LD, describirá el área $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$, esto es, el área $SL \times AB$, que subtraída del área anterior $2SL \times AB$ deja el área $SL \times AB$. Pero la tercera parte $\frac{LA \times LB}{LD}$, trazada del mismo modo con un movimiento continuado, describirá el área de una hipérbola, que restada del área $SL \times AB$ dejará ANB, el área buscada. De lo cual surge esta construcción del Problema. En los puntos L, A y B levántense las perpendiculares L*l*, A*a* y B*b*, haciendo A*a* igual a LB y B*b* igual a LA. Las asíntotas L*l* y LB describen a través de los puntos *a* y *b* la curva hiperbólica *ab*. Y, al trazarse, la cuerda *ba* rodeará el área *aba* igual al área buscada ANB.

EJEMPLO 2. Si la fuerza centrípeta tendente a las diversas partículas de la esfera fuese inversamente como el cubo de la distancia, o (cosa idéntica) como ese cubo aplicado a cualquier plano dado, escríbase $\frac{PE^3}{2AS^2}$ por V, y $2PS \times LD$ por PE^2, con lo cual DN se hará como



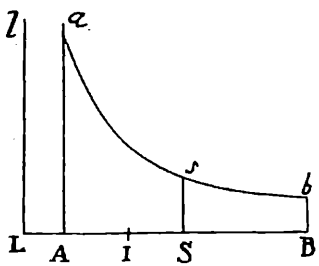
$$\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{LA \times LB \times AS^2}{2PS \times LD^2},$$

esto es (puesto que PS, AS, SI, son continuamente proporcionales), como

$$\frac{LSI}{LD} - \tfrac{1}{2}SI - \frac{LA \times LB \times SI}{2LD^2}$$

Si trazamos entonces esas tres partes en la longitud AB, la primera $\frac{SL \times SI}{LD}$ generará el área de una hipérbola; la segun-

da $\frac{1}{2}$SI el área $\frac{1}{2}$AB × SI; la tercera $\frac{LA \times LB \times SI}{2LD^2}$ el área $\frac{LA \times LB \times SI}{2LA} - \frac{LA \times LB \times SI}{2LB}$, esto es, $\frac{1}{2}$AB × SI. Réstese de la primera la suma de la segunda y tercera, y quedará ANB: el área buscada. De lo cual surge esta construcción del Problema.

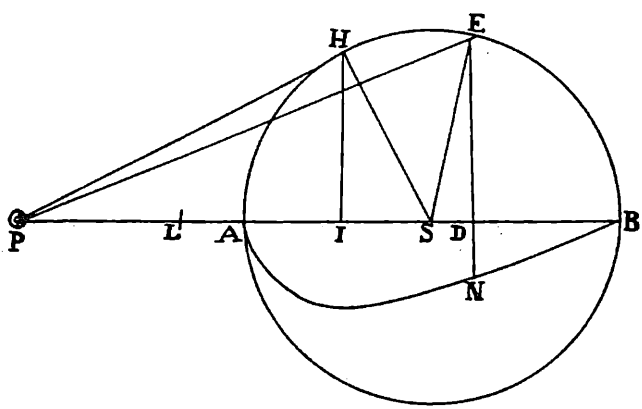


En los puntos L, A, S, B, levántense las perpendiculares L*l*, A*a*, S*s*, B*b*, de las cuales supongamos a S*s* igual a SI; y a través del punto *s* hasta las asíntotas L*l* y LB descríbase la hipérbola *asb* que encuentra a las perpendiculares A*a* y B*b* en *a* y *b*; y el rectángulo 2SA × SI restado del área hiperbólica A*asb*B dejará ANB, el área buscada.

EJEMPLO 3. Si la fuerza centrípeta tendente hacia las diversas partículas de las esferas decrece como la cuarta potencia de la distancia a las partículas, escríbase $\frac{PE^4}{2AS^3}$ por V, luego $\sqrt{(2PS \times LD)}$ por PE, y DN se hará como

$$\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times LA \times LB}{2\sqrt{SI}} \times \frac{1}{\sqrt{2D^5}}$$

Trazadas en la longitud AB, esas tres partes producen otras tantas áreas, *viz.*,



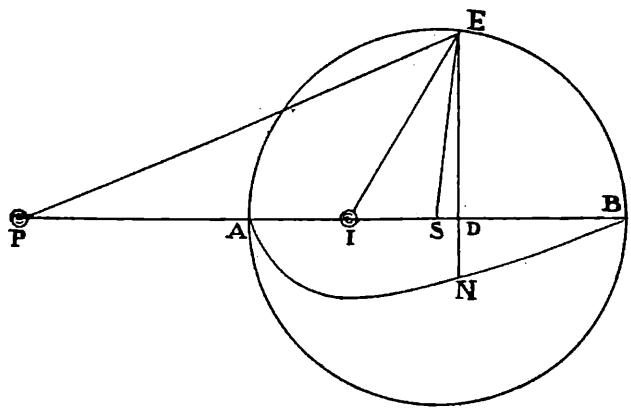
$\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}\right)$; $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$ en $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$ y $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3\sqrt{2SI}}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}\right)$. Y tras la debida reducción se llega a $\frac{2SI^2 \times ALB}{LI}$, SI^2 y $SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$. Y restando las últimas de la primera se hace $\frac{4SI^3}{3LI}$. Por consiguiente, la fuerza total con la cual el corpúsculo P es atraído hacia el centro de la esfera es como $\frac{SI^3}{PI}$, esto es, inversamente como $PS^3 \times PI$. Q.E.I.

Por el mismo método podemos determinar la atracción de un corpúsculo situado dentro de la esfera, pero se hace más expeditamente con arreglo al Teorema siguiente.

PROPOSICIÓN LXXXII. TEOREMA XLI

En una esfera descrita en torno al centro S *con el radio* SA, *si se toman* SI, SA *y* SP *continuamente proporcionales afirmo que la atracción de un corpúsculo dentro de la esfera en cualquier lugar* I *guarda con su atracción fuera de la esfera en el lugar* P *una razón compuesta por la raíz cuadrada de la razón de* IS *y* PS, *las distancias desde el centro, y la raíz cuadrada de la razón de las fuerzas centrípetas tendentes hacia el centro en esos lugares* P *e* I.

Si las fuerzas centrípetas de las partículas de la esfera fuesen inversamente como las distancias al corpúsculo atraído por ellas, la fuerza con la cual el corpúsculo situado en I es atraído por la esfera completa estaría con la fuerza por la cual es atraído en P en una razón compuesta por la raíz cuadrada de la razón de la distancia SI a la distancia SP y la raíz cuadrada de la razón de la fuerza centrípeta en el lugar I que surge de cualquier partícula en el centro y la fuerza centrípeta en el lugar P que surge de la misma partícula en el centro, siendo así inversamente como la raíz cuadrada de la razón de las distancias SI y SP entre sí.



Estas dos raíces cuadradas de razones componen la razón de igualdad, por lo cual son iguales las atracciones en I y P producidas por toda la esfera. Mediante un cálculo análogo, si las fuerzas de las partículas de la esfera son inversamente como el cuadrado de la razón de las distancias, se hallará que la atracción en I es a la atracción en P como la distancia SP al semidiámetro SA de la esfera. Si esas fuerzas son inversamente como el cubo de la razón de las distancias, las atracciones en I y P serán entre sí como SP^2 a SA^2; si fuesen como la cuarta potencia de la razón, como SP^3 a SA^3. Por consiguiente, como en este último caso la atracción en P resultó ser inversamente como $PS^3 \times PI$, la atracción en I será inversamente como $SA^3 \times PI$, esto es, puesto que SA^3 está dada, inversamente como PI. Y la progresión es la misma hasta lo infinito. La demostración de este Teorema es como sigue:

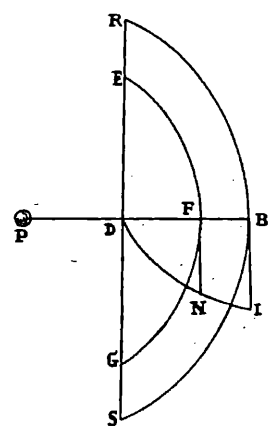
Manteniéndose las cosas construidas como antes, y estando un corpúsculo en cualquier lugar P, la ordenada DN resultó ser como $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$. Por consiguiente, si se traza IE, la ordenada para cualquier otro lugar del corpúsculo, como I (a igualdad de lo demás) sera $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times V}$. Supóngase que las fuerzas centrípetas que provienen de cualquier punto de la esfera, como E, sean entre sí a las distancias IE y PE como PE^n a IE^n (donde el número *n* denota el índice de las potencias de PE e IE), y esas ordenadas se harán como $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times PE^n}$ y $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times IE^n}$, cuya razón

entre sí es como $PS \times IE \times IE^n$ a $IS \times PE \times PE^n$. Como SI, SE y SP se encuentran en una proporción continuada, los triángulos SPE y SEI son semejantes, por lo cual IE es a PE como IS a SE o SA. Por la razón de IE a PE escribir la razón de IS a SA, y la razón de las ordenadas pasa a ser la de $PS \times IE^n$ a $SA \times PE^n$. Pero la razón de PS a SA es la raíz cuadrada de la de las distancias PS y SI, y la razón de IE^n a PE^n (puesto que IE es a PE como IS a SA) es la raíz cuadrada de la de las fuerzas a las distancias PS e IS. Por consiguiente las ordenadas, las áreas descritas por ellas y las atracciones proporcionales a las mismas se encuentran en una razón compuesta de la raíz cuadrada de esas razones. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXXIII. PROBLEMA XLII

Hallar la fuerza con la cual un corpúsculo situado en el centro de una esfera es atraído hacia cualquier segmento de dicha esfera.

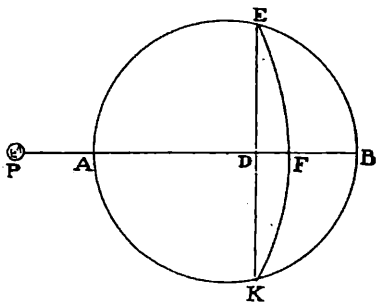
Sea P un cuerpo en el centro de tal esfera, y RBSD un segmento de la misma contenido bajo el plano RDS y la superficie esférica RBS. Córtese DB en F por una superficie esférica EFG descrita desde el centro P, y divídase el segmento en las partes BREFGS y FEDG. Supongamos que ese segmento no es una superficie puramente matemática sino física, dotada de cierto espesor aunque mínimo. Llamemos a esa profundidad O y (por lo que *Arquímedes* demostró) esa superficie será como $PF \times DF \times O$. Supongamos además que las fuerzas atractivas de las partículas de la esfera sean inversamente como esa potencia de las distancias de la cual es índice n; y la fuerza con la cual la superficie EFG atrae al cuerpo P será (por la Proposición LXXIX) como $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, esto es, como $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$. Sea la



perpendicular FN multiplicada por O proporcional a esta cantidad, y el área curvilínea BDI, descrita por la ordenada FN en la longitud DB, será como la fuerza total con la cual el segmento RBSD atrae al cuerpo P. Q.E.I.

PROPOSICIÓN LXXXIV. PROBLEMA XLIII

Hallar la fuerza con la cual un corpúsculo, situado fuera del centro de una esfera y en el eje de cualquier segmento, es atraído por dicho segmento.



Sea el cuerpo P, situado en el eje ADB del segmento EBK, atraído por ese segmento. En torno al centro P, con el radio PE, descríbase la superficie esférica EFK, haciendo que divida al segmento en las partes EBKFE y EFKDE. Hállese la fuerza de la primera de esas partes mediante la Proposición LXXXI, y la fuerza de la segunda por la Proposición LXXXIII, y la suma de las fuerzas será la fuerza del segmento EBKDE. Q.E.I.

ESCOLIO

Habiéndose explicado las atracciones de cuerpos esféricos, llega el momento de tratar las leyes de atracción en otros cuerpos consistentes de modo análogo en partículas atractivas; pero analizarlas detalladamente no es necesario para mi propósito. Bastará añadir algunas Proposiciones generales sobre las fuerzas de tales cuerpos y los movimientos resultantes, pues su conocimiento será de escaso uso en investigaciones filosóficas.

SECCION XIII

Sobre las fuerzas atractivas de cuerpos no esféricos

PROPOSICIÓN LXXXV. TEOREMA XLII

Si un cuerpo es atraído por otro, y su atracción es mucho mayor cuando se halla contiguo al cuerpo atractivo que cuando están separados por un intervalo muy pequeño, las fuerzas de las partículas del cuerpo que atrae decrecen, en el alejamiento del cuerpo atraído, en proporción mayor que el cuadrado de la razón de la distancia de las partículas.

Pues si las fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias a las partículas, siendo (por la Proposición LXXIV) la atracción hacia un cuerpo esférico inversamente como el cuadrado de la distancia del cuerpo atraído al centro de la esfera, dicha atracción no será incrementada sensiblemente por el contacto, y lo será aún menos si al alejarse el cuerpo atraído la atracción disminuye en una proporción todavía inferior. Así pues, la Proposición es evidente por cuanto concierne a esferas atractivas. Y lo mismo sucede con orbes esféricos cóncavos que atraen a cuerpos externos. Y mucho más se manifiesta en orbes que atraen a cuerpos situados dentro de ellos, pues allí las atracciones difundidas por las cavidades de dichos orbes son (por la Proposición LXX) destruidas por atracciones contrarias, careciendo por eso de efecto incluso en el lugar de contacto. Si de esas esferas y orbes esféricos suprimimos cualesquiera partes distantes del lugar de contacto, y añadimos a discreción partes nuevas en cualquier lugar, podremos cambiar a placer las figuras de los cuerpos atractivos, pero como las partes añadidas o

desgajadas son distantes del lugar de contacto no provocarán un exceso notable en la atracción surgida del contacto entre ambos cuerpos. En consecuencia, la Proposición se mantiene para cuerpos de cualquier figura. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXXVI. TEOREMA XLIII

Si las fuerzas de las partículas componentes de un cuerpo atractivo decrecen, al alejarse éste, como la tercera o mayor potencia de la distancia a las partículas, la atracción será mucho mayor en el punto de contacto que cuando los cuerpos atrayente y atraído están separados el uno del otro, aunque el intervalo sea mínimo.

Que la atracción es infinitamente incrementada cuando el corpúsculo atraído llega a tocar a una esfera atractiva de este tipo se sigue de la solución al Problema XLI, mostrada en los ejemplos segundo y tercero. Lo mismo se seguirá también (comparando esos Ejemplos con el Teorema XLI) de las atracciones de cuerpos hacia orbes cóncavo-convexos, tanto si los cuerpos atraídos están situados fuera de los orbes como si lo están en sus cavidades. Y añadiendo o substrayendo de esas esferas y orbes cualquier materia atractiva en lugares distantes del punto de contacto, haciendo que los cuerpos atractivos reciban cualquier figura asignada, la Proposición valdrá universalmente para todos los cuerpos. Q.E.D.

PROPOSICIÓN LXXXVII. TEOREMA XLIV

Si dos cuerpos semejantes entre sí, y formados por materia igualmente atractiva, atraen separadamente a dos corpúsculos proporcionales a dichos cuerpos situados de manera semejante con respecto a ellos, las atracciones aceleratívas de los corpúsculos hacia los cuerpos enteros serán como las atracciones aceleratívas de los corpúsculos hacia partículas de los cuerpos proporcionales a los todos, y situadas de modo semejante en ellos.

Pues si los cuerpos son divididos en partículas proporcionales a los todos, y situadas de modo semejante, la atracción

hacia cualquier partícula de uno de los cuerpos será a la atracción hacia la partícula correspondiente en el otro cuerpo, como las atracciones hacia las diversas partículas del primer cuerpo a las atracciones hacia las diversas partículas correspondientes del otro cuerpo; y, por composición, así es la atracción hacia el primer cuerpo entero a la atracción hacia el segundo cuerpo entero. Q.E.D.

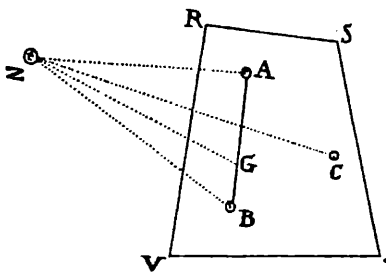
COROLARIO I. De este modo, si a medida que crecen las distancias de los corpúsculos atraídos decrecen las fuerzas atractivas de las partículas en la razón de cualquier potencia de las distancias, las atracciones aceleratívas hacia los cuerpos totales serán directamente como los cuerpos, e inversamente como las potencias de las distancias. Si las fuerzas de las partículas decrecen como el cuadrado de las distancias a los corpúsculos atraídos, y los cuerpos son como A^3 y B^3, siendo los lados cúbicos de los cuerpos y la distancia de los corpúsculos atraídos como A y B, las atracciones aceleratívas hacia los cuerpos serán como $\frac{A^3}{A^2}$ y $\frac{B^3}{B^2}$, esto es, como los lados cúbicos de esos cuerpos A y B. Si las fuerzas de las partículas decrecen como el cubo de las distancias desde los corpúsculos atraídos, las atracciones aceleratívas hacia los cuerpos totales serán como $\frac{A^3}{A^3}$ y $\frac{B^3}{B^3}$, esto es, iguales. Si las fuerzas decrecen como la cuarta potencia, las atracciones hacia los cuerpos serán como $\frac{A^3}{A^4}$ y $\frac{B^3}{B^4}$, esto es, inversamente como los lados cúbicos A y B. Lo mismo se aplica en otros casos.

COROLARIO II. Así, por otra parte, partiendo de las fuerzas con las cuales cuerpos semejantes atraen a corpúsculos situados de modo similar puede obtenerse la razón del decrecimiento de las fuerzas atractivas de las partículas a medida que el corpúsculos atraído se aleja de ellas, siempre que ese decrecimiento esté directa o inversamente en cualquier razón de las distancias.

PROPOSICIÓN LXXXVIII. TEOREMA XLV

Si las fuerzas atractivas de partículas iguales de cualquier cuerpo fuesen como la distancia de los lugares a las partículas, la fuerza del cuerpo total tenderá hacia su centro de gravedad; y será la misma que la fuerza de un globo hecho de materia semejante e igual, que tenga su centro en el centro de gravedad.

Las partículas A y B del cuerpo RSTV atraen a cualquier corpúsculo Z con fuerzas que, suponiendo iguales entre sí a las partículas, son como las distancias AZ y BZ; pero si se suponen desiguales son como esas partículas y sus distancias AZ y BZ conjuntamente, o (si se me permite expresarlo así) como tales partículas multiplicadas por sus distancias AZ y BZ respectivamente. Exprésense esas fuerzas por los contenidos bajo $A \times AZ$ y $B \times BZ$. Unase AB y córtese en G, de manera que AG pueda ser a BG como la partícula B a la partícula A, y G serán el centro común de gravedad para las partículas A y B. La fuerza $A \times AZ$ (por el Corolario II de las Leyes) se descompondrá en las fuerzas $A \times GZ$ y $A \times AG$; y la fuerza $B \times BZ$ en las fuerzas $B \times GZ$ y $B \times BG$. Ahora bien, las fuerzas $A \times AG$ y $B \times BG$ son iguales, porque A es proporcional a B, y BG a AG, y teniendo direcciones contrarias se anulan recíprocamente. Quedan entonces las fuerzas $A \times GZ$ y $B \times GZ$. Estas tienden desde Z hasta el centro G, y componen la fuerza $(A+B) \times GZ$; esto es, la misma fuerza que si las partículas atractivas A y B estuviesen situadas en su centro común de gravedad G, componiendo allí un pequeño globo.



Por el mismo razonamiento, si se añade una tercera partícula C, y su fuerza se compone con la fuerza $(A+B) \times GZ$ tendente hacia el centro G, la fuerza surgida de ello tenderá hacia el centro común de gravedad de ese globo en G y de la partícula C; esto es, hacia el centro común de gravedad de las tres partículas A, B y C; y será lo mismo que si el globo y la partícula C estuviesen situados en ese centro común componiendo allí un globo mayor; y podemos continuar de ese modo hasta lo infinito. Por consiguiente, la fuerza total de todas las

partículas de cualquier cuerpo RSTV es la misma que si ese cuerpo, sin modificar su centro de gravedad, tuviese la forma de un globo. Q.E.D.

COROLARIO. Por consiguiente, el movimiento del cuerpo atraído Z será igual al que tendría si el cuerpo atractivo RSTV fuese esférico; en consecuencia, si ese cuerpo atractivo estuviese en reposo o progresase uniformemente en línea recta el cuerpo atraído se moverá en una elipse que tiene su centro en el centro de gravedad del cuerpo atractivo.

PROPOSICIÓN LXXXIX. TEOREMA XLVI

Si hay varios cuerpos consistentes en partículas iguales, cuyas fuerzas son como las distancias de los lugares a cada uno, la fuerza compuesta de todas las fuerzas mediante la cual cualquier corpúsculo es atraído tenderá hacia el centro común de gravedad de los cuerpos atractivos; y será la misma que si esos cuerpos atractivos, conservando su centro de gravedad, se uniesen allí y pasasen a formar un globo.

Esto se demuestra del mismo modo que la Proposición precedente.

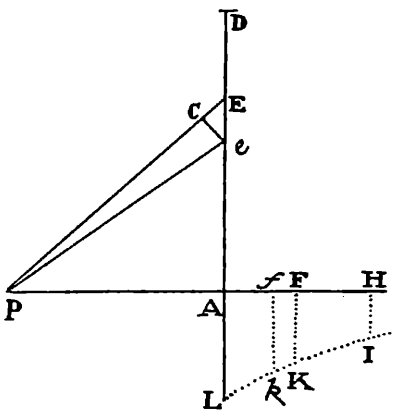
COROLARIO. Así pues, el movimiento del cuerpo atraído será el mismo que si los cuerpos atractivos, preservando su centro común de gravedad, se uniesen allí y pasaran a formar un globo. En consecuencia, si el centro común de gravedad de los cuerpos atractivos estuviese en reposo, o en movimiento rectilíneo uniforme, el cuerpo atraído se moverá en una elipse que tiene su centro en el centro común de gravedad de los cuerpos atractivos.

PROPOSICIÓN XC. PROBLEMA XLIV

Si hacia los diversos puntos de cualquier círculo tienden fuerzas centrípetas iguales, que crecen o decrecen en cualquier razón de las distancias, se pide hallar la fuerza con la cual es atraído un corpúsculo, que está situado en cualquier punto de una recta que se levanta perpendicularmente al plano del círculo en su centro.

Supongamos que se describe un círculo en torno al centro A con cualquier radio AD en un plano respecto del cual es

perpendicular la recta AP; y pídase hallar la fuerza con la cual un corpúsculo P es atraído hacia el mismo. Desde cualquier punto E del círculo, hasta el corpúsculo atraído P, trácese la recta PE. En la recta PA tómese PF igual a PE, haciendo que la perpendicular FK, levantada en F, sea como la fuerza con la cual el punto E atrae al corpúsculo P.



Sea la curva IKL el lugar del punto K. Hágase que esa curva encuentre el plano del círculo en L. En PA tómese PH igual a PD, y levántese la perpendicular HI que encuentra esa curva en I; y la atracción del corpúsculo P hacia el círculo será como el área AHIL multiplicada por la altura AP. Q.E.I.

Pues tómese en AE una línea mínima E*e*. Unase P*e*, y en PE y PA tómense PC y P*f* iguales a P*e*. Y como la fuerza con la que cualquier punto E del anillo descrito en torno al centro A con el radio AE en el plano recién mencionado atrae hacia sí el cuerpo P se supone como FK; y, en consecuencia, la fuerza con la cual ese punto atrae al cuerpo P hacia A es como $\frac{AP \times FK}{PE}$; y la fuerza con la cual el anillo entero atrae al cuerpo P hacia A es como el anillo y $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjuntamente; y ese anillo también es como el rectángulo bajo el radio AE y la anchura E*e*, y este rectángulo (porque PE y AE, E*e* y CE son proporcionales) es igual al rectángulo $PE \times CE$ o $PE \times Ff$, la fuerza con la cual ese anillo atrae al cuerpo P hacia A será como $PE \times Ff$ y $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjuntamente; esto es, como el contenido bajo $Ff \times FK \times AP$, o como el área FK*kf* multiplicada por AP. Así la suma de las fuerzas con la cual todos los anillos en el círculo descrito en torno al centro A con el radio AD atraen al cuerpo P hacia A es como todo el área AHIKL multiplicada por AP. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, si las fuerzas de los puntos

decrecen como el cuadrado de las distancias, esto es, si FK es como $\frac{1}{PF^2}$, y el área AHIKL como $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$, la atracción del corpúsculo P hacia el círculo será como

$$1 - \frac{PA}{PH}; \text{ esto es, como } \frac{AH}{PH}.$$

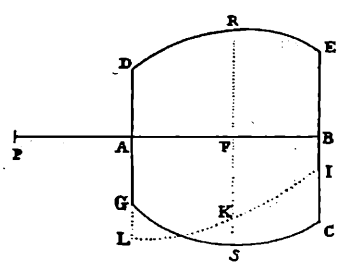
COROLARIO II. Y, en general, si las fuerzas de los puntos a las distancias D fuesen inversamente como cualquier potencia D^n de las distancias; esto es, si FK es como $\frac{1}{D^n}$, y el área AHIKL como $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$, la atracción del corpúsculo P hacia el círculo será como $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

COROLARIO III. Y si el diámetro del círculo se incrementase hasta lo infinito, y el número *n* fuese mayor que la unidad, la atracción del corpúsculo P hacia todo el plano infinito será inversamente como PA^{n-2}, porque se desvanece el otro término $\frac{PA}{PH^{n-1}}$.

PROPOSICIÓN XCI. PROBLEMA XLV

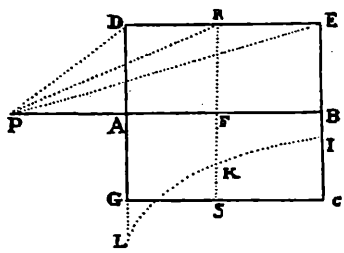
Hallar la atracción de un corpúsculo situado en el eje de un sólido redondo, hacia cuyos diversos puntos tienden fuerzas centrípetas iguales que decrecen en cualquier razón de las distancias.

Sea atraído el corpúsculo P, situado en el eje AB del sólido DECG, hacia ese sólido. Sea cortado el sólido por cualquier círculo como RFS, perpendicular al eje; y en su semidiámetro FS, en cualquier plano PALKB que atraviese el eje, tómese (por la Proposición XC) la longitud FK proporcional a la fuerza con la cual es atraído el corpúsculo P hacia ese círculo. Sea el lugar del punto K la curva LKI, que encuentra los planos de los círculos más exteriores AL y BI en L e I; y la atracción del corpúsculo P hacia el sólido será como el área LABI. Q.E.I.



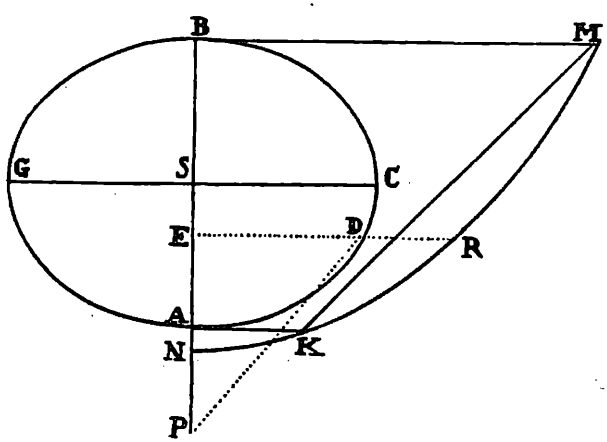
COROLARIO I. Por lo mismo,

si el sólido fuese un cilindro descrito por el paralelogramo ADEB hecho girar alrededor del eje AB, y las fuerzas centrípetas tendentes a los diversos puntos fuesen inversamente como los cuadrados de las distancias desde los puntos, la atracción del corpúsculo P hacia este cilindro será como $AB-PE+PD$. Pues la ordenada FK (por el Corolario I, Proposición XC) será como $1-\frac{PF}{PR}$.



La parte 1 de esta cantidad, multiplicada por la longitud AB, describe el área $1 \times AB$; y la otra parte $\frac{PF}{PR}$, multiplicada por la longitud PB, describe el área $1 \times (PE-AD)$ (como puede mostrarse fácilmente partiendo de la cuadratura de la curva LKI); y, de modo semejante, la misma parte multiplicada por la longitud PA describe el área $1 \times (PD-AD)$, y multiplicada por AB, la diferencia de PB y PA, describe $1 \times (PE-PD)$, la diferencia de las áreas. Partiendo del primer contenido $1 \times AB$ suprímase el último contenido $1 \times (PE-PD)$ y quedará el área LABI igual a $1 \times (AB-PE+PD)$. En consecuencia, siendo proporcional a ese área, la fuerza es como $AB-PE+PD$.

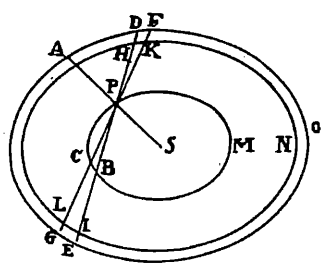
COROLARIO II. Por lo mismo, también es conocida la fuerza con la cual un esferoide AGBC atrae a cualquier cuerpo situado



externamente en su eje AB. Sea NKRM una sección cónica cuya ordenada ER, perpendicular a PE, pueda ser siempre igual a la longitud de la línea PD, trazada hasta el punto D donde esa ordenada corta al esferoide. Desde los vértices A y B del esferoide levántese sobre su eje AB las perpendiculares AK y BM, respectivamente iguales a AP y BP, que encuentran por lo mismo a la sección cónica en K y M; y únanse KM, desgajando el segmento KMRK.

Sea S el centro del esferoide, y SC su mayor semidiámetro; y la fuerza con la cual el esferoide atrae al cuerpo P será a la fuerza con la cual una esfera descrita con el diámetro AB atrae al mismo cuerpo como $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ es a $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Y por un cálculo basado en los mismos principios pueden hallarse las fuerzas de los segmentos del esferoide.

COROLARIO III. Si el corpúsculo estuviese situado dentro del esferoide y en su eje, la atracción será como la distancia al centro. Esto puede inferirse fácilmente a partir del razonamiento que sigue, tanto si la partícula está en el eje como en cualquier otro diámetro dado. Sea AGOF un esferoide atractivo, S su centro y P el cuerpo atraído. Trácese a través del cuerpo P el semidiámetro SPA, y las dos líneas rectas DE y FG que encuentran el esferoide en D y E, F y G; sean PCM y HLN las superficies de dos esferoides interiores, semejantes y concéntricos al exterior; el primero pasa a través del cuerpo P y corta a las rectas DE y FG en B y C; el segundo corta a las mismas rectas en H e I. K y L. Hágase que los esferoides tengan todos un eje común, y la parte de las rectas interceptadas en los lados DP y BE, FP y CG, DH e IE, FK y LG serán mutuamente iguales, porque las rectas DE, PB y HI son bisectadas en el mismo punto, como sucede también con las rectas FG, PC y KL.



Imagínese ahora que DPF y EPG representan conos opuestos descritos con los ángulos verticales infinitamente pequeños DPF y EPG, siendo también infinitamente pequeñas las líneas DH y EI. Entonces, las partículas de los conos DHKF y GLIE, cortadas por las superficies esferoidales, serán entre sí por razón

de la igualdad entre DH y EI como los cuadrados de las distancias desde el cuerpo P, y atraerán por eso a tal corpúsculo igualmente. Por un razonamiento semejante, si los espacios DPF y EGCB son divididos en partículas por las superficies de innumerables esferoides semejantes concéntricos al primero y con un eje común, todas esas partículas atraerán igualmente a ambos lado al cuerpo P hacia partes contrarias. Por consiguiente, las fuerzas del cono DPF y del segmento cónico EGCB son iguales, y se anulan recíprocamente por sus acciones opuestas. Y el caso es el mismo para las fuerzas de toda la materia que yace fuera del esferoide interior PCBM. En consecuencia, el cuerpo P es atraído por el solo esferoide interior PCBM, con lo cual (por el Corolario III, Proposición LXXII) su atracción es a la fuerza con la cual el cuerpo A es atraído por todo el esferoide AGOD como la distancia PS es a la distancia AS. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XCII. PROBLEMA XLVI

Dado un cuerpo atractivo, se requiere hallar la razón del decrecimiento de las fuerzas centrípetas tendentes a sus diversos puntos.

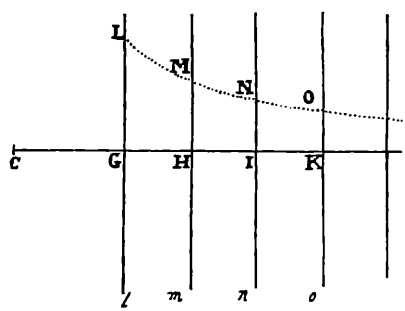
El cuerpo dado debe tener forma de esfera, cilindro o alguna otra figura regular, cuya ley de atracción respondiendo a cualquier razón de decrecimiento puede hallarse por las Proposiciones LXXX, LXXXI y XCI. Entonces, mediante experimentos, debe hallarse la fuerza de las atracciones a diversas distancias, y la ley de atracción hacia el todo, descubierta por ese medio, dará la razón del decrecimiento de las fuerzas de las diversas partes, que constituye la cuestión planteada.

PROPOSICIÓN XCIII. TEOREMA XLVII

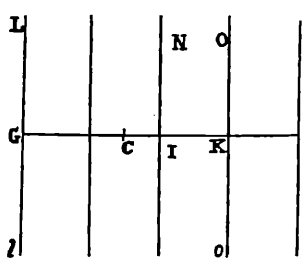
Si un sólido fuese plano por un lado e infinitamente extenso por todos los otros, y formado por partículas iguales e igualmente atractivas, cuyas fuerzas decrecen al alejarse del sólido en la razón de cualquier potencia superior al cuadrado de las distancias; y un corpúsculo situado en cualquier parte del plano es atraído por la fuerza de todo el sólido, afirmo que la fuerza atractiva de todo el sólido al alejarse desde su superficie plana decrecerá en la razón de una potencia cuya base es la distancia del corpúsculo desde el plano, y su índice inferior en 3 *al índice de la potencia de las distancias.*

CASO 1. Sea LG*l* el plano donde termina el sólido. Este yace sobre el lado del plano que mira hacia I, y se resuelve en innumerables planos *m*HM, *n*IN, *o*KO, etc., paralelos a GL.

Hágase primero que el cuerpo atraído C esté situado fuera del sólido. Trácese CGHI perpendicular a esos innumerables planos, y decrezcan las fuerzas atractivas de los puntos del sólido en la razón de una potencia de la distancia cuyo índice es el número *n* no inferior a 3. En consecuencia (por el Corolario III de la Proposición XC), la fuerza con la cual cualquier plano *m*HM atrae al punto C es inversamente como CH^{n-2}. En el plano *m*HM tómese la longitud HM inversamente proporcional a CH^{n-2}, y esa fuerza será como HM. De modo semejante, en los diversos planos *l*GL, *n*IN, *o*KO, etc., tómense las longitudes GL, IN, KO, etc., inversamente proporcionales a CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, etc., y las fuerzas de esos planos serán como las longitudes así tomadas, con lo cual la suma de las fuerzas será como la suma de las longitudes, esto es, la fuerza de todo el sólido como el área GLOK prolongada infinitamente hacia OK. Pero ese área (por el conocido método de cuadraturas) es inversamente como CG^{n-3}, por lo cual la fuerza de todo el sólido es inversamente como CG^{n-3}. Q.E.D.



CASO 2. Sea situado ahora el corpúsculo C en el lado del plano *l*GL que se encuentra dentro del sólido, y tómese la distancia CK igual a la distancia CG.



Y la parte del sólido LG*l*o*K*O determinada por los planos paralelos *l*GL y *o*KO no atraerá al corpúsculo C, situado en el medio, hacia ninguno de los lados por anularse en razón de su igualdad las acciones contrarias de los puntos opuestos. En consecuencia, el corpúsculo C sólo es atraído por la fuerza del sólido situado más allá del plano OK. Pero esta fuerza (por

el Caso 1) es inversamente como CK^{n-3}, esto es (porque CG y CK son iguales) inversamente como CG^{n-3}. Q.E.D.

COROLARIO I. Así, si el sólido LGIN terminase a cada lado por dos planos paralelos infinitos LG e IN su fuerza atractiva será conocida restando de la fuerza atractiva de todo el sólido infinito LGKO la fuerza atractiva de la parte más distante NIKO, prolongada infinitamente hacia KO.

COROLARIO II. Si la parte más distante de este sólido fuese rechazada, porque comparada con la atracción de la parte más próxima su atracción es despreciable, la atracción de esa parte más próxima disminuirá a medida que aumenta la distancia aproximadamente en la razón de la potencia CG^{n-3}.

COROLARIO III. Así pues, si cualquier cuerpo finito, plano por un lado, atrae a un corpúsculo situado en la región media de ese plano, y fuese extremadamente pequeña la distancia entre el corpúsculo y el plano comparada con las dimensiones del cuerpo atractivo; y el cuerpo atractivo está formado por partículas homogéneas, cuyas fuerzas atractivas decrecen en la razón de cualquier potencia de las distancias superior a la cuarta, la fuerza atractiva del cuerpo entero decrecerá muy aproximadamente en la razón de una potencia cuyo lado es esa distancia muy pequeña, y el índice inferior por 3 al índice de la potencia anterior. Sin embargo, este aserto no se mantiene para un cuerpo consistente en partículas cuyas fuerzas atractivas decrecen en la razón de la tercera potencia de las distancias, pues en ese caso la atracción de la parte más alejada del cuerpo infinito en el segundo Corolario es siempre infinitamente mayor que la atracción de la parte más próxima.

ESCOLIO

Si un cuerpo es atraído perpendicularmente hacia un plano dado, y se pide el movimiento del cuerpo a partir de la ley de atracción dada, el Problema se resolverá buscando (por la Proposición XXXIX) el movimiento del cuerpo descendiendo en línea recta hacia ese plano, y (por el Corolario II de las Leyes) componiendo ese movimiento con un movimiento uniforme realizado en la dirección de líneas paralelas a ese plano. Y, a la inversa, si se pide la ley de la atracción tendente hacia ese plano en direcciones perpendiculares, por la cual el cuerpo puede ser

obligado a moverse en cualquier curva dada, el Problema se resolverá operando como en el tercer Problema.

Pero las operaciones pueden abreviarse resolviendo las ordenadas en series convergentes. Como si a una base A se aplica ordenadamente la longitud B en cualquier ángulo dado, y esa longitud es como cualquier potencia de la base $A^{\frac{m}{n}}$; y se busca la fuerza con la cual un cuerpo, atraído hacia la base o alejado de ella en la dirección de esa ordenada, puede ser obligado a moverse en la curva que esa ordenada describe siempre con su extremidad superior; supongo que la base es incrementada en una parte muy pequeña O, y resuelvo la ordenada $(A+O)^{\frac{m}{n}}$ en una serie infinita:

$$A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} OA^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}, \text{ etc.,}$$

y supongo la fuerza proporcional al término de esta serie donde O tiene dos dimensiones, esto es, al término $\frac{mm-mn}{2nn}$ $OOA^{\frac{m-2n}{n}}$. Por consiguiente, la fuerza buscada es como $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$ o, cosa idéntica, como $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Como si la ordenada describe una parábola, siendo $m=2$ y $n=1$, la fuerza será como la cantidad dada $2B^0$ y estará por lo mismo dada. Por consiguiente, con una fuerza dada el cuerpo se moverá en una parábola, como demostró *Galileo*. Si la ordenada describe una hipérbola, siendo $m=0-1$ y $n=1$, la fuerza será como $2A^{-3}$ o $2B^3$; por lo cual una fuerza que es como el cubo de la ordenada hará que el cuerpo se mueva en una hipérbola.

Sin embargo, dejando atrás Proposiciones de este tipo, pasaré a algunas otras relacionadas con movimientos no estudiados aún.

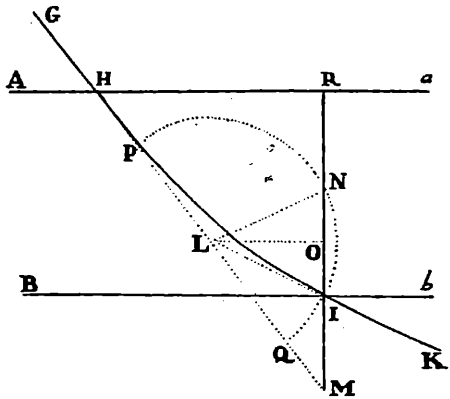
SECCION XIV

Sobre el movimiento de cuerpos muy pequeños cuando son perturbados por fuerzas centrípetas tendentes hacia las diversas partes de cualquier cuerpo muy grande.

PROPOSICIÓN XCIV. TEOREMA XLVIII

Si dos medios semejantes fuesen separados el uno del otro por un espacio terminado a ambos lados por planos paralelos, y al cruzar por ese espacio un cuerpo fuese atraído o impelido perpendicularmente hacia cualquiera de esos medios, sin ser agitado ni estorbado por ninguna otra fuerza, y la atracción fuese en todas partes la misma a iguales distancias de un plano, tomadas hacia el mismo lado del plano, afirmo que el seno de incidencia sobre uno u otro plano estará con el seno de emergencia desde el otro plano en una razón dada.

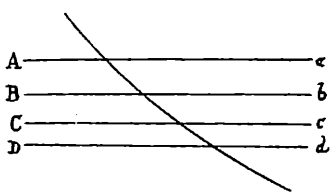
CASO 1. Sean A*a* y B*b* dos planos paralelos. Incida el cuerpo en el primer plano A*a* en la dirección de la línea GH, y en todo su paso a través del espacio intermedio sea atraído o impelido hacia el medio de incidencia, y por esa acción sea forzado a describir una curva HI, emergiendo en la dirección de la línea IK. Levántese IM perpendicular al plano de emergencia B*b*, encontrando la línea de incidencia GH prolongada en M, y el plano de incidencia A*a* en R; prolónguese la línea de emergencia KI, encontrando HM en L. Alrededor del centro L, con el radio LI, descríbase un círculo que corte HM en P y Q, y MI prolongada en N; y, primero, si la atracción o impulso se supone uniforme, la curva HI (por lo que demostró *Galileo*) será una parábola, cuya propiedad es la de un rectángulo bajo su *latus rectum* dado, y la línea IM igual al cuadrado de HM; y por añadidura la línea HM será bisectada en L. En consecuencia, si



se abate la perpendicular LO hasta MI, MO y OR serán iguales; y añadiendo las líneas iguales ON y OI los todos MN e IR serán iguales también. Como IR está dada, MN lo está también, y el rectángulo MI × MN guarda con el rectángulo bajo el *latus rectum* e IM, esto es, con HM^2 una razón dada.

Pero el rectángulo MI × MN es igual al rectángulo MP × MQ, esto es, a la diferencia de los cuadrados ML^2 y PL^2 o LI^2; y HM^2 guarda una razón dada con su cuarta parte ML^2; por consiguiente, está dada la razón de $ML^2 - LI^2$ a ML^2, y por conversión la razón de LI^2 a ML^2, y su raíz cuadrada, la razón de LI a ML. Pero en cada triángulo como LMI los senos de los ángulos son proporcionales a los lados opuestos. Por consiguiente, la razón del seno del ángulo de incidencia LMR al seno del ángulo de emergencia LIR está dada. Q.E.D.

CASO 2. Pase ahora el cuerpo sucesivamente a través de varios espacios terminados en planos paralelos A*ab*B, B*bc*C, etc., siendo afectado por una fuerza que es uniforme en cada uno de ellos separadamente pero diferente en los diferentes espacios; y, por lo que acaba de demostrarse, el seno del ángulo de incidencia sobre el primer plano A*a* está en una razón dada con el seno de emergencia desde el segundo plano B*b*; y este seno de incidencia sobre el segundo plano B*b* estará en una razón dada con el seno de emergencia desde el tercer plano C*c*; y este seno al seno de emergencia desde el cuarto plano D*d*, y así hasta lo infinito; y, por multiplicación de iguales, el seno de incidencia sobre el primer plano estará en una razón dada con el seno de emergencia desde el último plano.



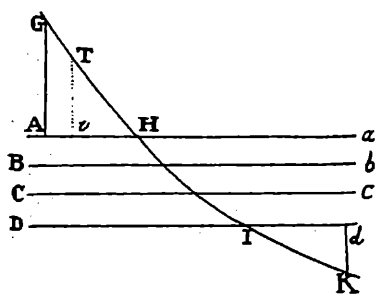
Disminúyanse los intervalos de los planos, incrementándose infinitamente su número para que pueda ser continua la acción

de atracción o impulso, ejercida con arreglo a cualquier ley asignada, y estará dada entonces también la razón del seno de incidencia sobre el primer plano al seno de emergencia desde el último plano. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XCV. TEOREMA XLIX

Suponiendo las mismas cosas, afirmo que la velocidad del cuerpo antes de su incidencia es a su velocidad tras su emergencia como el seno de emergencia al seno de incidencia.

Háganse iguales AH e I*d*, y levántense las perpendiculares AG y *d*K que encuentran las líneas de incidencia y emergencia GH e IK en G y K. En GH tómese TH igual a IK, y abátase hasta el plano A*a* una perpendicular T*v*. Y (por el Corolario II de las Leyes del Movimiento) descompóngase el movimiento del cuerpo en dos, uno perpendicular a los planos A*a*, B*b*, C*c*, etc., y otro paralelo a ellos.

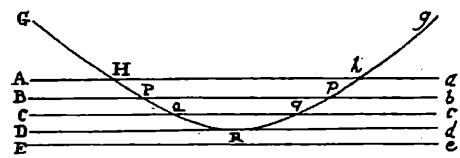


La fuerza de atracción o impulso, actuando en direcciones perpendiculares a esos planos, no altera para nada el movimiento en direcciones paralelas; por consiguiente, el cuerpo que progrese con este movimiento cruzará en tiempos iguales los intervalos paralelos iguales que yacen entre la línea AG y el punto H, y entre el punto I y la línea *d*K; esto es, describirá las líneas GH e IK en tiempos iguales. En consecuencia, la velocidad antes de la incidencia es a la velocidad tras la emergencia como GH a IK o TH, esto es, como AH o I*d* a *v*H, esto es (suponiendo como radio TH o IK), como el seno de emergencia al seno de incidencia. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XCVI. TEOREMA L

Suponiendo las mismas cosas, y que el movimiento antes de la incidencia es más veloz que después, afirmo que si la línea de incidencia es inclinada continuamente el cuerpo será al fin reflejado, y el ángulo de reflexión será igual al ángulo de incidencia.

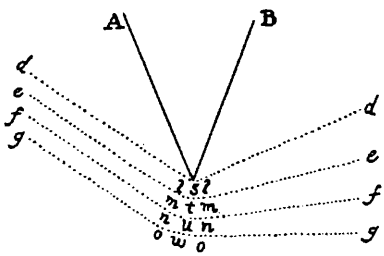
Pues imagínese el cuerpo pasando entre los planos paralelos A*a*, B*b*, C*c*, etc., y describiendo arcos parabólicos como antes; sean esos arcos HP, PQ, QR, etc. Y sea la oblicuidad de la línea de incidencia GH al primer plano A*a* tal que el seno de incidencia pueda estar con el radio del círculo cuyo seno es en la misma razón que el mismo seno de incidencia guarda con el seno de emergencia desde el plano D*d* hacia el espacio D*de*E; como el seno de emergencia es ahora igual al radio, el ángulo de emergencia será un ángulo recto, y la línea de emergencia coincidirá con el plano D*d*. Llegue el cuerpo a este plano en el punto R; y como la línea de emergencia coincide con dicho plano, es manifiesto que el cuerpo no puede proceder más allá hacia el plano E*e*. Pero tampoco puede continuar en la línea de emergencia R*d*, porque se ve continuamente atraído o impelido hacia el medio de incidencia. Retornará, en consecuencia, entre los planos C*c* y D*d*, describiendo un arco de una parábola QR*q*, cuyo vértice principal (por lo que *Galileo* demostró) está en R, cortando el plano C*c* en el mismo ángulo en *q* que antes cortaba en Q; prosiguiendo entonces en los arcos parabólicos *qp*, *ph*, etc., semejantes e iguales a los arcos previos QP, PH, etc., cortará el resto de los planos en los mismos ángulos en *p*, *h*, etc., que antes cortaba en P, H, etc., y acabará emergiendo con la misma oblicuidad en *h* con la que incidió inicialmente sobre ese plano en H.



Imagínese ahora que los intervalos de los planos A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., son disminuidos y su número incrementado infinitamente, de manera que la acción de atracción o impulso, ejercida con arreglo a cualquier ley asignada, pueda hacerse continua; y, permaneciendo el ángulo de emergencia siempre igual al ángulo de incidencia, será al término igual a éste también. Q.E.D.

ESCOLIO

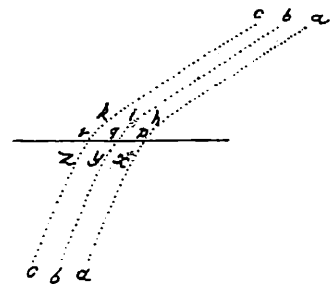
Estas atracciones guardan un gran parecido con las reflexiones y refracciones de la luz, hechas según una razón dada de las secantes, como descubrió *Snell*; y, por consiguiente, en una razón dada de los senos, como mostró *Descartes*. Pues consta por los fenómenos de los satélites de Júpiter, confirmados por las observaciones de diferentes astrónomos, que la luz es propagada en sucesión, y necesita de siete a ocho minutos para viajar desde el Sol a la Tierra. Además, los rayos de luz que se encuentran en nuestro aire (como recientemente descubrió *Grimaldi* admitiendo luz en un cuarto oscuro a través de un pequeño orificio, en lo cual soy también experto) al pasar junto a los ángulos de cuerpos transparentes u opacos (como los bordes circulares y rectangulares de oro, plata y monedas de cobre, o de cuchillos o trozos rotos de piedra o cristal) se curvan alrededor de esos cuerpos como si fuesen atraídos hacia ellos; y aquellos rayos que en su paso se aproximan más a los cuerpos son los más curvados, como si fuesen los más atraídos, cosa que yo mismo he observado cuidadosamente.



Y los que pasan a mayores distancias son menos curvados; y los aún más alejados se curvan un poco hacia las partes contrarias, y forman tres franjas de colores. En la figura *s* representa el filo de un cuchillo, o cualquier tipo de cuña A*s*B; y *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld* son rayos curvados hacia el cuchillo en los arcos *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl*, cuya desviación es mayor o menor de acuerdo con su distancia al cuchillo. Como esta desviación de los rayos se realiza en el aire fuera del cuchillo, se sigue que los rayos que caen sobre el cuchillo se desvían primero en el aire antes de tocar el cuchillo. Y lo mismo acontece con los rayos que inciden sobre cristal.

Por consiguiente, la refracción no se hace en el punto de incidencia sino gradualmente, por una desviación continua de los rayos, que se realiza parcialmente en el aire antes de tocar el cristal, y parcialmente (si no me equivoco) dentro del cristal, tras haber entrado allí los rayos, como se representa en los rayos *ckzc*, *biyb* y *ahxa* cayendo sobre *r*, *q* y *p*, desviados entre *k* y *z*, *i* e *y*, *h* y

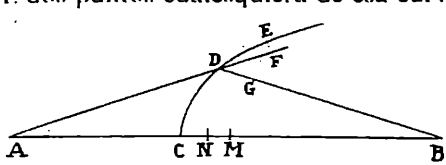
x. Así pues, dada la analogía existente entre la propagación de los rayos de luz y el movimiento de los cuerpos, no me ha parecido inoportuno añadir las Proposiciones siguientes para usos ópticos, que para nada consideran la naturaleza de los rayos de luz ni entran en la cuestión de si son o no cuerpos, limitándose a determinar las curvas de cuerpos extremadamente semejantes a las curvas de los rayos.



PROPOSICIÓN XCVII. PROBLEMA XLVII

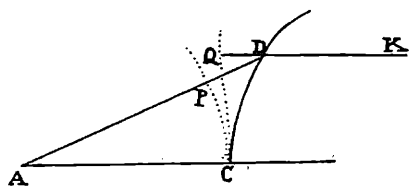
Suponiendo que el seno de incidencia sobre cualquier superficie esté en una razón dada con el seno de emergencia; y que la desviación de las sendas de tales cuerpos cerca de esa superficie se realiza en un espacio muy corto, que puede considerarse como un punto, se pide hallar una superficie capaz de hacer que todos los corpúsculos que manan de un lugar dado converjan hacia otro lugar dado.

Sea A el lugar desde el cual divergen los corpúsculos; B el lugar hacia el cual debieran converger; CDE la curva que por su revolución en torno al eje AB describe la superficie buscada; D y F dos puntos cualesquiera de esa curva; y EF y EG perpendiculares abatidas sobre las sendas de los cuerpos AD y DB. Aproxímese el punto D al punto E hasta coincidir con él; y la razón última de la línea DF, por la cual se incrementa AD, a la línea DG por la cual se disminuye DB será la misma que la del seno de incidencia al seno de emergencia. Por consiguiente, está dada la razón del incremento de la línea AD al decremento de la línea DB; por lo cual si en el eje AB se toma en cualquier lugar el punto C, a través del cual ha de pasar la curva CDE, y CM (el incremento de AC) se toma en esa razón dada con CN (decremento de BC),



y desde los centros A y B con los radios AM y BN se describen dos círculos que se cortan el uno al otro en D, ese punto D tocará la curva buscada CDE y al tocarla a placer en cualquier punto determinará esa curva. Q.E.I.

COROLARIO I. Haciendo que el punto A o B se aleje a veces hasta lo infinito, y otras se mueva hacia otras partes del punto C, se obtendrán todas las figuras que *Descartes* ha mostrado en su *Optica* y su *Geometría* en relación con las refracciones. Esta Proposición descubre aquello que *Descartes* prefirió dejar oculto.

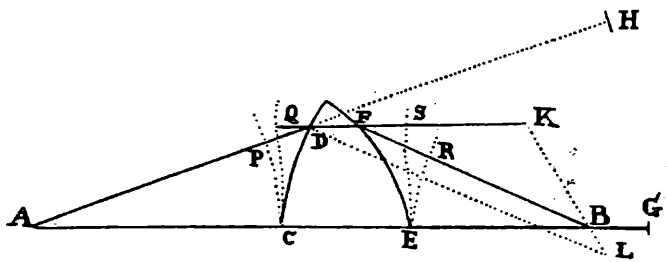


COROLARIO II. Si un cuerpo tropezase con cualquier superficie CD en la dirección de una recta AD, trazada con arreglo a cualquier ley, emergiendo en la dirección de otra recta DK; y desde el punto C se trazan líneas curvas CP y CQ, siempre perpendiculares a AD y DK, los incrementos de las líneas PD y QD, y esas líneas mismas, generadas por dichos incrementos, serán como los senos de incidencia y emergencia los unos respecto de los otros; y a la inversa.

PROPOSICIÓN XCVIII. PROBLEMA XLVIII

Suponiendo las mismas cosas, si en torno al eje AB *se describe cualquier superficie atractiva como* CD, *regular o irregular, a través de la cual han de pasar los cuerpos que salen del lugar dado* A, *se pide hallar una segunda superficie atractiva* EF *capaz de hacer que esos cuerpos converjan hacia un lugar dado* B.

Corte una línea que une AB la primera superficie en C y la segunda en E, tomándose el punto D a placer. Suponiendo que el seno de incidencia sobre la primera superficie sea al seno de emergencia de la misma, y el seno de emergencia desde la segunda superfice al seno de incidencia sobre la misma como la cantidad dada M a otra cantidad dada N, prolónguese AB hasta G, de tal manera que BG pueda ser a CE como M − N a N; y AD hasta H, de manera que AH pueda ser igual a AG; y DF hasta K, de manera que DK pueda ser a DH como N a M.



Unase KB, y en torno al centro D con el radio DH descríbase un círculo que encuentre a KB prolongada en L, y trácese BF paralela a DL; y el punto F tocará la línea EF, que girada en torno al eje AB describirá la superficie perseguida. Q.E.F.

Pues imagínese que las líneas CP y CQ son en todas partes perpendiculares a AD y DF, y las líneas ER y ES a FB y FD respectivamente, con lo cual QS será siempre igual a CE; y (por el Corolario II, Proposición XCVII) PD será a QD como M a N, y por tanto como DL a DK, o FB a FK; y por substracción como DL − FB o PH − PD − FB a FD o FQ − QD; y por suma como PH − FB a FQ, esto es (porque PH y CG, QS y CE son iguales), como CE + BG − FR a CE − FS. Pero (porque BG es a CE como M − N a N) llega a suceder también que CE + BG es a CE es como M a N; en consecuencia, por substracción, FR es a FS como M a N; por lo cual (por el Corolario II, Proposición XCVII) la superficie EF fuerza a un cuerpo que cae sobre ella en la dirección DF a proseguir en la línea FR hasta el lugar B. Q.E.D.

ESCOLIO

Podemos del mismo modo proseguir hasta tres superficies o más. Pero de todas las figuras la esférica es la más adecuada para usos ópticos. Si los objetivos de los telescopios estuviesen hechos con dos cristales de figura esférica y agua entre ellos no sería improbable que los errores de las refracciones hechas en las partes extremas de las superficies de los cristales pudieran ser corregidos con precisión suficiente por las refracciones del agua. Esos objetivos deben preferirse a los cristales elípticos e hiperbó-

licos, no sólo porque pueden hacerse con mayor sencillez y precisión sino porque los pinceles de rayos situados fuera del eje del cristal serían refractados más exactamente por ellos. Pero la diferente refrangibilidad de rayos diferentes es el verdadero obstáculo que impide a la óptica hacerse perfecta mediante figuras esféricas o de otro tipo. Salvo que puedan corregirse los errores surgidos de ello, todo el esfuerzo empleado en corregir los otros se desperdicia en gran medida.

LIBRO SEGUNDO

EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS
(En medios resistentes)

SECCION PRIMERA

Sobre el movimiento de cuerpos que son resistidos en la razón de la velocidad.

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I

Si un cuerpo es resistido en la razón de su velocidad, el movimiento perdido por resistencia es como el espacio recorrido en su movimiento.

Pues como el movimiento perdido en cada intervalo igual de tiempo es como la velocidad, esto es, como el pequeño incremento de espacio recorrido, el movimiento que se pierde en el tiempo total será como el conjunto de espacio recorrido. Q.E.D.

COROLARIO. Por consiguiente, si privado de toda gravedad el cuerpo se mueve por su fuerza innata solamente en espacios libres, y se dan tanto su movimiento completo en el comienzo como el movimiento que subsiste tras recorrer alguna parte del camino, estará dado también el espacio total que el cuerpo puede describir en un tiempo infinito. Pues ese espacio será al espacio ahora descrito como el movimiento total al comienzo es a la parte perdida de tal movimiento.

LEMA I

Cantidades proporcionales a sus diferencias son continuamente proporcionales.

Sea

$$A : A - B = B : B - C : C - D = \text{etc.};$$

luego, por substracción,

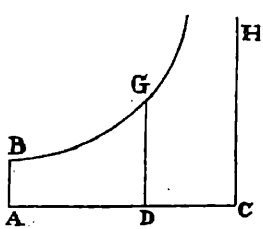
$$A:B=B:C=C:D=\text{etc.} \qquad \text{Q.E.D.}$$

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Si un cuerpo es resistido en la razón de su velocidad, y se mueve por su sola inercia a través de un medio homogéneo, y los tiempos se toman iguales, las velocidades en el comienzo de cada uno de los tiempos están en una progresión geométrica, y los espacios descritos en cada uno de los tiempos son como las velocidades.

CASO 1. Divídanse los tiempos en intervalos iguales; y si en el comienzo mismo de cada intervalo suponemos que la resistencia actúa con un impulso singular que es como la velocidad, el decremento de la velocidad en cada uno de los intervalos de tiempo será como la velocidad misma. Así pues, las velocidades son proporcionales a sus diferencias, y (por el Lema I, Libro II) continuamente proporcionales. Por consiguiente, si con un número igual de intervalos se componen cualesquiera porciones iguales de tiempo, las velocidades al comienzo de tales tiempos serán como términos en una progresión continua, que se toman por saltos, omitiendo en todas partes un número igual de términos intermedios. Pero las razones de esos términos están compuestas por las razones iguales de los términos intermedios igualmente repetidos, y son por lo mismo iguales. Así pues, siendo proporcionales a tales términos, las velocidades están en progresión geométrica. Disminúyanse esos intervalos de tiempo, e increméntese su número hasta lo infinito, de tal manera que el impulso de resistencia pueda hacerse continuo; y las velocidades en los comienzos de tiempos iguales, siempre continuamente proporcionales, serán también continuamente proporcionales en este caso. Q.E.D.

CASO 2. Y, por división, las diferencias de las velocidades, esto es, las partes de las velocidades perdidas en cada uno de los tiempos, son como los todos: pero los espacios descritos en cada uno de los tiempos son como las partes perdidas de las velocidades (por la Proposición I, Libro II) y, por tanto, como los todos también. Q.E.D.



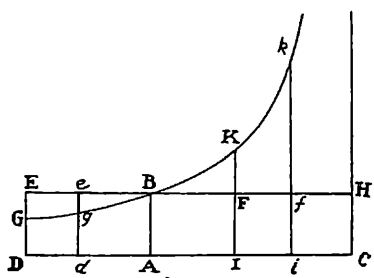
COROLARIO. De ahí que si se describe la hipérbola BG con las asíntotas

rectangulares AC y CH, y se trazan AB y DG perpendiculares a la asíntota AC, y tanto la velocidad del cuerpo como la resistencia del medio al comienzo mismo del movimiento se expresan mediante cualquier línea AC dada y, tras pasar algún tiempo, mediante la línea indefinida DC, el tiempo puede expresarse mediante el área ABGD, y el espacio descrito en ese tiempo mediante la línea AD. Pues si ese área, por el movimiento del punto D, se incrementase uniformemente del mismo modo que el tiempo, la recta DC decrecerá en una razón geométrica del mismo modo que la velocidad; y las partes de la recta AC, descritas en tiempos iguales, decrecerán en la misma razón.

PROPOSICIÓN III. PROBLEMA I

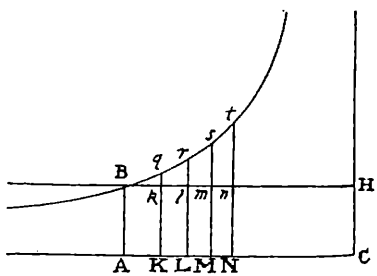
Definir el movimiento de un cuerpo que, en un medio homogéneo, asciende o desciende en línea recta, y es resistido en la razón de su velocidad, y urgido por una fuerza uniforme de gravedad.

Ascendiendo el cuerpo, represéntese la gravedad mediante cualquier rectángulo dado BACH; y la resistencia del medio, al comienzo del ascenso, por el rectángulo BADE, tomado sobre el lado contrario de la recta AB. Con las asíntotas regulares AC y CH descríbase a través del punto B una hipérbola que corte a las perpendiculares DE y *de* en G y *g*; y al ascender el cuerpo describirá en el tiempo DG*gd* el espacio EG*ge*; en el tiempo DGBA el espacio de todo el ascenso EGB; en el tiempo ABKI el espacio de descenso BFK; y en el tiempo IK*ki* el espacio de descenso KF*fk*. Las velocidades de los cuerpos (proporcionales a la resistencia del medio) en esos períodos de tiempo serán ABED, AB*ed*, ninguna, ABFI y AB*fi* respectivamente; y la velocidad máxima que el cuerpo puede adquirir descendiendo será BACH.



Pues descompóngase el rectángulo BACH en innumerables rectángulos A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, etc., que serán como los incremen-

tos de las velocidades producidas en otros tantos tiempos iguales; entonces 0, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*, etc., serán como todas las velocidades y en consecuencia (por suposición) como las resistencias del medio al comienzo de cada uno de los tiempos iguales. Hágase AC a AK, o ABHC a AB*k*K, como la fuerza de gravedad a la resistencia en el comienzo del segundo tiempo; réstense de la fuerza de gravedad las resistencias, y ABHC, K*k*HC, L*l*HC, M*m*HC, etc., serán como las fuerzas absolutas con las que el cuerpo es urgido al comienzo de cada uno de los tiempos, y por tanto (según la Ley II) como los incrementos de las velocidades, esto es, como los rectángulos A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, etcétera, y así (por el Lema I, Libro II) estarán en progresión geométrica. Por consiguiente, si las rectas K*k*, L*l*, M*m*, N*n*, etc., se prolongan para encontrar la hipérbola en *q*, *r*, *s*, *t*, etc., las áreas AB*q*K, K*qr*L, L*rs*M, M*st*N, etc., serán iguales y por lo mismo análogas a los tiempos iguales y a las fuerzas gravitatorias iguales. Pero el área AB*q*K (por el Corolario III, Lemas VII y VIII, Libro I) es al área B*qk* como K*q* a $\frac{1}{2}kq$, o AC a $\frac{1}{2}$AK, esto es, como la fuerza de gravedad a la resistencia en la mitad del primer tiempo.



Y por un razonamiento semejante, las áreas *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, etc., son a las áreas *qklr*, *rlms*, *smnt*, etc., como las fuerzas gravitatorias a las resistencias en la mitad del segundo, el tercer, el cuarto tiempo y así sucesivamente. Como las áreas iguales BAK*q*, *q*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, etc., son análogas a las fuerzas gravitatorias, las áreas B*kq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, etc., serán análogas a las resistencias en la mitad de cada uno de los tiempos, esto es (por suposición) a las velocidades y, por tanto, a los espacios descritos. Tómense las sumas de las cantidades análogas, y las áreas B*kq*, B*lr*, B*ms*, B*nt*, etc., serán análogas a los espacios totales descritos; y también las áreas AB*q*K, AB*r*L, AB*s*M, AB*t*N, etc., a los tiempos. Por consiguiente, el cuerpo al descender describirá en cualquier tiempo AB*r*L el espacio B*lr*, y en el tiempo L*rt*N el espacio *rlnt*. Q.E.D.

Y una demostración similar vale para el movimiento ascendente.

COROLARIO I. Por consiguiente, la mayor velocidad que el

cuerpo puede adquirir cayendo es a la velocidad adquirida en cualquier tiempo dado como la fuerza dada de gravedad que continuamente le urge es a la fuerza de resistencia que se le opone al final de ese tiempo.

COROLARIO II. Pero aumentándose el tiempo en progresión aritmética, la suma de esa velocidad máxima y la velocidad en el ascenso, así como su diferencia en el descenso, decrece en una progresión geométrica.

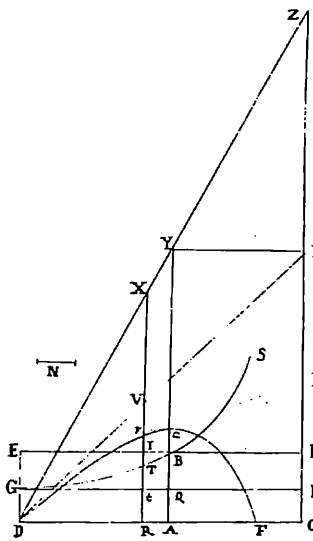
COROLARIO III. También las diferencias de los espacios que se describen en diferencias iguales de los tiempos decrecen en la misma progresión geométrica.

COROLARIO IV. El espacio descrito por el cuerpo es la diferencia de dos espacios, de los cuales uno es como el tiempo tomado desde el comienzo del descenso, y el otro como la velocidad; esos espacios son también iguales entre sí al comienzo del descenso.

PROPOSICIÓN IV. PROBLEMA II

Suponiendo que sea uniforme la fuerza de gravedad en cualquier medio homogéneo, y que tienda perpendicularmente al plano del horizonte, definir allí el movimiento de un proyectil que padece una resistencia proporcional a su velocidad.

Supongamos que el proyectil va desde cualquier lugar D en la dirección de cualquier línea recta DP, representándose su velocidad al comienzo del movimiento por la longitud DP. Desde el punto P abátase la perpendicular PC sobre la línea horizontal DC, y córtese DC en A, de manera que DA pueda ser a AC como la componente vertical de la resistencia del medio proveniente del movimiento hacia arriba en el comienzo es a la fuerza de gravedad; o (cosa que equivale a lo mismo) de manera que el rectángulo bajo DA y DP pueda ser al que hay bajo AC y CP como la resistencia total al comienzo del movimiento es a la fuerza de gravedad. Con las asíntotas DC y CP descríbase cualquier hipérbola GTBS que corte a las perpendiculares DG y AB en G y B; complétese el paralelogramo DGKC, haciendo que su lado GK corte a AB en Q. Tómese una línea N en la misma razón a QB que DC a CP; y desde cualquier punto R de la recta DC levántese TR perpendicular a ella, que encuentra a la



hipérbola en T y a las rectas EH, GK y DP en I, *t* y V; en esa perpendicular tómese V*r* igual a $\frac{t\text{GT}}{\text{N}}$, o, cosa igual, tómese R*r* igual a $\frac{\text{GTIE}}{\text{N}}$; y el proyectil, en el tiempo DRTG, llegará al punto *r* describiendo la curva D*ra*F, lugar del punto *r;* desde allí llegará a su altura máxima *a* en la perpendicular AB, aproximándose luego siempre a la asíntota PC. Y su velocidad en cualquier punto *r* será como la tangente *r*L a la curva. Q.E.I.

Pues N : QB = DC : CP = DR : RV,

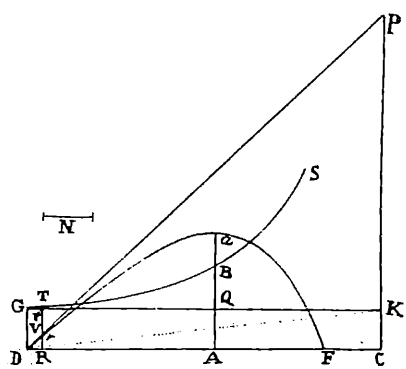
y por lo mismo RV es igual a $\frac{\text{DR} \times \text{QB}}{\text{N}}$, y R*r* (esto es, RV − V*r*, o $\frac{\text{DR} \times \text{QB} - t\text{GT}}{\text{N}}$) es igual a $\frac{\text{DR} \times \text{AB} - \text{RDGT}}{\text{N}}$. Represéntese el tiempo por el área RDGT y (por las Leyes, Corolario II) descompóngase el movimiento del cuerpo en dos, uno de ascenso y otro lateral. Y siendo la resistencia como el movimiento, descompóngase también en dos partes proporcionales y contrarias a las partes del movimiento; con lo cual la longitud descrita por el movimiento lateral será (por la Proposición II, Libro II) como la línea DR, y la altura (por la Proposición III, Libro II) como el área DR × AB − RDGT, esto es, como la línea R*r*. Pero en el comienzo mismo del movimiento el área RDGT es igual al rectángulo DR × AQ, por lo cual esa línea R*r* $\left(\text{o } \frac{\text{DR} \times \text{AB} - \text{DR} \times \text{AQ}}{\text{N}}\right)$ será entonces a DR como AB − AQ o QB a N, esto es, como CP a DC; y, en consecuencia, como el movimiento ascendente al movimiento en longitud al comienzo. Puesto que R*r* es siempre como la altura, y DR siempre como la longitud, y R*r* es a DR al comienzo como la altura a la longitud, se sigue que R*r* es siempre a DR como la altura a la longitud,

por lo cual el cuerpo se moverá en la línea D*ra*F, que es el lugar del punto *r*. Q.E.D.

COROLARIO I. Por consiguiente, R*r* es igual a $\frac{DR \times AB}{N}$ $-\frac{RDGT}{N}$; y si RT se prolonga hasta X, de manera que RX pueda ser igual a $\frac{DR \times AB}{N}$, esto es, si el paralelogramo ACPY se completa y se traza DY cortando a CP en Z, y RT se prolonga hasta encontrar a DY en X, X*r* será igual a $\frac{RDGT}{N}$ y, por lo mismo, proporcional al tiempo.

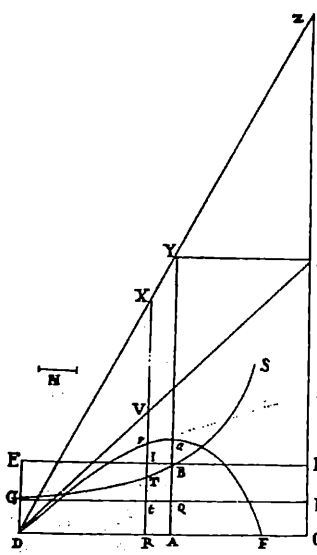
COROLARIO II. De ahí que si se toman en una progresión geométrica innumerables líneas CR o, cosa idéntica, innumerables líneas ZX, habrá otras tantas líneas X*r* en una progresión aritmética. Y de este modo la curva D*ra*F se perfila fácilmente por la tabla de logaritmos.

COROLARIO III. Si se construye una parábola con el vértice D, y el diámetro DG se prolonga hacia abajo y su *latus rectum* es a 2DP como toda la resistencia al comienzo del movimiento a la fuerza gravitatora, la velocidad con la cual el cuerpo debiera ir desde el lugar D en la dirección de la recta DP, para describir en un medio uniformemente resistente la curva D*ra*F, será idéntica a aquella con la cual debiera ir desde el mismo lugar D en la dirección de la misma recta DP para describir una parábola en un medio no resistente. Pues el *latus rectum* de esta parábola, al comienzo mismo del movimiento, es $\frac{DV^2}{Vr}$; y V*r* es $\frac{tGT}{N}$ o $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Pero una recta que de trazarse tocaría a la hipérbola GTS en G, es paralela a DK, con lo cual T*t* es $\frac{CK \times DR}{DC}$, y N es



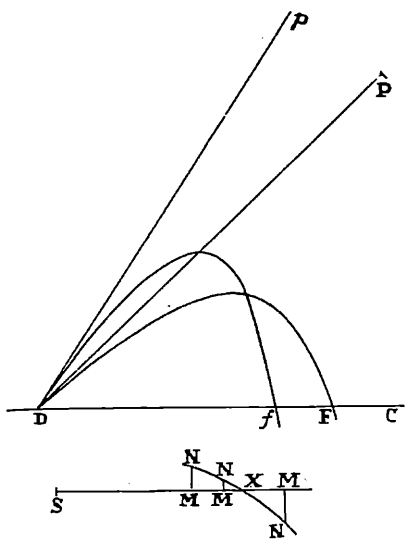
$\frac{QB \times DC}{CP}$. Por lo cual V*r* es igual a $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$, esto es (porque DR y DC, DV y DP son proporcionales) $\frac{DV^2 \times CK \times CP}{2DP^2 \times QB}$, y el *latus rectum* se determina como $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, esto es (porque QB y CK, DA y AC son proporcionales) $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$, con lo cual es a 2DP como DP × DA a CP × AC; esto es, como la resistencia a la gravedad. Q.E.D.

COROLARIO IV. De este modo, si un cuerpo es proyectado desde cualquier lugar D con una velocidad dada, en la dirección de una recta DP dada por posición, y está dada la resistencia del medio al comienzo del movimiento, la curva D*ra*F que ese cuerpo describirá puede hallarse. Pues estando dada la velocidad, está dado y es conocido el *latus rectum* de la parábola. Y tomando 2DP a este *latus rectum* como la fuerza de gravedad a la fuerza de resistencia, DP está dada también. Cortando entonces DC en A, de manera que CP × AC pueda ser a DP × DA como la gravedad a la resistencia, el punto A estará dado. Con lo cual estará dada también la curva D*ra*F.



COROLARIO V. Y, a la inversa, si la curva D*ra*F está dada, lo estarán también tanto la velocidad del cuerpo como la resistencia del medio en cada uno de los lugares *r*. Pues estando dada la razón de CP × AC a DP × DA, está dada tanto la resistencia del medio al comienzo del movimiento como el *latus rectum* de la parábola; con lo cual está dada también la velocidad al comienzo del movimiento. Partiendo entonces de la longitud de la tangente *r*L están dadas tanto la velocidad proporcional a ella como la resistencia proporcional a la velocidad en cualquier lugar *r*.

COROLARIO VI. Pero como la longitud 2DP es al *latus rectum* de la parábola como la gravedad a la resistencia en D, y según la velocidad aumenta la resistencia se aumenta en la misma razón, pero el *latus rectum* de la parábola es aumentado como el cuadrado de esa razón, es obvio que la longitud 2DP es aumentada sólo en esa razón simple, siendo siempre proporcional a la velocidad, y que no será aumentada o disminuida por el cambio del ángulo CDP, salvo que la velocidad se modifique también.



COROLARIO VII. De lo cual se sigue el método para determinar la curva D*ra*F aproximadamente a partir de los fenómenos, encontrando la resistencia y velocidad con la cual el cuerpo es proyectado. Proyéctense dos cuerpos semejantes e iguales con la misma velocidad desde el lugar D, en ángulos distintos CDP y CD*p*, siendo conocidos los lugares F y *f* donde caen sobre el plano horizontal DC. Tomando entonces cualquier longitud para DP o D*p*, supóngase que la resistencia en D guarde con la gravedad una razón cualquiera, representada por cualquier longitud SM. Entonces, por cálculo, hállense las longitudes DF y D*f* a partir de la longitud supuesta DP; y partiendo de la razón $\frac{Ff}{DF}$, hallada por cálculo, substráigase la misma razón hallada por experimento, representando la diferencia mediante la perpendicular MN. Repítase lo mismo una segunda y tercera vez, suponiendo siempre una nueva razón SM de la resistencia a la gravedad, y registrando una nueva diferencia MN. Trácense las diferencias positivas a un lado de la recta SM, y las negativas al otro; y a través de los puntos N, N y N trácese una curva regular NNN, que corte a la recta SMMM en X, y SX será la verdadera razón de la resistencia a la gravedad que se buscaba.

Partiendo de esta razón, la longitud DF debe hallarse mediante cálculo; y una longitud que es a la longitud supuesta DP como la longitud DF conocida por experimento a la longitud DF recién hallada será la verdadera longitud DP. Conociendo esto tendremos tanto la curva D*ra*F descrita por el cuerpo como la velocidad y resistencia del cuerpo en cada lugar.

ESCOLIO

Sin embargo, que la resistencia de los cuerpos guarda esa razón a la velocidad es más una hipótesis matemática que una hipótesis física. En medios libres de cualquier tenacidad, las resistencias opuestas a los cuerpos son como el cuadrado de las velocidades. Pues por la acción de un cuerpo más rápido se comunica un movimiento mayor en proporción a una velocidad mayor a la misma cantidad del medio en un tiempo inferior; y en un tiempo igual, por razón de una mayor cantidad del medio perturbado, se comunica un movimiento como el cuadrado de la razón mayor; y la resistencia (por las Leyes II y III) es como el movimiento comunicado. Veamos, pues, qué movimientos surgen de esta ley de resistencia.

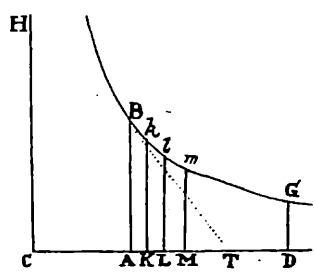
SECCION II

Sobre el movimiento de los cuerpos que son resistidos como el cuadrado de su velocidad.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA III

Si un cuerpo es resistido como el cuadrado de su velocidad, y se mueve sólo por su fuerza innata a través de un medio homogéneo, y los tiempos son tomados en progresión geométrica, procediendo de menor a mayor, afirmo que las velocidades al comienzo de cada uno de los tiempos están en la misma proporción geométrica inversa y que los espacios descritos en cada uno de los tiempos son iguales.

Pues dado que la resistencia del medio es proporcional al cuadrado de la velocidad, y el decrecimiento de la velocidad proporcional a la resistencia, si el tiempo es dividido en innumerables intervalos iguales, los cuadrados de las velocidades al comienzo de cada uno de los tiempos serán proporcionales a las diferencias de las mismas velocidades. Supongamos que dichos intervalos de tiempo son KL, LM, etc., tomados en la línea recta CD; levantemos las perpendiculares AB, K*k*, L*l*, M*m*, etc., hasta encontrar la hipérbola B*klm*G, descrita con el centro C, y las asíntotas rectangulares CD, CH en B, *k*, *l*, etc.; entonces AB será a K*k* como CK a CA y, por división, AB − K*k* a K*k* como AK a CA, y, alternativamente, AB − K*k* a AK como K*k* a CA, y, en consecuencia, como AB



$\times$ Kk a AB $\times$ CA. Por tanto, como AK y AB $\times$ CA están dados, AB $-$ Kk será como AB $\times$ Kk; y, finalmente, cuando AB y Kk coinciden, como AB^2. Y, por el mismo razonamiento, Kk $-$ Ll, Ll $-$ Mm, etc., serán como Kk^2, Ll^2, etc. Por tanto, los cuadrados de las líneas AB, Kk, Ll, Mm, etc., son como sus diferencias y, en consecuencia, dado que más arriba se mostró que los cuadrados de las velocidades son como sus diferencias, la progresión de ambos será igual. Demostrado lo anterior, se sigue también que las áreas descritas por estas líneas están en la misma progresión que los espacios descritos por estas velocidades. Por tanto, si la velocidad al comienzo del primer tiempo AK es representada por la línea AB, y la velocidad al comienzo del segundo tiempo KL por la línea Kk, y la longitud descrita en el primer tiempo por el área AKkB, todas las siguientes velocidades serán representadas por las líneas siguientes Ll, Mm, etc., y las longitudes descritas por las áreas Kl, Lm, etc. Y, por composición, si la totalidad del tiempo es representada por AM, la suma de sus partes, la longitud total descrita será representada por AMmB, la suma de sus partes. Concíbase ahora que el tiempo AM es dividido en las partes AK, KL, LM, etc., de forma que CA, CK, CL, CM, etc., estén en progresión geométrica, y estas partes estarán en la misma progresión, y las velocidades AB, Kk, Ll, Mm, etc., estarán en la misma progresión inversamente, y los espacios descritos Ak, Kl, Lm, etc., serán iguales. Q.E.D.

COROLARIO I. De ello se desprende que si el tiempo es representado por cualquier parte AD de la asíntota, y la velocidad al comienzo del tiempo por la ordenada AB, la velocidad al final del tiempo será representada por la ordenada DG, y todo el espacio descrito por el área hiperbólica adyacente ABGD, y el espacio que cualquier cuerpo pueda recorrer en el mismo tiempo AD, con la primera velocidad AB, en un medio no resistente, por el rectángulo AB $\times$ AD.

COROLARIO II. Por tanto, el espacio recorrido en un medio resistente está dado, tomándolo al espacio recorrido con la velocidad uniforme AB en un medio no resistente, como el área hiperbólica ABGD al rectángulo AB $\times$ AD.

COROLARIO III. La resistencia del medio también está dada haciéndola igual, en el comienzo mismo del movimiento, a una fuerza centrípeta uniforme que pudiera generar en un cuerpo que cayera por un medio no resistente la velocidad AB en el tiempo AC. Pues si se traza BT de forma que toque la hipérbola en B y se encuentre con la asíntota en T, la línea recta AT será

igual a AC, y expresará el tiempo en que la primera resistencia, uniformemente continuada, anulará toda la velocidad AB.

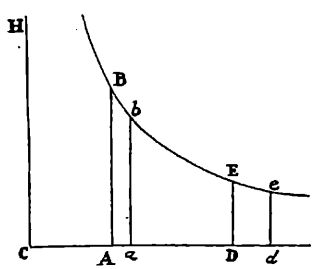
COROLARIO IV. Y, en consecuencia, también está dada la proporción de esta resistencia a la fuerza de la gravedad o a cualquier otra fuerza centrípeta dada.

COROLARIO V. E, inversamente, dada la proporción de la resistencia a cualquier fuerza centrípeta dada, también está dado el tiempo AC, en que una fuerza centrípeta igual a la resistencia puede generar una velocidad como AB; y con ello es dado el punto B, a través del cual debe describirse la hipérbola, con CH y CD como sus asíntotas, y también el espacio ABGD, que un cuerpo, iniciando su movimiento con la velocidad Ab, puede recorrer en un tiempo AD en un medio resistente homogéneo.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA IV

Los cuerpos esféricos homogéneos e iguales que tropiezan con resistencias como el cuadrado de las velocidades y se mueven únicamente por su fuerza innata, recorrerán, en tiempos que son inversamente como las velocidades del comienzo, espacios iguales, y perderán partes de sus velocidades proporcionales a los todos.

Trácese cualquier hipérbola B*b*E*e* de asíntotas rectangulares CD, CH, cortando las perpendiculares AB, *ab*, DE, *de* en B, *b*, E, etc. Represéntense las velocidades iniciales mediante las perpendiculares AB, DE, y los tiempos mediante las líneas A*a*, D*d*. En consecuencia (según la hipótesis), DE es a AB como A*a* a D*d*, e igualmente (por la naturaleza de la hipérbola) CA a CD; y, por composición, también C*a* a C*d*. Por tanto, las áreas AB*ba*, DE*ed*, esto es, los espacios recorridos, son iguales entre sí, y las primeras velocidades AB, DE, son proporcionales a las últimas *ab*, *de*; y, en consecuencia, por sustracción, proporcionales a las partes perdidas de las velocidades, AB − *ab*, DE − *de*. Q.E.D.



PROPOSICIÓN VII. TEOREMA V

Si cuerpos esféricos son resistidos como el cuadrado de sus velocidades, en tiempos que son directamente como los primeros movimientos e inversamente como las primeras resistencias, perderán partes de sus movimientos proporcionales a los todos, y recorrerán espacios proporcionales al producto de dichos tiempos y las primeras velocidades.

Pues las partes de los movimientos perdidas son como el producto de las resistencias y los tiempos. En consecuencia, para que dichas partes sean proporcionales a los todos, el producto de la resistencia y el tiempo deberá ser como el movimiento. Por tanto, el tiempo será directamente como el movimiento e inversamente como la resistencia. Por tanto, tomados los intervalos de los tiempos según esta razón, los cuerpos perderán siempre partes de sus movimientos proporcionales a los todos y, en consecuencia, siempre retendrán velocidades proporcionales a su velocidad primera. Y, debido a la razón dada de las velocidades, siempre recorrerán espacios que serán como el producto de las primeras velocidades y los tiempos. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, si cuerpos igualmente veloces son resistidos como el cuadrado de sus diámetros, todo globo homogéneo que se mueva a cualquier velocidad perderá partes de su movimiento proporcionales al todo al recorrer espacios proporcionales a su diámetro. Pues el movimiento de todo globo será como el producto de su velocidad y su masa, esto es, como el producto de la velocidad y el cubo de su diámetro; la resistencia (por suposición) será como el producto del cuadrado del diámetro y el cuadrado de la velocidad; y el tiempo (por esta Proposición) estará en razón directa del primero e inversa del segundo, es decir, del diámetro directamente y de la velocidad inversamente; y, en consecuencia, el espacio, que es proporcional al tiempo y a la velocidad, será como el diámetro.

COROLARIO II. Si cuerpos igualmente veloces son resistidos como la 3/2 potencia de sus diámetros, todo globo homogéneo que se mueva a cualquier velocidad perderá partes de su movimiento proporcionales al todo al recorrer espacios que sean como la 3/2 potencia del diámetro.

COROLARIO III. Y en general, si cuerpos igualmente veloces son resistidos en razón de cualquier potencia de los diámetros,

los espacios en que los globos homogéneos, moviéndose a cualquier velocidad, perderán partes de sus movimientos proporcionales a los todos, serán como los cubos de los diámetros aplicados a dicha potencia. Supóngase que dichos diámetros son D y E, y que las resistencias, donde las velocidades se suponen iguales, son como D^n y E^n; los espacios en que los globos, moviéndose a cualquier velocidad, perderán partes de sus movimientos proporcionales a los todos serán como D^{3-n} y E^{3-n}. Y, en consecuencia, los globos homogéneos que recorran espacios proporcionales a D^{3-n} y E^{3-n} retendrán sus velocidades en la misma razón mutua que al comienzo.

COROLARIO IV. Ahora bien, si los globos no fueran homogéneos, el espacio descrito por el globo más denso deberá aumentarse en razón de la densidad. Pues el movimiento, a igual velocidad, es mayor en razón de la densidad, y el tiempo (por esta Proposición) aumenta en razón directa del movimiento, y el espacio recorrido en razón del tiempo.

COROLARIO V. Y si los globos se mueven en diferentes medios, el espacio, en un medio que, no cambiando otros elementos, resiste más, debe disminuirse en razón de la mayor resistencia. Pues el tiempo (por esta Proposición) disminuirá en razón del aumento de resistencia, y el espacio en razón del tiempo.

LEMA II

El momento de cualquier generada es igual a los momentos de cada uno de los lados generadores multiplicados por los índices de las potencias de dichos lados y por sus coeficientes continuamente.

Llamo generada a cualquier cantidad no formada por adición o substracción de diversas partes, sino generada o producida en aritmética por multiplicación, división o extracción de raíz de cualquier término; y en geometría por la determinación de contenidos y lados, o de los extremos y medios de proporcionales. Las cantidades de esta índole son productos, cocientes, raíces, rectángulos, cuadrados, cubos, cuadrados y cubos de lados, etc. Aquí considero tales cantidades como variables e indeterminadas, y creciendo y decreciendo, por así decirlo, por un movimiento o flujo continuo. Doy a su incremento o

disminución momentáneos el nombre de momento, de forma que los incrementos puedan estimarse como momentos añadidos o positivos, y las disminuciones como momentos substraídos o negativos. Pero hay que cuidarse de considerar como tales a las partículas finitas. Las partículas finitas no son momentos, sino las mismas cantidades generadas por los momentos. Debemos concebirlos como los mismos principios nacientes de las magnitudes finitas. Tampoco consideramos en este Lema la magnitud de los momentos, sino su primera proporción, como nacientes. Lo mismo se hará si, en vez de momentos, utilizamos ya sea las velocidades de los incrementos y disminuciones (que también pueden llamarse movimientos, mutaciones y flujos de cantidades), ya sea cualquier cantidad finita proporcional a dichas velocidades. El coeficiente de cualquier lado generador es la cantidad que resulta de aplicar la generada a dicho lado.

Por esta razón, el Lema significa que si los momentos de cualesquiera cantidades A, B, C, etc., que aumenten o disminuyan en flujo continuo, o las velocidades de las mutaciones proporcionales a aquellos son llamados a, b, c, etc., el momento o mutación del rectángulo generado AB será $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$, el momento del contenido generado ABC será $a\mathrm{BC}+b\mathrm{AC}+c\mathrm{AB}$, y los momentos de las potencias generadas A^2, A^3, A^4, $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{A}^{\frac{3}{2}}$, $\mathrm{A}^{\frac{1}{3}}$, $\mathrm{A}^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, $\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}$, serán respectivamente $2a\mathrm{A}$, $3a\mathrm{A}^2$, $4a\mathrm{A}^3$, $\frac{1}{2}a\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}a\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}a\mathrm{A}^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}a\mathrm{A}^{-\frac{1}{3}}$, $-a\mathrm{A}^{-2}$. $-2a\mathrm{A}^{-3}$, $-\frac{1}{2}a\mathrm{A}^{-\frac{3}{2}}$; y, en general, que el momento de cualquier potencia $\mathrm{A}^{\frac{n}{m}}$ será $\frac{n}{m}a\mathrm{A}^{\frac{n-m}{m}}$. También, que el momento de la cantidad generada $\mathrm{A}^2\mathrm{B}$ será $2a\mathrm{AB}+b\mathrm{A}^2$, el momento de la cantidad generada $\mathrm{A}^3\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2$ será $3a\mathrm{A}^2\mathrm{B}^4\mathrm{C}^2+4b\mathrm{A}^3\mathrm{B}^3\mathrm{C}^2+2c\mathrm{A}^3\mathrm{B}^4\mathrm{C}$, y el momento de la cantidad generada $\frac{\mathrm{A}^3}{\mathrm{B}^2}$ o $\mathrm{A}^3\mathrm{B}^{-2}$ será $3a\mathrm{A}^2\mathrm{B}^{-2}-2b\mathrm{A}^3\mathrm{B}^{-3}$, etcétera. El Lema es entonces demostrado:

Caso 1. Cualquier rectángulo, como AB, aumentado por un flujo continuo, faltando de los lados A y B la mitad de sus momentos $\frac{1}{2}a$ y $\frac{1}{2}b$, era $\mathrm{A}-\frac{1}{2}a$ por $\mathrm{B}-\frac{1}{2}b$, o $\mathrm{AB}-\frac{1}{2}a\mathrm{B}-\frac{1}{2}b\mathrm{A}+\frac{1}{4}ab$; pero tan pronto como los lados A y B son aumentados por la otra mitad de los momentos, el rectángulo se convierte en $\mathrm{A}+\frac{1}{2}a$ por $\mathrm{B}+\frac{1}{2}b$, o $\mathrm{AB}+\frac{1}{2}a\mathrm{B}+\frac{1}{2}b\mathrm{A}+\frac{1}{4}ab$. Sustráigase de este rectángulo el rectángulo anterior y quedará el exceso $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$. En consecuencia, el incremento $a\mathrm{B}+b\mathrm{A}$ del rectángulo es

generado con la totalidad de los incrementos a y b de los lados. Q.E.D.

CASO 2. Supóngase que AB es siempre igual a G, y entonces el momento del contenido ABC o GC (según el Caso 1) será gC $+c$G, es decir (sustituyendo G y g por AB y aB$+b$A), aBC $+b$AC$+c$AB. Y el razonamiento se aplica igualmente a contenidos con cualquier número de lados. Q.E.D.

CASO 3. Supóngase que los lados A, B y C son siempre iguales entre sí, y el momento aB$+b$A, de A^2, es decir, del rectángulo AB, será $2a$A; y el momento aBC$+b$AC$+c$AB de A^3, es decir, del contenido ABC, será $3aA^2$. Y, por la misma razón, el momento de cualquier potencia A^n es naA^{n-1}. Q.E.D.

CASO 4. En consecuencia, como $\frac{1}{A}$ por A es 1, el momento de $\frac{1}{A}$ multiplicado por A, junto con $\frac{1}{A}$ multiplicado por a, será el momento de 1, es decir, nulo. Por tanto, el momento de $\frac{1}{A}$, o de A^{-1}, es $\frac{-a}{A^2}$. Y, en general, dado que $\frac{1}{A^n}$ por A^n es 1, el momento de $\frac{1}{A^n}$ multiplicado por A^n junto con $\frac{1}{A^n}$ por naA^{n-1} será nulo. Y, en consecuencia, el momento de $\frac{1}{A^n}$ o A^{-n} será $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q.E.D.

CASO 5. Y dado que $A^{\frac{1}{2}}$ por $A^{\frac{1}{2}}$ es A, el momento de $A^{\frac{1}{2}}$ multiplicado por $2A^{\frac{1}{2}}$ será a (según el Caso 3); y, por tanto, el momento de $A^{\frac{1}{2}}$ será $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ o $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Y, en general, siendo $A^{\frac{m}{n}}$ igual a B, entonces A^m será igual a B^n y, por tanto, maA^{m-1} igual a nbB^{n-1}, y maA^{-1} igual a nbB^{-1}, o $nbA^{-\frac{m}{n}}$; y, por tanto, $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ es igual a b, es decir, igual al momento de $A^{\frac{m}{n}}$. Q.E.D.

CASO 6. En consecuencia, el momento de cualquier cantidad generada A^mB^n es el momento de A^m multiplicado por B^n, junto con el momento de B^n multiplicado por A^m, es decir, $maA^{m-1}B^n+nbB^{n-1}A^m$; y ello tanto si los índices m y n de las

potencias son números enteros como si son fracciones, positivas o negativas. Y el razonamiento se aplica igualmente a potencias superiores. Q.E.D.

COROLARIO I. Por ello, en cantidades continuamente proporcionales, dado un término, los momentos del resto de los términos serán como los mismos términos multiplicados por el número de intervalos entre ellos y el término dado. Supóngase que A, B, C, D, E, F, son continuamente proporcionales; entonces, dado el término C, los momentos de los restantes términos serán entre sí mismos como $-2A$, $-B$, D, 2E, 3F.

COROLARIO II. Y si en cuatro proporcionales se han dado los dos medios, los momentos de los extremos serán como dichos extremos. Lo mismo debe afirmarse respecto a los lados de cualquier rectángulo dado.

COROLARIO III. Y, dada la suma o diferencia entre los cuadrados, el momento de los lados será inversamente proporcional a los lados.

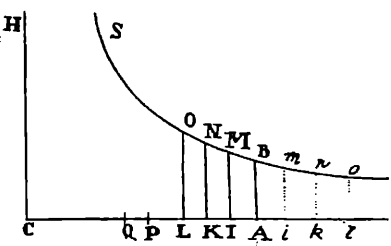
ESCOLIO

En una carta que escribí a Mr. *J. Collins* con fecha 10 de diciembre de 1672, tras describir un método de tangentes, que sospechaba era el mismo que el de *Sluse*, por aquel entonces aún no publicado, añadí estas palabras: *Hay un detalle, o más bien un Corolario de un método general, que se extiende por sí mismo, sin complicados cálculos, no sólo al trazado de tangentes a cualquier línea curva, ya sea geométrica o mecánica o en cualquier forma referida a líneas rectas u otras curvas, sino también a la resolución de problemas más abstrusos sobre la torsión, áreas, longitudes, centros de gravedad de curvas, etc.; y no está limitado (como el método* de maximis et minimis *de* Hudden) *a ecuaciones libres de cantidades variables. He combinado dicho método con el de trabajar con ecuaciones reduciéndolas a series infinitas.* Hasta aquí la mencionada carta. Y estas últimas palabras están en relación con un tratado que escribí sobre este tema en el año de 1671. El fundamento de dicho método general está contenido en el Lema precedente.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA VI

Si en un medio uniforme un cuerpo sobre el que actúa uniformemente la fuerza de la gravedad asciende o desciende en línea recta y la totalidad del espacio descrito es dividido en partes iguales, y, al comienzo de cada una de las partes (añadiendo o substrayendo la fuerza de resistencia del medio a la fuerza de la gravedad cuando el cuerpo asciende o desciende), se derivan las fuerzas absolutas, afirmo que dichas fuerzas absolutas están en progresión geométrica.

Represéntese la fuerza de la gravedad mediante la línea dada AC, la fuerza de la resistencia mediante la línea indefinida AK, la fuerza absoluta en el descenso del cuerpo mediante la diferencia KC, la velocidad del cuerpo mediante una línea AP, que será una media proporcional de AK y AC y, por tanto, como la raíz cuadrada de la resistencia, el incremento de la resistencia producido en un intervalo de tiempo dado mediante la línea corta KL y el incremento contemporáneo de la velocidad por la línea corta PQ y, con el centro C y las asíntotas rectangulares CA. CH, descríbase cualquier hipérbola BNS que encuentre las perpendiculares alzadas AB, KN, LQ en B, N y O. Como AK es como AP^2, el momento KL de cualquiera de ellas será como el momento $2AP \times PQ$ de la otra, es decir, como $AP \times KC$, porque el incremento PQ de la velocidad es (según la Ley II) proporcional a la fuerza generadora KC. Multiplíquese la razón de KL por la razón KN, y el rectángulo $KL \times KN$ será como $AP \times KC \times KN$, es decir (puesto que el rectángulo $KC \times KN$ está dado) como AP. Pero la razón última del área hiperbólica KNOL al rectángulo $KL \times KN$ se convierte, al coincidir los puntos K y L, en la razón de igualdad. En consecuencia, ese área hiperbólica evanescente es como AP. Por tanto, la totalidad del área hiperbólica ABOL está compuesta por intervalos KNOL que son siempre proporcionales a la velocidad AP y es por tanto proporcional al espacio descrito con dicha velocidad. Divídase ahora este área en partes iguales, como ABMI, IMNK, KNOL, etc., y las fuerzas absolutas AC, IC, KC, LC, etc., estarán en



progresión geométrica. Q.E.D. Y, por el mismo razonamiento, al ascender el cuerpo, tomando, en el lado contrario al punto A, las áreas iguales ABm*i*, *imnk*, *knol*, etc., se verá que las fuerzas absolutas AC, *i*C, *k*C, *l*C, etc., son continuamente proporcionales. Por tanto, si todos los espacios en el ascenso y el descenso se toman igualmente, todas las fuerzas absolutas *l*C, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC, etc., serán continuamente proporcionales. Q.E.D.

COROLARIO I. Por tanto, si el espacio descrito es representado por el área hiperbólica ABNK, la fuerza de la gravedad, la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio pueden representarse, respectivamente, mediante las líneas AC, AP y AK; y a la inversa.

COROLARIO II. Y la mayor velocidad que el cuerpo puede adquirir en descenso infinito será representada mediante la línea AC.

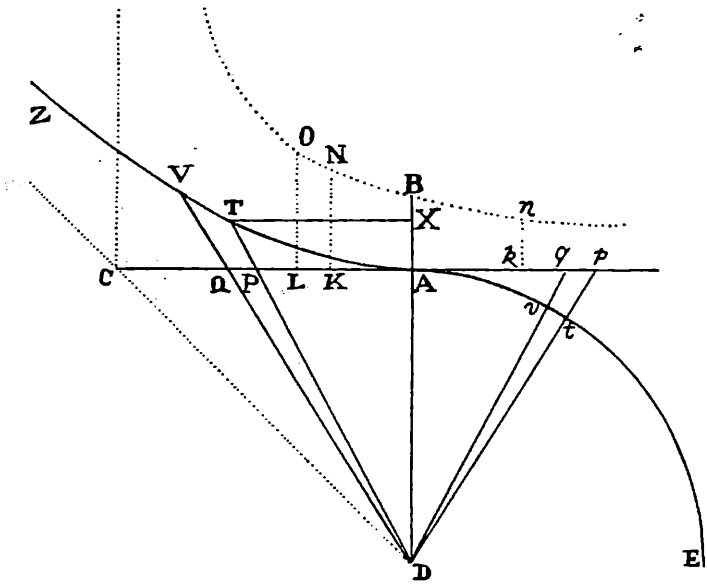
COROLARIO III. En consecuencia, si la resistencia con la que el medio responde a cualquier velocidad dada es conocida, la mayor velocidad se encontrará tomándola a dicha velocidad dada como la raíz cuadrada de la relación entre la fuerza de la gravedad y la resistencia conocida del medio.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA VII

Suponiendo lo más arriba demostrado, afirmo que si las tangentes de los ángulos del sector de un círculo y de una hipérbola se toman proporcionalmente a las velocidades, teniendo el radio una longitud adecuada, todo el tiempo de ascenso hasta el punto más alto será como el sector del círculo, y todo el tiempo de descenso desde el punto más alto como el sector de la hipérbola.

Trácese AD perpendicularmente a la línea AC, que expresa la fuerza de la gravedad. Desde el centro D descríbase también con el semidiámetro AD el cuadrante A*t*E de un círculo, así como la hipérbola rectangular AVZ, cuyo eje es AK, el vértice principal A y la asíntota DC. Trácense D*p*, DP, y el sector circular A*t*D será como todo el tiempo de ascenso al punto más alto, y el sector hiperbólico ATD como todo el tiempo de descenso desde el punto más alto, de forma que las tangentes A*p*, AP de dichos sectores será como las velocidades.

CASO 1. Trácese D*vq* cortando los momentos o intervalos ínimos *t*D*v* y *q*D*p*, descritos al mismo tiempo, del sector AD*t* y ;l triángulo AD*p*. Dado que dichos intervalos (debido al

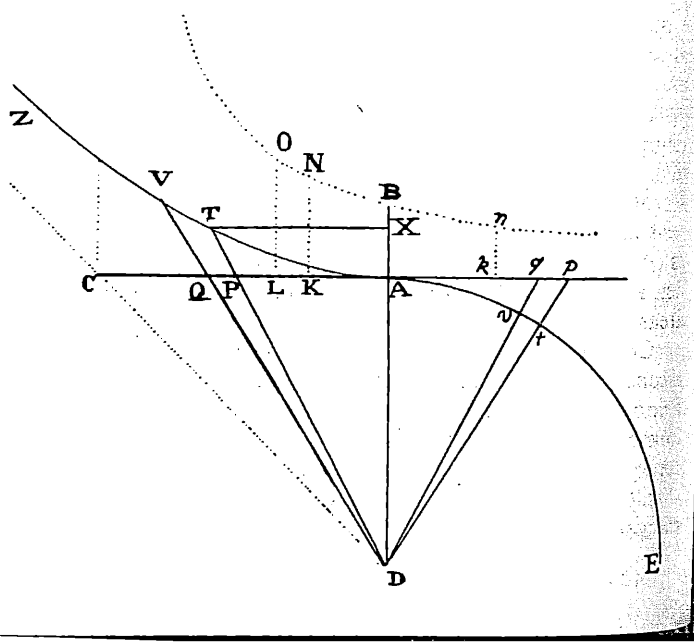


ngulos común D) son como el cuadrado de los lados, el ntervalo *t*D*v* será como $\frac{q\mathrm{D}p \times t\mathrm{D}^2}{p\mathrm{D}^2}$, es decir (porque *t*D está lado), como $\frac{q\mathrm{D}p}{p\mathrm{D}^2}$. Pero $p\mathrm{D}^2$ es $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{A}p^2$, es decir, $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD} \times \mathrm{A}k$, o $\mathrm{AD} \times \mathrm{C}k$, y $q\mathrm{D}p$ es $\frac{1}{2}\mathrm{AD} \times pq$. Por tanto, *t*D*v*, el intervalo del sector, es como $\frac{pq}{\mathrm{C}k}$, es decir, directamente como el menor incremento *pq* de la velocidad e inversamente como la fuerza generadora del incremento y, en consecuencia, como el intervalo de tiempo que responde a la disminución de la velocidad. Y, por composición, la suma de todos los intervalos *t*D*v* del sector AD*t* será como la suma de los intervalos de tiempo que corresponden a cada uno de los intervalos perdidos *pq* de la velocidad decreciente A*p*, hasta que dicha velocidad, disminuyendo hasta anularse, desaparece, lo que supone que la totalidad del

sector AD*t* es como la totalidad del tiempo de ascenso hasta el punto más alto. Q.E.D.

CASO 2. Trácese DQV cortando los intervalos menores TDV y PQD del sector DAV y del triángulo DAQ, y dichos intervalos serán entre sí como DT^2 a DP^2, es decir (si TX y AP son paralelos), como DX^2 a DA^2 o TX^2 a AP^2 y, por substracción, como $DX^2 - TX^2$ a $DA^2 - AP^2$. Pero, por la naturaleza de la hipérbola, $DX^2 - TX^2$ es AD^2 y, por lo supuesto, AP^2 es $AD \times AK$. En consecuencia, los intervalos son entre sí como AD^2 a $AD^2 - AD \times AK$, es decir, como AD a $AD - AK$ o AC a CK. Y, en consecuencia, el intervalo TDV del sector es $\frac{PDQ \times AC}{CK}$ y, por tanto (porque AC y AD están dadas) como $\frac{PQ}{CK}$, es decir, directamente como el incremento de la velocidad, e inversamente como la fuerza generadora del incremento y, por tanto, como el intervalo de tiempo que corresponde al incremento. Y, por composición, la suma de los intervalos de tiempo en donde se generan todos los intervalos PQ de la velocidad AP será como la suma de los intervalos del sector ATD; es decir, la totalidad del tiempo será como la totalidad del sector. Q.E.D.

COROLARIO I. Por ello, si AB es igual a una cuarta parte de AC, el espacio que un cuerpo describirá cayendo en cualquier



tiempo será al espacio que el cuerpo podría describir moviéndose uniformemente en el mismo tiempo con su mayor velocidad AC como el área ABNK, que expresa el espacio descrito en la caída, al área ATD, que expresa el tiempo. Pues dado que

$$AC : AP = AP : AK,$$

y según el Corolario I, Lema II, de este Libro,

$$LK : PQ = 2AK : AP = 2AP : AC,$$

por lo que $LK : \frac{1}{2}PQ = AP : \frac{1}{4}AC$ o AB,

y dado que $KN : AC$ o $AD = AB : CK$,

multiplicando entre sí términos correspondientes,

$$LKNO : DPQ = AP : CK.$$

Como se ha mostrado más arriba,

$$DPQ : DTV = CK : AC.$$

De donde $LKNO : DTV = AP : AC$;

es decir, como la velocidad del cuerpo en caída a la mayor velocidad que el cuerpo puede adquirir cayendo. En consecuencia, dado que los momentos LKNO y DTV de las áreas ABNK y ATD son como las velocidades, todas las partes de dichas áreas generadas al mismo tiempo serán como los espacios descritos al mismo tiempo y, en consecuencia, la totalidad de las áreas ABNK y ADT, generadas desde el comienzo, serán como la totalidad de los espacios descritos desde el inicio del descenso. Q.E.D.

COROLARIO II. Lo mismo es igualmente cierto en cuanto al espacio descrito en el ascenso. Es decir, que todo ese espacio es al espacio descrito en el mismo tiempo con la velocidad uniforme AC como el área AB*nk* es al sector AD*t*.

COROLARIO III. La velocidad del cuerpo cayendo en el tiempo ATD es a la velocidad que adquiriría en el mismo tiempo en un espacio sin resistencia como el triángulo APD al sector hiperbólico ATD. Pues la velocidad en un medio sin resistencia sería como el tiempo ATD, y en un medio resistente es como AP, es decir, como el triángulo APD. Y estas velocidades, al iniciarse el descenso, son iguales entre sí, como lo son las áreas ATD, APD.

COROLARIO IV. Por el mismo motivo, la velocidad en el ascenso es a la velocidad con la que un cuerpo, en el mismo tiempo, perdería en un espacio sin resistencia todo su movimiento ascendente como el triángulo A*p*D al sector circular A*t*D, o como la línea recta A*p* al arco A*t*.

COROLARIO V. En consecuencia, el tiempo en que un cuerpo, cayendo en un medio resistente, adquiría la velocidad

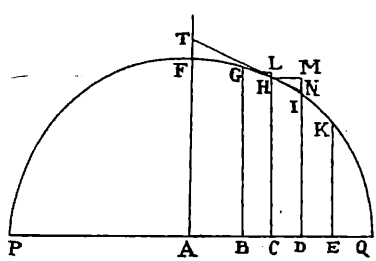
AP es al tiempo en que adquiría su mayor velocidad AC, cayendo en un espacio sin resistencia. Tomando el sector ADT o triángulo ADC. Y el tiempo en que perdería su velocidad A*p* ascendiendo en un medio resistente es al tiempo en que perdería la misma velocidad ascendiendo en un espacio sin resistencia como el arco A*t* a su tangente A*p*.

COROLARIO VI. Por tanto, del tiempo dado se desprende el espacio descrito en el ascenso o el descenso. Pues la mayor velocidad de un cuerpo descendiendo *in infinitum* está dada (por los Corolarios II y III, Teorema VI, de este Libro) y con ello se da el tiempo en que un cuerpo adquiriría dicha velocidad cayendo en un espacio sin resistencia. Tomando el sector ADT o AD*t* al triángulo ADC según la relación entre el tiempo dado y el tiempo ahora determinado se darán tanto la velocidad AP o A*p* como el área ABNK o AB*nk*, que es al sector ADT o AD*t* como el espacio buscado a aquel que, en el tiempo dado, sería uniformemente descrito con la mayor velocidad recién determinada.

COROLARIO VII. Y retrocediendo, del espacio de ascenso o descenso dados AB*nk* o ABNK se dará el tiempo AD*t* o ADT.

PROPOSICIÓN X. PROBLEMA III

Supóngase que la fuerza uniforme de la gravedad tiende directamente hacia el plano del horizonte, y que la resistencia es como el producto de la densidad del medio y el cuadrado de la velocidad: nos proponemos hallar la densidad del medio en cada punto que hará describir al cuerpo una línea curva dada, la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio en cada uno de los puntos.

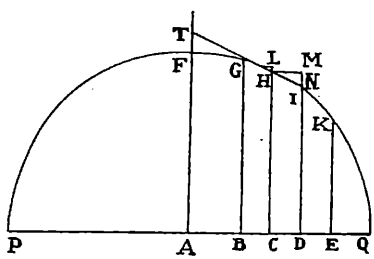


Supóngase que PQ es un plano perpendicular al plano del esquema mismo, PFHQ una línea curva que corta dicho plano en los puntos P y Q, G, H, I, K, cuatro situaciones del cuerpo que se desplaza por dicha curva de F a Q, y GB, HC, ID, KE, cuatro ordenadas paralelas que, cayendo desde

estos puntos hacia el horizonte, tocan la línea horizontal PQ en los puntos B, C, D, E, y supóngase que las distancias BC, CD, DE, de las ordenadas son iguales entre sí. Trácense desde los puntos G y H las líneas rectas GL, HN, tocando la curva en G y H y cortando las ordenadas CH, DI, prolongadas hacia arriba, en L y N; complétese el paralelogramo HCDM. Y los tiempos en que el cuerpo describe los arcos GH, HI, serán como la raíz cuadrada de las altitudes LH, NI, que los cuerpos describirían en dichos tiempos cayendo de las tangentes, y las velocidades serán directamente como las longitudes GH, HI, descritas, e inversamente como los tiempos. Represéntense los tiempos mediante T y t, y las velocidades mediante $\frac{GH}{T}$ y $\frac{HI}{t}$, y la disminución de la velocidad producida en el tiempo t será representada por $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Esta disminución deriva de la resistencia que retrasa al cuerpo y de la gravedad que lo acelera. En un cuerpo que cae describiendo en su caída el espacio NI, la gravedad produce una velocidad con la que el cuerpo podría describir dos veces dicho espacio en el mismo tiempo, como ha demostrado *Galileo*; es decir, la velocidad $\frac{2NI}{t}$. Pero si el cuerpo describe el arco HI, sólo aumenta dicho arco en la longitud HI $-$HN o $\frac{MI \times NI}{HI}$ y, en consecuencia, sólo genera la velocidad $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Añádase esta velocidad a la disminución antes mencionada y tendremos la disminución de la velocidad debida a la sola resistencia, es decir, $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. En consecuencia, dado que, en el mismo tiempo, la acción de la gravedad genera en un cuerpo que cae la velocidad $\frac{2NI}{t}$, la resistencia será a la gravedad como $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ a $\frac{2NI}{t}$ o como $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ a 2NI.

Ahora, para las abscisas CB, CD, CE, póngase $-o$, o, $2o$. Para la ordenada CH póngase P, y para MI cualquier serie

$Qo+Ro^2+So^3+$etc. Y todos los términos de la serie después del primero, es decir, Ro^2+So^3+etc., serán NI, y las ordenadas DI, EK y BG serán $P-Qo-Ro^2-So^3-$ etc., $P-2Qo-4Ro^2-8So^3-$, etc., y $P+Qo-Ro^2+So^3-$, etc., respectivamente. Y elevando al cuadrado las diferencias de las ordenadas $BG-CH$ y $CH-DI$, y añadiendo a los cuadrados los de las mismas BC y CD, se obtendrá $oo+QQoo-2QRo^3+$, etc., y $oo+QQoo+2QRo^3$, etc., los cuadrados de los arcos GH, HI, cuyas raíces $o\sqrt{(1+QQ)}-\frac{QRoo}{\sqrt{(1+QQ)}}$ y $o\sqrt{(1+QQ)}+\frac{QRoo}{\sqrt{(1+QQ)}}$ son los arcos GH y HI. Además, si de la ordenada CH se sustrae la mitad de la suma de las ordenadas BG y DI, y de la ordenada DI se sustrae la mitad de la suma de las ordenadas CH y EK, quedará Roo y $Roo+3So^3$, senos versos de los arcos GI y HK. Y éstos son proporcionales a las líneas cortas LH y NI y, en consecuencia, como los cuadrados de los tiempos infinitamente pequeños T y t, por lo que la razón $\frac{t}{T}$ varía como la raíz cuadrada de $\frac{R+3So}{R}$ o $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$. Y $\frac{t\times GH}{T}-HI+\frac{2MI\times NI}{HI}$, sustituyendo los valores de $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI y NI recién hallados, deviene $\frac{3Soo}{2R}\times\sqrt{(1+QQ)}$. Y dado que 2NI es $2Roo$, la resistencia será ahora a la gravedad como $\frac{3Soo}{R}\times\sqrt{(1+QQ)}$ a $2Roo$, es decir, como $3S\sqrt{(1+QQ)}$ a $4RR$.



Y la velocidad será tal que un cuerpo, partiendo de cualquier punto H en dirección de la tangente HN, describiría, en el vacío, una parábola cuyo diámetro es HC y cuyo *latus rectum* es $\frac{HN^2}{NI}$ o $\frac{1+QQ}{R}$.

Y la resistencia es como el producto de la densidad del

medio y el cuadrado de la velocidad, y, en consecuencia, la densidad del medio es directamente como la resistencia e inversamente como el cuadrado de la velocidad, es decir, directamente como $\frac{3S\sqrt{(1+QQ)}}{4RR}$ e inversamente como $\frac{1+QQ}{R}$, es decir, como $\frac{S}{R\sqrt{(1+QQ)}}$. Q.E.I.

COROLARIO I. Si la tangente HN es prolongada en ambas direcciones, de forma que corte cualquier ordenada AF en T, $\frac{HT}{AC}$ será igual a $\sqrt{(1+QQ)}$, por lo que en lo antes expuesto puede sustituir a $\sqrt{(1+QQ)}$. Por este medio, la resistencia será a la gravedad como $3S \times HT$ a $4RR \times AC$, la velocidad será como $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$ y la densidad del medio será como $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

COROLARIO II. Y, en consecuencia, si la línea curva PFHQ es definida por la relación entre la base o abscisa AC y la ordenada CH, como es habitual, y el valor de la ordenada es resuelto en una serie convergente, el Problema quedará expeditivamente resuelto por los primeros términos de la serie, como en los siguientes Ejemplos.

EJEMPLO 1. Supóngase que la línea PFHQ es un semicírculo descrito sobre el diámetro PQ; hallar la densidad del medio que obligará a un proyectil a moverse por esa línea.

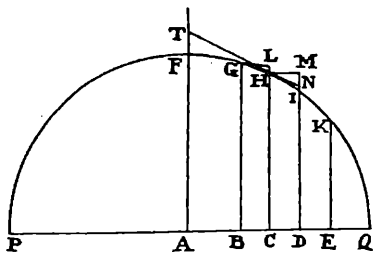
Biséctese el diámetro PQ en A y llámese n a AQ, a a AC, e a CH y o a CD; de donde DI^2 o $AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo$, o $ee - 2ao - oo$. Y, extrayendo la raíz según nuestro método, resultará

$$DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

Sustitúyase aquí $ee + aa$ por nn y DI será

$$= e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

En esta serie distingo los sucesivos términos de la siguiente forma: llamo primer término a aquel donde no se encuentra la cantidad infinitamente pequeña o, segundo, a aquel donde dicha cantidad es de una sola dimensión; tercero, a aquel donde aquélla se eleva a dos dimensiones; cuarto, a aquel donde se



eleva a tres, y así *ad infinitum*. Y el primer término, que aquí es e, expresará siempre la longitud de la ordenada CH, levantada en el punto inicial de la cantidad indefinida o. El segundo término, que aquí es $\frac{ao}{e}$, expresará la diferencia entre CH y DN, es decir, la línea corta MN cortada al completarse el paralelogramo HCDM, y, en consecuencia, siempre determina la posición de la tangente HN, en el presente caso tomando $MN:HM=\frac{ao}{e}:o=a:e$. El tercer término, que aquí es $\frac{nnoo}{2e^3}$, representará la línea corta IN, que se encuentra entre la tangente y la curva, y, en consecuencia, determina el ángulo de contacto IHN, o la curvatura que la línea curva tiene en H. Si esta línea corta IN es de magnitud finita, será expresada por el tercer término, junto con los que le siguen *in infinitum*. Pero si esta línea corta es disminuida *in infinitum*, los términos siguientes serán infinitamente menores que el tercero, por lo que pueden ignorarse. El cuarto término determina la variación de la curvatura, el quinto, la variación de la variación, etc. De donde se desprende, dicho sea de paso, la no desdeñable utilidad de estas series para la solución de problemas que dependen de las tangentes y la curvatura de curvas.

Compárese ahora la serie

$$e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annno^3}{2e^5}-\text{etc.}$$

con la serie $\quad P-Qo-Roo-So^3-\text{etc.}$

y para P, Q, R y S póngase e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ y $\frac{ann}{2e^5}$ y para $\sqrt{(1+QQ)}$ póngase $\sqrt{\left(1+\frac{aa}{ee}\right)}$ o $\frac{n}{e}$, y la densidad del medio se expresará como $\frac{a}{ne}$, es decir (puesto que n está dado), como $\frac{a}{e}$ o $\frac{AC}{CH}$, es decir, como la longitud de la tangente HT terminada en el semidiámetro AF elevado perpendicularmente en PQ. Y la

resistencia será a la gravedad como $3a$ a $2n$, es decir, como 3AC al diámetro PQ del círculo, y la velocidad será como $\sqrt{CH}$. Por tanto, si el cuerpo sale del punto F, a la velocidad debida, en la dirección de una línea paralela a PQ, y la densidad del medio en cada uno de los puntos H es como la longitud de la tangente HT, y la resistencia, también en cualquier punto H, es a la fuerza de gravedad como 3AC a PQ, el cuerpo describirá el cuadrante FHQ de un círculo. Q.E.I.

Pero si el mismo cuerpo saliera del punto P, en la dirección de una línea perpendicular a PQ, y empezara a moverse en un arco del semicírculo PFQ, debemos tomar AC o a en el lado contrario del centro A y, en consecuencia, su signo deberá cambiarse y habremos de sustituir $+a$ por $-a$. Entonces la densidad del medio resultaría ser $-\frac{a}{e}$. Pero la Naturaleza no admite una densidad negativa, es decir, una densidad que acelere el movimiento de los cuerpos, por lo que es imposible que un cuerpo, ascendiendo naturalmente de P, describa el cuadrante PF de un círculo. Para producir un efecto así, el cuerpo deberá ser acelerado por un medio impulsor y no frenado por un medio resistente.

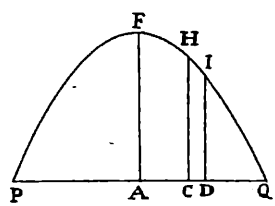
EJEMPLO 2. Supóngase que la línea PFQ es una parábola, con su eje AF perpendicular al horizonte PQ; hallar la densidad del medio que hará moverse a un proyectil por esa línea.

Por la naturaleza de la parábola, el rectángulo $-PD \times DQ$ es igual al rectángulo bajo la ordenada DI y una línea recta dada. Si llamamos a dicha recta b, a PC, a, a PQ, c a CH, e y a CD, o, el rectángulo

$$(a+o)\ (c-a-o)=ac-aa-2ao+co-oo=b \times DI;$$

en consecuencia,

$$DI=\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b} \times o-\frac{oo}{b}.$$



Ahora el segundo término de esta serie, $\frac{c-2a}{b} \times o$, debe ponerse en lugar de Qo, y el tercer término, $\frac{oo}{b}$, en vez de Roo. Dado que no hay más términos, el coeficiente S del cuarto término desaparecerá y,

en consecuencia, la cantidad $\frac{S}{R\sqrt{(1+QQ)}}$, a la que es proporcional la densidad del medio, será nula. Por tanto, cuando el medio carece de densidad, el proyectil se moverá describiendo una parábola, como *Galileo* ya ha démostrado. Q.E.I.

EJEMPLO 3. Supóngase que la línea AGK es una hipérbola, con su asíntota NX perpendicular al plano horizontal AK; hallar la densidad del medio que obligará a un proyectil a moverse por esa línea.

Supóngase que MX es la otra asíntota, que corta la ordenada DG prolongada en V, y por la naturaleza de la hipérbola estará dado el rectángulo de XV por VG. También estará dada la razón de DN a VX, y por ello el rectángulo de DN por VG. Llamémosle *bb* y, completando el paralelogramo DNXZ, llamemos *a* a BN, *o* a BD, *c* a NX y supongamos que la razón dada de VZ a ZX o DN es $\frac{m}{n}$. Entonces DN será igual a $a-o$, VG igual a $\frac{bb}{a-o}$, VZ igual a $\frac{m}{n}\times(a-o)$ y GD o NX − VZ − VG igual a

$$c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}.$$

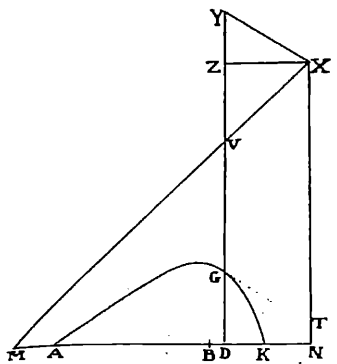
El término $\frac{bb}{a-o}$ se resuelve en la serie convergente

$$\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3, \text{ etc.;}$$

y GD será entonces igual a

$$c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3, \text{ etc.}$$

El segundo término $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ de esta serie debe utilizarse en lugar de Q*o*; el tercero $\frac{bb}{a^3}o^2$ como signo que sustituye a Ro^2, y el cuarto $\frac{bb}{a^4}o^3$ como signo en lugar de So^3, y sus coeficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ y $\frac{bb}{a^4}$ deben ponerse en lugar de Q, R y S en la primera regla. Hecho esto, la densidad del medio será



$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$$

o

$$\frac{1}{\sqrt{\left(aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}\right)}},$$

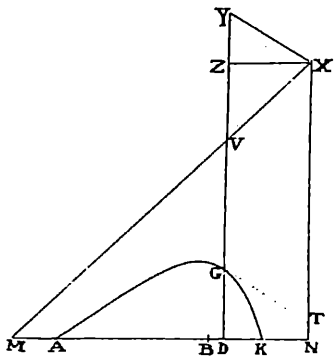
es decir, si en VZ se toma VY igual que VG, como $\frac{1}{XY}$. Pues

$$aa \text{ y } \frac{m^2}{n^2}a^2-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$$

son los cuadrados de XZ y ZY. Pero se desprende que la razón de la resistencia a la gravedad es la de 3XY a 2YG, y la velocidad es aquella a la que el cuerpo describiría una parábola cuyo vértice es G, diámetro DG, *latus rectum* $\frac{XY^2}{VG}$. Supóngase, por tanto, que las densidades del medio en cada uno de los puntos G son inversamente proporcionales a las distancias XY, y que la resistencia en cualquier punto G es a la gravedad como 3XY a 2YG, y un cuerpo proyectado desde el punto A con la velocidad debida describirá la hipérbola AGK. Q.E.I.

EJEMPLO 4. Supóngase, indefinidamente, que la línea AGK es una hipérbola descrita con el centro X y las asíntotas MX, NX, de forma que, habiendo construido el rectángulo XZDN, cuyo lado ZD corta la hipérbola en G y su asíntota en V, VG pueda ser inversamente proporcional a cualquier potencia DN^n de la línea ZX o DN, cuyo índice es el número *n;* hallar la densidad del medio en el que un cuerpo proyectado describirá dicha curva.

En lugar de BN, BD, NX, póngase respectivamente A, O, C, y supóngase que VZ es a XZ o DN como *d* a *e*, y VG igual a $\frac{bb}{DN^n}$; entonces DN será igual a A − O, $VG=\frac{bb}{(A-O)^n}$, $VZ=\frac{d}{e}(A-O)$ y



GD o NX − VZ − VG igual a

$$C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{(A-O)^n}.$$

El término $\frac{bb}{(A-O)^n}$ se resuelve en una serie infinita

$$\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}\times O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}\times bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}\times bbO^3, \text{ etc.}$$

y GD será igual a

$$C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 - \frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3, \text{ etc.}$$

El segundo término $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ de esta serie debe utilizarse en lugar de Q*o*, el tercero $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ en lugar de R*oo*, el cuarto

$$\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$$

en lugar de So^3. Y, en consecuencia, la densidad del medio

$$\frac{S}{R\sqrt{(1+QQ)}},$$

en cualquier punto G, será

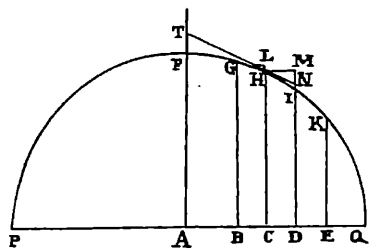
$$\frac{n+2}{3\sqrt{\left(A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}\right)}}$$

y, por tanto, si en VZ se toma VY como igual a $\frac{n}{2}\times VG$, la densidad es inversamente proporcional a XY. Pues A^2 y $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ son los cuadrados de XZ y ZY. Pero la resistencia en el mismo punto G es a la fuerza de gravedad como $3S\times\frac{XY}{A}$ a 4RR, es decir, como XY a $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Y la

velocidad es allí la misma con que el cuerpo proyectado se movería en una parábola cuyo vértice es G, diámetro GD y *latus rectum*

$$\frac{1+QQ}{R} \text{ o } \frac{2XY^2}{(nn+n)\times VG}. \text{ Q.E.I.}$$

ESCOLIO

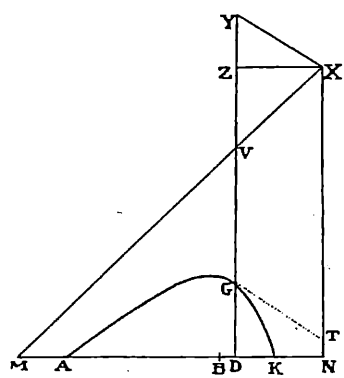


En la misma forma que la densidad del medio resulta ser como $\frac{S\times AC}{R\times HT}$ en el COROLARIO I, si la resistencia es puesta como cualquier potencia V^n de la velocidad V, la densidad del medio resultará ser

$$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}\times\left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$$

Y, por tanto, si puede encontrarse una curva donde puedan darse las razones de $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ a $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$, o de $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ a $(1+QQ)^{n-1}$, el cuerpo, en un medio uniforme cuya resistencia es como la potencia V^n de la velocidad V, se moverá a lo largo de dicha curva. Pero volvamos a curvas más simples.

Dado que no puede haber movimiento en parábola más que en un medio no resistente, pero que en las hipérbolas aquí descritas es producido por una resistencia continua, es evidente que la línea que un proyectil describe en un medio uniformemente resistente se acerca más a estas hipérbolas que a una parábola. La línea es ciertamente de índole hiperbólica, pero en las cercanías del vértice se encuentra más distante de las asíntotas y en los puntos alejados del



vértice se acerca más a ellas que las hipérbolas aquí descritas. La diferencia entre una y otra, sin embargo, no es tan grande que no permita en la práctica utilizar con suficiente comodidad las últimas en vez de la primera. Y quizá aquéllas prueben ser más útiles que una hipérbola más exacta pero al mismo tiempo más compleja. Para ello pueden utilizarse de la siguiente forma.

Complétese el paralelogramo XYGT, y la línea recta GT tocará la hipérbola en G; en consecuencia, la densidad del medio en G es inversamente proporcional a la tangente GT, y la velocidad es allí como $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, y la resistencia es a la fuerza de gravedad como GT es a $\frac{2nn+2n}{n+2} \times GV$.

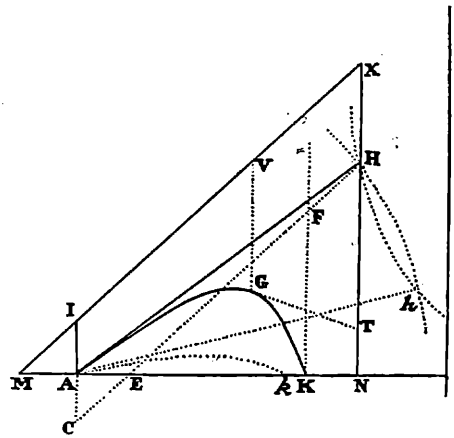
Por tanto, si un cuerpo proyectado desde el punto A, en dirección de la línea recta AH, describe la hipérbola AGK, y AH prolongada toca la asíntota NX en H, y AI, trazada paralela a ella, toca la otra asíntota MX en I, la densidad del medio en A será inversamente proporcional a AH, y la velocidad del cuerpo como $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, y la resistencia en el mismo punto a la fuerza de gravedad como AH a $\frac{2nn+2n}{n+2} \times AI$. De donde se deducen las siguientes reglas.

REGLA 1. Si la densidad del medio en A y la velocidad con que el cuerpo es proyectado permanecen iguales y el ángulo NAH se modifica, las longitudes AH, AI, HX, permanecerán iguales. En consecuencia, siempre que se hallen dichas longitudes, después será fácil determinar la hipérbola a partir de cualquier ángulo NAH dado.

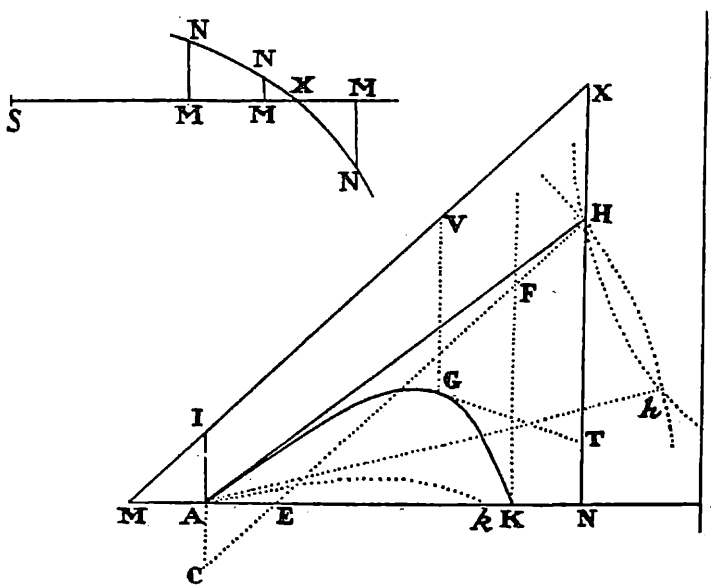
REGLA 2. Si el ángulo NAH y la densidad del medio en A permanecen iguales y se cambia la velocidad a la que el cuerpo es proyectado, la longitud AH no variará, y AI cambiará en proporción inversa al cuadrado de la velocidad.

REGLA 3. Si el ángulo NAH, la velocidad del cuerpo en A y la gravedad acelerativa permanecen iguales, y la proporción de la resistencia en A a la gravedad motriz es aumentada en cualquier razón, la proporción de AH a AI aumentará en la misma razón, mientras que el *latus rectum* de la parábola arriba mencionada, así como la longitud $\frac{AH^2}{AI}$ proporcional a él, permanecerán iguales y,

en consecuencia, AH disminuirá en la misma razón y AI disminuirá como el cuadrado de dicha razón. Pero la proporción de la resistencia al peso aumenta tanto si disminuye la gravedad específica, a igual magnitud, como si aumenta la densidad del medio, e igualmente cuando, disminuyendo la magnitud, la resistencia disminuye en razón menor que el peso.



REGLA 4. Como la densidad del medio es mayor cerca del vértice de la hipérbola que en el punto A, para conservar una densidad media debe hallarse la razón de la menor de las

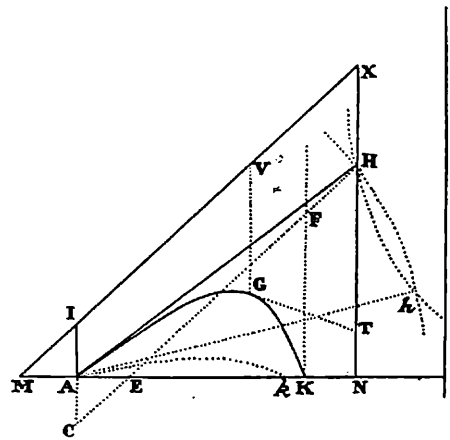


tangentes GT a la tangente AH, así como aumentarse la densidad en A en razón algo mayor que la de la mitad de la suma de dichas tangentes a la menor de las tangentes GT.

REGLA 5. Dadas las longitudes AH, AI, para describir la figura AGK prolónguese HN hasta X, para que HX sea a AI como $n+1$ a 1 y, con el centro X y las asíntotas MX, NX, descríbase una hipérbola a través del punto A de forma que AI pueda ser a cualquiera de las líneas VG como XV^n a XI^n.

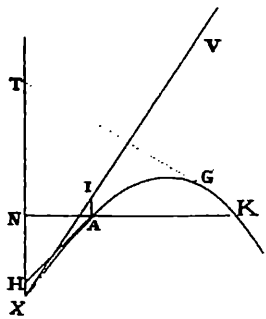
REGLA 6. Cuanto mayor sea el número *n*, más exactas serán estas hipérbolas en la ascensión del cuerpo desde A, y menos exactas en su descenso a K, y viceversa. La hipérbola cónica mantiene una razón media entre aquéllas y es más simple que las demás. Por tanto, si la hipérbola es de esta índole y debe hallarse el punto K, donde el cuerpo proyectado cae sobre cualquier línea recta AN que pase a través del punto A, supóngase que AN, prolongada, toca las asíntotas MX, NX en M y N, y hágase NK igual a AM.

REGLA 7. Y de ello se deriva un método expeditivo para determinar esta hipótesis a partir de los fenómenos. Supongamos que dos cuerpos similares e iguales son proyectados con la misma velocidad en diferentes ángulos HAK, *h*A*k*, y supongamos que caen sobre el plano del horizontal en K y *k*, tomando nota de la proporción de AK a A*k*. Que ella sea como *d* a *e*. Después, levantando una perpendicular AI de cualquier longitud, asúmase cualquier longitud AH o A*h* y determínense de ahí, gráficamente o mediante escala y compás, las longitudes AK, A*k* (según la regla 6). Si la razón de AK a A*k* es la misma que la de *d* a *e*, la longitud de AH ha sido asumida correctamente. Si no es así, llévese la longitud SM, igual a la AH asumida, sobre la línea recta indefinida SM, y levántese una perpendicular MN igual a la diferencia $\frac{\text{AK}}{\text{A}k} - \frac{d}{e}$ de las razones multiplicada por cualquier línea recta dada. Siguiendo el mismo método, a partir de varias longitudes asumidas AH pueden encontrarse varios puntos N; trácese a través de todos ellos una curva regular NNXN, cortando la línea recta SMMM en X. Finalmente, asúmase que AH es igual a la abscisa SX, determínese con ello de nuevo la longitud AK, y las longitudes que son a la longitud asumida AI y a la final AH como la longitud AK, conocida por experimento, a la longitud AK finalmente hallada, serán las verdaderas longitudes AI y AH, que debían hallarse.



Pero dadas éstas estará también dada la fuerza de resistencia del medio en el punto A, que será a la fuerza de gravedad como AH a $\frac{4}{3}$AI. Increméntese, según la regla 4, la densidad del medio, y si la fuerza de resistencia recién hallada aumenta en la misma razón, será aún más exacta.

REGLA 8. Halladas las longitudes AH, HX, requiérase ahora la posición de la línea AH, según la cual un proyectil lanzado con esa velocidad dada caerá en cualquier punto K. Trácense desde los puntos A y K las líneas AC, KF, perpendiculares al horizonte, la primera hacia abajo e igual a AI o $\frac{1}{2}$HX. Descríbase, con las asíntotas AK, KF, una hipérbola cuya conjugada pase a través del punto C y descríbase desde el centro A, con el intervalo AH, un círculo que corte dicha hipérbola en el punto H; entonces el proyectil lanzado en la dirección de la línea recta AH caerá en el punto K. Q.E.I. Pues el punto H, debido a la longitud dada AH, debe encontrarse en alguna parte de la circunferencia del círculo descrito. Trácese CH tocando AK y KF en E y F y, dado que CH y MX son paralelas, y AC y AI iguales, AE será igual a AM y, por tanto, también igual a KN. Pero CE es a AE como FH a KN y, en consecuencia, CE y FH son iguales. Por tanto, el punto H cae en la curva hiperbólica descrita con las asíntotas AK, KF, cuya conjugada pasa por el punto C, y se encuentra, en consecuencia, en la intersección común de esta curva hiperbólica y la circunferencia del círculo descrito. Q.E.D. Debe observarse que esta operación es la misma tanto si la línea recta AKN es paralela al horizonte como si está inclinada en cualquier ángulo hacia él, y que de las dos intersecciones H, *h* derivan dos ángulos NAH, NA*h*, y que en práctica mecánica es suficiente describir un sólo círculo y después aplicar una regla CH, de longitud indeterminada, al punto C de forma que su parte FH, interceptada entre el círculo y la línea recta FK, pueda ser igual a su parte CE situada entre el punto C y la línea recta AK.



Lo dicho acerca de las hipérbolas puede aplicarse fácilmente a las parábolas. En efecto, si una parábola es representada por XAGK, tocada por una línea recta XV en el vértice X, y las ordenadas IA, VG son como cualquier potencia XI^n, XV^n, de las abscisas XI, XV, trácense XT, GT, AH, haciendo que XT sea paralela a VG y que GT, AH, toquen la parábola en G y A, y un cuerpo proyectado desde cualquier punto A, en la dirección de la línea recta AH, con la velocidad adecuada, describirá esta parábola siempre que la densidad del medio en cualquiera de los puntos G sea inversamente proporcional a la tangente GT. En este caso, la velocidad en G será la misma que obligaría a un cuerpo que se mueva en un espacio no resistente a describir una parábola cónica, con G como vértice, VG prolongada hacia abajo como diámetro y $\frac{2GT^2}{(nn-n)\times VG}$ como *latus rectum*. Y la fuerza resistente en G será a la fuerza de gravedad como GT a $\frac{2nn-2n}{n-2}$ VG. En consecuencia, si NAK representa una línea horizontal y tanto la densidad del medio en A como la velocidad a la que el cuerpo es proyectado permanecen iguales, aunque se altere el ángulo NAH, las longitudes AH, AI, HX, permanecerán iguales, y con ello estará dado el vértice X de la parábola y la posición de la línea recta XI. Y, llevando VG a IA como XV^n a XI^n, estarán dados todos los puntos G de la parábola por los que el proyectil pasará.

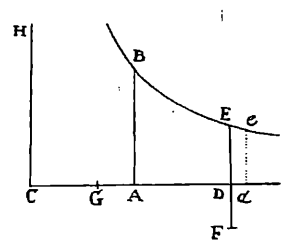
SECCION III

Sobre el movimiento de los cuerpos que son resistidos en parte en razón de las velocidades y en parte como el cuadrado de la misma razón.

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA VIII

Si un cuerpo es resistido en parte en razón de su velocidad y en parte como el cuadrado de esta misma razón, y se mueve en un medio análogo únicamente por su fuerza innata, y los tiempos son tomados en progresión aritmética, entonces las cantidades inversamente proporcionales a las velocidades, incrementadas en una cierta cantidad dada, estarán en progresión geométrica.

Con centro C y asíntotas rectangulares CAD*d* y CH, descríbase una hipérbola BE*e* y supónganse AB, DE, *de* paralelas a la asíntota CH. Sean A, G, puntos dados en la asíntota CD; si el tiempo es representado por el área hiperbólica ABED en crecimiento uniforme, afirmo que la velocidad puede expresarse por medio de la longitud DF, cuya inversa GD, junto con la línea dada CG, compone la longitud CD, que crece en progresión geométrica.



Pues supóngase que la pequeña área DE*ed* es el mínimo incremento dado del tiempo, y D*d* será inversamente proporcional a DE y, en consecuencia, directamente proporcional a CD. En consecuencia, el decremento de $\frac{1}{GD}$, que (según el Lema II, Libro II) es $\frac{D\,d}{GD^2}$, será también

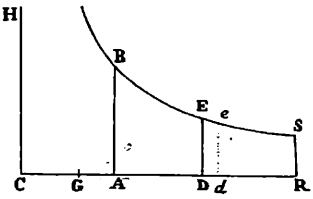
como $\frac{CD}{GD^2}$ o $\frac{CG+GD}{GD^2}$, es decir, como $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GD^2}$. En consecuencia, al crecer uniformemente el tiempo ABED por la adición de los intervalos dados ED*de*, se sigue que $\frac{1}{GD}$ decrece en la misma razón que la velocidad. Pues el decremento de la velocidad es como la resistencia, es decir (por la suposición), como la suma de dos cantidades, de las que una es como la velocidad y la otra como el cuadrado de la velocidad; y el decremento de $\frac{1}{GD}$ es como la suma de las cantidades $\frac{1}{GD}$ y $\frac{CG}{GD^2}$, donde la primera es la misma $\frac{1}{GD}$ y la última $\frac{CG}{GD^2}$ es como $\frac{1}{GD^2}$: en consecuencia, siendo análogos los decrementos de ambas, $\frac{1}{GD}$ es como la velocidad. Y si la cantidad GD inversamente proporcional a $\frac{1}{GD}$ es aumentada por la cantidad dada CG, la suma CD, al crecer uniformemente el tiempo ABED, crecerá en progresión geométrica. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, si, dados los puntos A y G, el tiempo es representado por el área hiperbólica ABED, la velocidad puede ser representada por $\frac{1}{GD}$, inversa de GD.

COROLARIO II. Y tomando GA a GD como la inversa de la velocidad al comienzo a la inversa de la velocidad al final de cualquier tiempo ABED, se determinará el punto G. Y, encontrado dicho punto, podrá determinarse la velocidad para cualquier otro tiempo dado.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA IX

Supuestas las mismas cosas, afirmo que si los espacios descritos se toman en progresión aritmética, las velocidades, aumentadas en una cierta cantidad dada, estarán en progresión geométrica.



Supóngase dado el punto R en la asíntota CD y, levantando la perpendicular RS que encuentra la hipérbola en S, represéntese el espacio descrito por el área hiperbólica RSED; y la velocidad será como la longitud GD, que, junto con la línea dada CG, compone una longitud CD que decrece en progresión geométrica cuando el espacio RSED aumenta en progresión aritmética.

Pues, debido a que el incremento ED*de* del espacio está dado, la breve línea D*d*, que es el decremento de GD, será inversamente proporcional a ED y, en consecuencia, directamente proporcional a CD; es decir, como la suma de la misma GD y la longitud dada CG. Pero el decremento de la velocidad, en un tiempo inversamente proporcional a ella en el que se describe el intervalo dado de espacio D*de*E, es como la resistencia y el tiempo juntamente, es decir, directamente proporcional a la suma de dos cantidades, de las que una es como la velocidad y la otra como el cuadrado de la velocidad, e inversamente proporcional a la velocidad; y, en consecuencia, directamente proporcional a la suma de dos cantidades, una de las cuales está dada y la otra es como la velocidad. En consecuencia, el decremento tanto de la velocidad como de la línea GD es como una cantidad dada y una cantidad decreciente juntamente; y, dado que los decrementos son análogos, las cantidades decrecientes serán siempre análogas; me refiero a la velocidad y a la línea GD. Q.E.D.

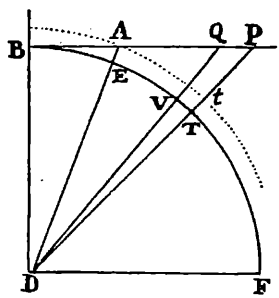
COROLARIO I. Si se representa la velocidad por la longitud GD, el espacio descrito será como el área hiperbólica DESR.

COROLARIO II. Y, suponiendo en cualquier parte el punto R, se encontrará el punto G tomando GR a GD como la velocidad al comienzo a la velocidad tras describir cierto espacio RSED. Dado el punto G, el espacio está dado para la velocidad dada, y a la inversa.

COROLARIO III. Por tanto, puesto que (por la Proposición XI) la velocidad está dada para un tiempo dado, y (por esta Proposición) el espacio está dado para una velocidad dada, el espacio estará dado para un tiempo dado, y a la inversa.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA X

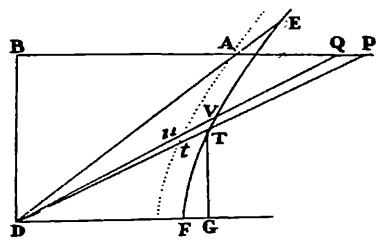
Suponiendo que un cuerpo atraído hacia abajo por una gravedad uniforme asciende o desciende por una línea recta, y que dicho cuerpo es resistido en parte en razón de su velocidad y en parte como el cuadrado de la misma razón, afirmo que si se trazan líneas rectas paralelas a los diámetros de un círculo y una hipérbola por los extremos de los diámetros conjugados, y si las velocidades son como algunos segmentos de dichas paralelas trazados desde un punto dado, los tiempos serán como los sectores de las áreas cortadas por líneas rectas trazadas desde el centro a los extremos de los segmentos; y a la inversa.



CASO 1. Supóngase en primer lugar que el cuerpo está ascendiendo, y desde el centro D, con cualquier semidiámetro DB, descríbase un cuadrante BETF de un círculo, trazando por el extremo B del semidiámetro DB la línea indefinida BAP, paralela al semidiámetro DF. Supóngase en dicha línea dado el punto A y tómese el segmento AP proporcional a la velocidad. Y puesto que una parte de la resistencia es como la velocidad y otra parte como el cuadrado de la velocidad, sea la resistencia total como $AP^2 + 2BA \times AP$. Unanse DA y DP, cortando el círculo en E y T, represéntese la gravedad mediante DA^2, de forma que la gravedad sea a la resistencia en P como DA^2 a $AP^2 + 2BA \times AP$, y el tiempo total de ascenso será como el sector EDT del círculo.

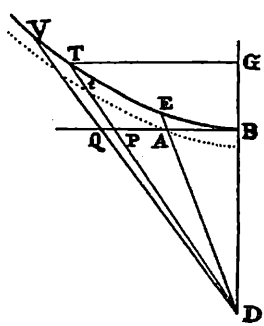
Pues trácese DVQ, cortando el momento PQ de la velocidad AP y el momento DTV del sector DET que responde a un momento dado de tiempo, y dicho decremento PQ de la velocidad será como la suma de las fuerzas de la gravedad DA^2 y la resistencia $AP^2 + 2BA \times AP$; es decir (por la Proposición XII, Libro II, *Elem.* de *Euclides*), como DP^2. Entonces el área DPQ, proporcional a PQ, es como DP^2, y el área DTV, que es al área DPQ como DT^2 a DP^2, es como la cantidad dada DT^2. En consecuencia, el área EDT decrece uniformemente según la razón del tiempo futuro, por sustracción de intervalos dados DTV, por lo que es proporcional al tiempo total de ascenso. Q.E.D.

CASO 2. Si la velocidad de ascenso del cuerpo es representada, como anteriormente, por la longitud AP, y la resistencia por $AP^2 + 2BA \times AP$, y si la fuerza de la gravedad es menor que la que puede expresarse con DA^2, tómese BD de la mencionada longitud de forma que $AB^2 - BD^2$ pueda ser proporcional a la gravedad, supóngase que DF es perpendicular e igual a DB, descríbase por el vértice F la hipérbola FTVE, cuyos semidiámetros conjugados son DB y DF, y que corta a DA en E y a DP, DQ en T y V, y el tiempo total de ascenso será como el sector hiperbólico TDE.



Pues el decremento PQ de la velocidad producido en un intervalo de tiempo dado es como la suma de la resistencia $AP^2 + 2BA \times AP$ y de la gravedad $AB^2 - BD^2$, es decir, como $BP^2 - BD^2$. Pero el área DTV es al área DPQ como DT^2 a DP^2 y, en consecuencia, si se traza GT perpendicularmente a DF, como GT^2 o $GD^2 - DF^2$ a BD^2, y como GD^2 a BP^2, y, por sustracción, como DF^2 a $BP^2 - BD^2$. En consecuencia, dado que el área DPQ es como PQ, es decir, como $BP^2 - BD^2$, el área DTV será como la cantidad dada DF^2. En consecuencia, el área EDT decrece uniformemente en cada uno de los intervalos iguales de tiempo, por la sustracción del mismo número de intervalos DTV, y es, por tanto, proporcional al tiempo. Q.E.D.

CASO 3. Supóngase que AP es la velocidad de descenso del cuerpo, $AP^2 + 2BA \times AP$ la fuerza de la resistencia, y $BD^2 - AB^2$ la fuerza de la gravedad, siendo recto el ángulo DBA. Y si, con el centro D y el vértice principal B, se describe una hipérbola rectangular BETV que corte a DA, DP y DQ prolongadas en E, T y V, el sector DET de esta hipérbola será como el tiempo total de descenso.



Pues el incremento PQ de la velocidad y el área DPQ proporcional al mismo es como el exceso de la gravedad sobre la resistencia, es decir, como

$$BD^2 - AB^2 - 2BA \times AP - AP^2$$

o $BD^2 - BP^2$. Y el área DTV es al área DPQ como DT^2 a DP^2, y, en consecuencia, como GT^2 o $GD^2 - BD^2$ a BP^2; y como GD^2 a BD^2, y, por sustracción, como BD^2 a $BD^2 - BP^2$. En consecuencia, como el área DPQ es como $BD^2 - BP^2$, el área DTV será como la cantidad dada BD^2. En consecuencia, el área EDT aumenta uniformemente en los diversos intervalos iguales de tiempo mediante la adición de otros tantos intervalos dados DTV, por lo que es proporcional al tiempo de descenso. Q.E.D.

COROLARIO. Si, con centro D y semidiámetro DA, se traza por el vértice A un arco A*t* semejante al arco ET, subtendiendo análogamente el ángulo ADT, la velocidad AP será a la velocidad que el cuerpo, en el tiempo EDT y en un espacio sin resistencia, puede perder en su ascenso o adquirir en su descenso, como el área del triángulo DAP al área del sector DA*t*; y, en consecuencia, se deriva del tiempo dado. Pues la velocidad en un medio no resistente es proporcional al tiempo y, en consecuencia, a dicho sector; en un medio resistente es como el triángulo; y en ambos medios, cuando es menor, se aproxima a la razón de igualdad, como hacen el sector y el triángulo.

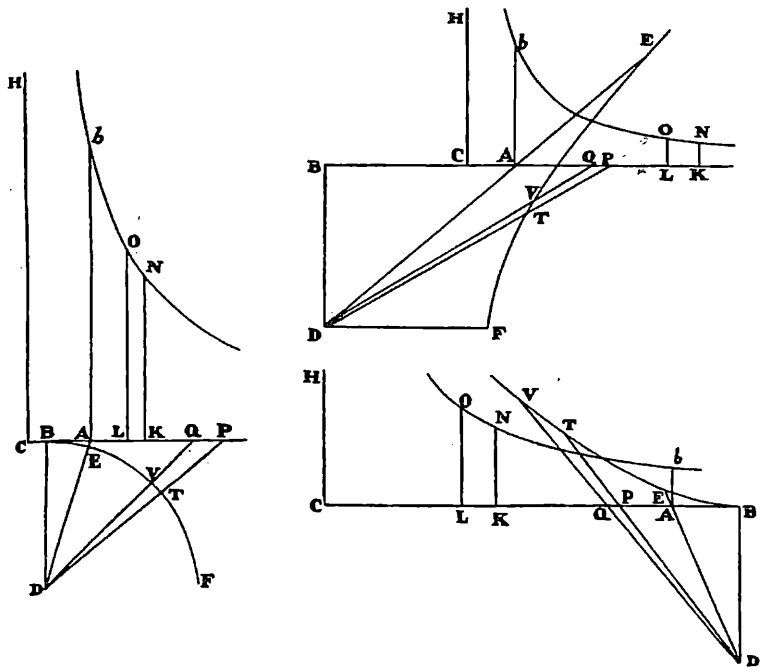
ESCOLIO

También puede demostrarse lo mismo en lo que toca al ascenso del cuerpo, cuando la fuerza de la gravedad es menor de la que puede expresarse mediante DA^2 o $AB^2 + BD^2$, y mayor de la que puede expresarse mediante $AB^2 - DB^2$, y debe expresarse mediante AB^2. Pero me apresuro a pasar a otros asuntos.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA XI

Supuestas las mismas cosas, afirmo que el espacio descrito en el ascenso o descenso es como la diferencia del área con la que se expresa el tiempo, y de algún otro área que sea aumentada o disminuida en progresión aritmética, si las fuerzas conjuntas de la resistencia y la gravedad son tomadas en progresión geométrica.

Tómese AC (en estas tres figuras) proporcional a la gravedad, y AK a la resistencia; pero tómense en el mismo lado del



punto A si el cuerpo está descendiendo y al revés en el caso contrario. Levántese A*b*, tomada a DB como DB^2 a $4BA \times CA$; descríbase la hipérbola *b*N con asíntotas rectangulares CK, CH; levantando KN perpendicularmente a CK, el área A*b*NK aumentará o disminuirá en progresión aritmética, mientras las fuerzas CK se tomen en progresión geométrica. En consecuencia, afirmo que la distancia del cuerpo a su máxima altitud es como el exceso del área A*b*NK sobre el área DET.

Pues, dado que AK es como la resistencia, es decir, como $AP^2 \times 2BA \times AP$, supóngase cualquier cantidad dada Z, sea AK igual a $\frac{AP^2 + 2BA \times AP}{Z}$, y entonces (por el Lema II de este Libro), el momento KL de AK será igual a $\frac{2PQ \times AP + 2BA \times PQ}{Z}$ o $\frac{2PQ \times BP}{Z}$, y el momento KLON del área A*b*NK será igual a $\frac{2PQ \times BP \times LO}{Z}$ o $\frac{PQ \times BP \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$

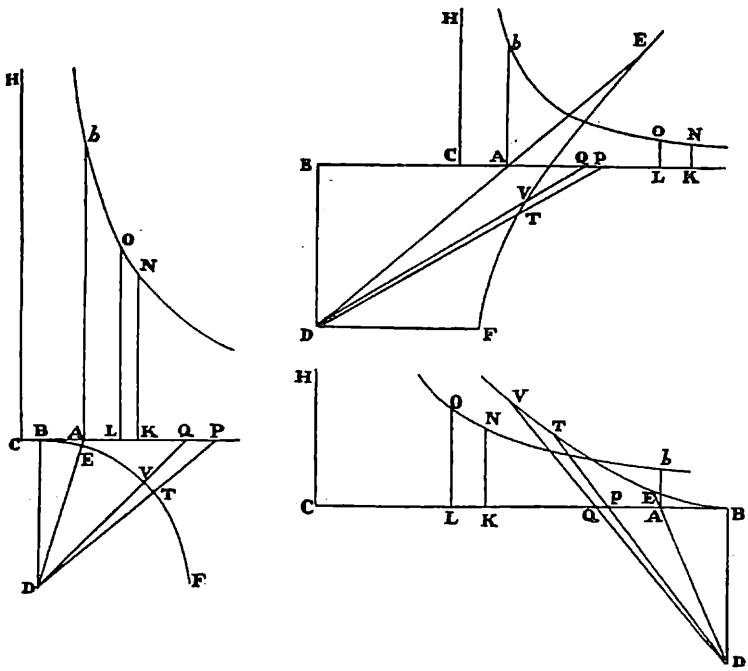
CASO 1. Ahora, si el cuerpo asciende y la gravedad es como AB^2+BD^2, siendo BET un círculo, la línea AC, que es proporcional a la gravedad, será $\frac{AB^2+BD^2}{Z}$, y DP^2 o $AP^2+2BA\times AP+AB^2+BD^2$ será $AK\times Z+AC\times Z$ o $CK\times Z$; y, en consecuencia, el área DTV será al área DPQ como DT^2 o DB^2 a $CK\times Z$.

CASO 2. Si el cuerpo asciende y la gravedad es como AB^2-BD^2, la línea AC será $\frac{AB^2-BD^2}{Z}$, y DT^2 será a DP^2 como DF^2 o DB^2 a BP^2-BD^2 o $AP^2+2BA\times AP+AB^2-BD^2$, es decir, a $AK\times Z+AC\times Z$ o $CK\times Z$. Y, en consecuencia, el área DTV será al área DPQ como DB^2 a $CK\times Z$.

CASO 3. Y, por el mismo razonamiento, si el cuerpo desciende y, en consecuencia, la gravedad es como BD^2-AB^2, y la línea AC se hace igual a $\frac{BD^2-AB^2}{Z}$, el área DTV será al área DPQ como DB^2 a $CK\times Z$, como más arriba.

Puesto que, en consecuencia, estas áreas están siempre en esta razón, si por el área DTV, con la que se expresa el momento del tiempo, siempre igual a sí mismo, se pone cualquier triángulo determinado, como $BD\times m$, el área DPQ, es decir, $\frac{1}{2}BD\times PQ$, será a $BD\times m$ como $CK\times Z$ a BD^2. Y, por tanto, $PQ\times BD^2$ será igual a $2m\times CK\times Z$, y el momento KLON del área A*b*NK, antes determinado, será $\frac{BP\times BD\times m}{AB}$. Sustráigase de este área el momento de DET, DTV o $BD\times m$, y quedará $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$. En consecuencia, la diferencia de los momentos, es decir, el momento de las diferencias de las áreas, es igual a $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$; y, en consecuencia (debido a la cantidad dada $\frac{BD\times m}{AB}$), como la velocidad AP, es decir, como el momento del espacio que el cuerpo describe en su ascenso o descenso. Y, en consecuencia, la diferencia de las áreas y dicho espacio, al aumentar o disminuir por momentos proporcionales, apareciendo o desapareciendo al mismo tiempo, son proporcionales. Q.E.D.

COROLARIO. Si la longitud que se deriva de aplicar el área DET a la línea BD es llamada M y se toma otra longitud V a la longitud M en la misma razón que la línea DA a la línea DE, el espacio que un cuerpo, en un medio resistente, describe en todo su ascenso o descenso, será al espacio que un cuerpo, cayendo desde una posición de reposo en un medio no resistente, puede



describir en el mismo tiempo, como la diferencia de las mencionadas áreas a $\frac{BD \times V^2}{AB}$; y, en consecuencia, está dado para el tiempo dado. Pues el espacio en un medio no resistente es como el cuadrado del tiempo, o como V^2; y, puesto que BD y AB están dados, como $\frac{BD \times V^2}{AB}$. Este área es igual al área $\frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, y el momento de M es *m*; y, en consecuencia, el

momento de este área es $\frac{DA^2 \times BD \times 2M \times m}{DE^2 \times AB}$. Pero este momento es al momento de la diferencia de las mencionadas áreas DET y A*b*NK, es decir, a $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, como $\frac{DA^2 \times BD \times M}{DE^2}$ a $\frac{1}{2}BD \times AP$, o como $\frac{DA^2}{DE^2}$ por DET a DAP; en consecuencia, cuando las áreas DET y DAP son mínimas, en razón de igualdad. En consecuencia, el área $\frac{BD \times V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK, cuando todas estas áreas son mínimas, tienen momentos iguales y son, en consecuencia, iguales. En consecuencia, dado que las velocidades, y con ello también los espacios descritos al mismo tiempo en ambos medios, al comienzo del descenso o el final del ascenso, se aproximan a la igualdad y son, por tanto, entre sí como el área $\frac{BD \times V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK, y dado además que el espacio, en un medio no resistente, es continuamente como $\frac{BD \times V^2}{AB}$, y en un medio resistente continuamente como la diferencia de las áreas DET y A*b*NK, se sigue necesariamente que los espacios descritos en ambos medios en cualesquiera tiempos iguales serán entre sí como ese área $\frac{BD \times V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK. Q.E.D.

ESCOLIO

La resistencia de los cuerpos esféricos en los fluidos obedece en parte a la tenacidad, en parte al rozamiento y en parte a la densidad del medio. Y la parte de la resistencia que obedece a la densidad del fluido es, como ya he dicho, como el cuadrado de la velocidad; la parte que obedece a la tenacidad del fluido es uniforme, o como el momento del tiempo; podemos, en consecuencia, pasar al movimiento de los cuerpos que son resistidos en parte por una fuerza uniforme, o en razón de los momentos del tiempo, y en parte como el cuadrado de la velocidad. Pero es

suficiente haber aclarado el camino para esta especulación en las anteriores Proposiciones VIII y IX y sus Corolarios. Pues en dichas Proposiciones puede sustituirse la resistencia uniforme a un cuerpo ascendente debida a su gravedad por la resistencia uniforme que obedece a la tenacidad del medio, cuando el cuerpo se mueve sólo por su inercia; cuando el cuerpo asciende en línea recta, añádase esta resistencia uniforme a la fuerza de la gravedad, y sustráigase la misma cuando el cuerpo desciende en línea recta. También podría pasarse al movimiento de los cuerpos que son resistidos en parte uniformemente, en parte en razón de la velocidad y en parte como el cuadrado de la misma velocidad. Y he abierto el camino para ello en las anteriores Proposiciones XIII y XIV, en las que la resistencia uniforme debida a la tenacidad del medio puede sustituir a la fuerza de la gravedad o combinarse con ella como antes. Pero me apresuro a pasar a otros asuntos.

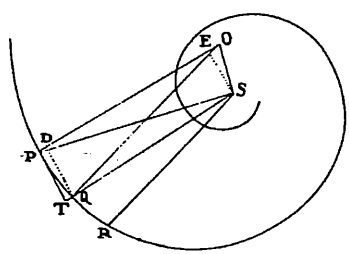
SECCION IV

El movimiento circular de los cuerpos en medios resistentes.

LEMA III

Supóngase que PQR *es una espiral que corta todos los radios* SP, SQ, SR, *etc., en ángulos iguales. Trácese la línea recta* PT *tangente a la espiral en cualquier punto* P *y cortando el radio* SQ *en* T; *trácese* PO, QO, *perpendicularmente a la espiral y encontrándose en* O *y únase* SO; *afirmo que si los puntos* P *y* Q *se aproximan y coinciden, el ángulo* PSO *será un ángulo recto, y la razón última del rectángulo* $TQ \times 2PS$ *a* PQ^2 *será razón de igualdad.*

Pues sustrayendo de los ángulos rectos OPQ, OQR, los ángulos iguales SPQ, SQR, quedarán los ángulos iguales OPS, OQS. En consecuencia, un círculo que pase por los puntos OSP pasará también por el punto Q. Supóngase que los puntos P y Q coinciden, y este círculo tocará la espiral en el lugar de coincidencia PQ, cortando, en consecuencia, la línea recta OP perpendicularmente. OP, en consecuencia, será el diámetro de este círculo, y el ángulo OSP, encontrándose en un semicírculo, será un ángulo recto. Q.E.D.



Trácense QD, SE, perpendicularmente a OP, y las razones últimas de las líneas serán las siguientes:

$$TQ:PD=TS \text{ o } PS:PE=2PO:2PS;$$

y $$PD:PQ=PQ:2PO;$$

multiplicando entre sí términos correspondientes de razones iguales,

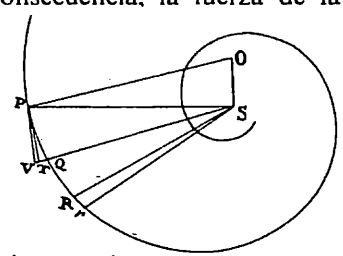
$$TQ:PQ=PQ:2PS$$

Por lo que PQ^2 será igual a $TQ \times 2PS$. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XV. TEOREMA XII

Si la densidad de un medio en cada lugar es inversamente proporcional a la distancia de los lugares a un centro inmóvil, y la fuerza centrípeta es como el cuadrado de la densidad, afirmo que un cuerpo puede girar en una espiral que corte todos los radios trazados desde dicho centro en un ángulo dado.

Supóngase todo igual a lo descrito en el anterior Lema y prolónguese SQ hasta V para que SV sea igual a SP. Supóngase que un cuerpo, en un tiempo cualquiera y un medio resistente, describe el arco mínimo PQ, y en el doble de tiempo el arco mínimo PR; los decrementos de dichos arcos debidos a la resistencia, o sus diferencias de los arcos que en los mismos tiempos se describirían en un medio no resistente, serán entre sí como los cuadrados de los tiempos en que son generados. En consecuencia, el decremento del arco PQ es la cuarta parte del decremento del arco PR. Por tanto, si el área QS*r* es tomada igual al área PSQ, el decremento del arco PQ será igual a la mitad de la línea breve R*r*; en consecuencia, la fuerza de la resistencia y la fuerza centrípeta son entre sí como la línea breve $\frac{1}{2}$R*r* y TQ, que generan en el mismo tiempo. Dado que la fuerza centrípeta por la que el cuerpo es impulsado en P es inversamente proporcional a SP^2, y que (por el Lema X, Libro I), la línea breve TQ, generada por dicha fuerza, está en razón compuesta de la razón de dicha fuerza y el cuadrado de la razón del tiempo en que se describe el arco PQ (pues en este caso ignoro la resistencia, por ser infinitamente menor que la fuerza centrípeta), se sigue que $TQ \times SP^2$, es decir (por el último Lema), $\frac{1}{2}PQ^2 \times SP$,



será como el cuadrado del tiempo, y el tiempo será, en consecuencia, como $PQ \times \sqrt{SP}$, y la velocidad con la que el cuerpo describe el arco PQ en dicho tiempo será como $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ o $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, es decir, inversamente proporcional a la raíz cuadrada de SP. Y, por el mismo razonamiento, la velocidad a la que se describe el arco QR es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de SQ. Ahora bien, dichos arcos PQ y QR son como las velocidades descritas entre sí, es decir, como la raíz cuadrada de la razón de SQ a SP, o como SQ a $\sqrt{(SP \times SQ)}$; y, debido a los ángulos iguales SPQ, SQ*r*, y a las áreas iguales PSQ, QS*r*, el arco PQ es al arco Q*r* como SQ a SP. Tómense las diferencias de las consecuentes proporcionales, y el arco PQ será al arco R*r* como SQ a $SP - \sqrt{(SP \times SQ)}$, o $\frac{1}{2}VQ$. Pues, al coincidir los puntos P y Q, la razón última de $SP - \sqrt{(SP \times SQ)}$ a $\frac{1}{2}VQ$ es la razón de igualdad. Puesto que el decremento del arco PQ debido a la resistencia, o su doble R*r*, es como la resistencia y el cuadrado del tiempo juntamente, la resistencia será como $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Pero PQ era a R*r* como SQ a $\frac{1}{2}VQ$, por lo que $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ será como $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ o como $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP^2}$. Pues, al coincidir los puntos P y Q, SP y SQ coinciden también, y el ángulo PVQ será un ángulo recto. Y, debido a los triángulos semejantes PVQ, PSO, PQ será a $\frac{1}{2}VQ$ como OP a $\frac{1}{2}OS$. En consecuencia, $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ es como la resistencia, es decir, está en razón de la densidad del medio en P y el cuadrado de la razón de la velocidad juntamente. Sustráigase el cuadrado de la razón de la velocidad, es decir, la razón $\frac{1}{SP}$, y quedará la densidad del medio en P, como $\frac{OS}{OP \times SP}$. Dese la espiral, y debido a la razón dada de OS a OP, la densidad del medio en P será como $\frac{1}{SP}$. En consecuencia, en un medio cuya densidad sea inversamente proporcional a SP, distancia desde el centro, el cuerpo girará en esta espiral. Q.E.D.

COROLARIO I. La velocidad en cualquier punto P es siempre

idéntica a aquella con que un cuerpo, en un medio no resistente y con la misma fuerza centrípeta, giraría en círculo a la misma distancia SP del centro.

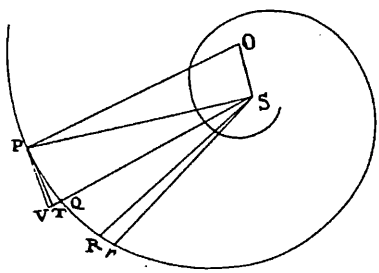
COROLARIO II. La densidad del medio, si la distancia SP está dada, es como $\frac{OS}{OP}$, pero si dicha distancia no está dada, como $\frac{OS}{OP \times SP}$. Por lo que una espiral puede adaptarse a cualquier densidad del medio.

COROLARIO III. La fuerza de la resistencia en cualquier punto P es a la fuerza centrípeta en el mismo punto como $\frac{1}{2}$OS a OP. Pues estas fuerzas son entre sí como $\frac{1}{2}Rr$ y TQ, o como $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ y $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$, es decir, como $\frac{1}{2}$VQ y PQ, o $\frac{1}{2}$OS y OP. En consecuencia, dada la espiral, está dada la proporción de la resistencia a la fuerza centrípeta y, a la inversa, dada dicha proporción, la espiral está dada.

COROLARIO IV. En consecuencia, el cuerpo sólo puede girar en esta espiral cuando la fuerza de resistencia es menor que la mitad de la fuerza centrípeta. En el caso de que la resistencia sea igual a la mitad de la fuerza centrípeta, la espiral coincidirá con la línea recta PS, y por esa línea recta el cuerpo descenderá hacia el centro con una velocidad que es a la velocidad a la que, según antes se probó en el caso de la parábola (Teorema X, Libro I), tendría lugar el descenso en un medio no resistente como la raíz cuadrada de la razón de la unidad al número 2. Y los tiempos de descenso serán aquí inversamente proporcionales a las velocidades y estarán, en consecuencia, dados.

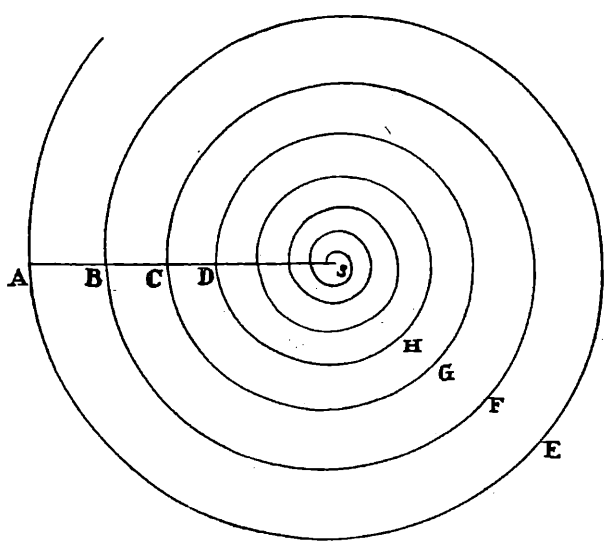
COROLARIO V. Debido a que, a iguales distancias del centro, la velocidad es la misma en la espiral PQR y en la línea recta SP, y puesto que la longitud de la espiral está en razón dada a la longitud de la línea recta, concretamente, en la razón de OP a SP, el tiempo de descenso por la espiral estará al tiempo de descenso por la línea recta SP en la misma razón dada, por lo que estará dado.

COROLARIO VI. Si desde el centro S, dados dos radios cualesquiera, se describen dos círculos y, manteniéndose dichos círculos, el ángulo que la espiral forma con el radio PS cambia en cualquier forma, el número de revoluciones que el cuerpo puede completar en el espacio entre las circunferencias de dichos círculos, girando por la espiral de una circunferencia a otra, será



como $\frac{PS}{OS}$, o como la tangente del ángulo que la espiral forma con el radio PS, y el tiempo de las mismas revoluciones será como $\frac{OP}{OS}$, es decir, como la secante del mismo ángulo, o inversamente proporcional a la densidad del medio.

COROLARIO VII. Si un cuerpo, en un medio cuya densidad es inversamente proporcional a las distancias de los lugares al centro, gira por una curva AEB cualquiera alrededor de dicho centro, y corta el primer radio AS en B en el mismo ángulo que lo cortó antes en A, y ello con una velocidad que será a su primera velocidad en A inversamente proporcional a la raíz cuadrada de las distancias al centro (es decir, como AS a la media proporcional entre AS y BS), dicho cuerpo continuará describiendo innumerables revoluciones análogas BFC, CGD, etc., y con sus intersecciones dividirá el radio AS en partes AS,



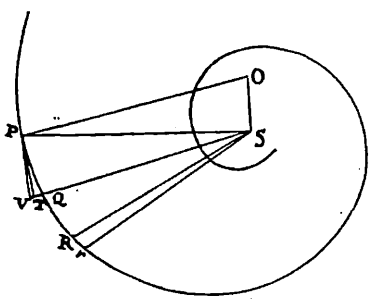
BS, CS, DS, etc., directamente proporcionales. Pero los tiempos de las revoluciones serán directamente proporcionales a los perímetros de las órbitas AEB, BFC, CGD, etc., e inversamente proporcionales a las velocidades en los inicios A, B, C, de dichas órbitas; es decir, como $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Y el total del tiempo empleado por el cuerpo en llegar al centro será al tiempo de la primera revolución como la suma de todas las proporcionales seriadas $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, *ad infinitum*, es al primer término $AS^{\frac{3}{2}}$, es decir, como el primer término $AS^{\frac{3}{2}}$ a la diferencia entre los dos primeros $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, o como $\frac{2}{3}$AS a AB, muy aproximadamente, por lo que el tiempo total puede determinarse fácilmente.

COROLARIO VIII. De donde también pueden deducirse con suficiente aproximación los movimientos de los cuerpos en medios cuya densidad sea uniforme o se atenga a cualquier otra ley determinada. Con centro S y radios SA, SB, SC, etc., directamente proporcionales, descríbanse otros tantos círculos; supóngase que el tiempo de las revoluciones entre los perímetros de cualesquiera dos de los mencionados círculos, en el medio del que antes nos ocupamos, es al tiempo de las revoluciones entre los mismos en el medio propuesto aproximadamente como la densidad media del medio propuesto entre dichos círculos es a la densidad media del medio del que antes nos ocupamos entre los mismos círculos; supóngase también que la secante del ángulo en que la espiral arriba determinada, en el medio del que antes nos ocupamos, corta el radio AS, está en la misma razón a la secante del ángulo en que la nueva espiral, en el medio propuesto, corta el mismo radio; supóngase finalmente que el número total de revoluciones entre los dos mismos círculos es aproximadamente como las tangentes de aquellos ángulos. Si esto se hace en todas partes entre cada par de círculos, el movimiento será continuo por todos los círculos. Y de esta forma no será difícil determinar a qué velocidad y en qué tiempo debe girar un cuerpo en todo medio regular.

COROLARIO IX. Y aunque estos movimientos, haciéndose excéntricos, describen espirales que se aproximen a una figura ovalada, si suponemos que las diversas revoluciones por dichas espirales mantienen la misma distancia entre sí y se aproximan al centro en los mismos grados que la espiral más arriba descrita, podremos también comprender cómo los movimientos de los cuerpos pueden describir espirales de dicha índole.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA XIII

Si la densidad del medio en cada uno de los lugares es inversamente proporcional a la distancia entre los lugares y el centro inmóvil y la fuerza centrípeta es inversamente proporcional a cualquier potencia de la misma distancia, afirmo que el cuerpo puede girar por una espiral intersectando todos los radios trazados desde dicho centro en un ángulo dado.



Esto se demuestra de la misma forma que la anterior Proposición. Pues si la fuerza centrípeta en P es inversamente proporcional a cualquier potencia SP^{n+1} de la distancia SP, cuyo índice es $n+1$, se llegará, como más arriba, a la conclusión de que el tiempo en que el cuerpo describe cualquier arco PQ será como PQ $\times$ PS, y la resistencia en P como $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, o como $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ y, en consecuencia, como $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, es decir (puesto que $\frac{(1-\frac{1}{2}n) \times OS}{OP}$ es una cantidad dada), inversamente proporcional a SP^{n+1}. Y, en consecuencia, como la velocidad es inversamente proporcional a $SP^{\frac{1}{2}n}$, la densidad en P será inversamente proporcional a SP.

COROLARIO I. La resistencia es a la fuerza centrípeta como $(1-\frac{1}{2}n) \times OS$ a OP.

COROLARIO II. Si la fuerza centrípeta es inversamente proporcional a SP^3, $1-\frac{1}{2}n$ será $=0$, y, en consecuencia, la resistencia y densidad del medio serán nulas, como en la Proposición IX, Libro I.

COROLARIO III. Si la fuerza centrípeta es inversamente proporcional a cualquier potencia del radio SP, cuyo índice es mayor que el número 3, la resistencia positiva se transformará en negativa.

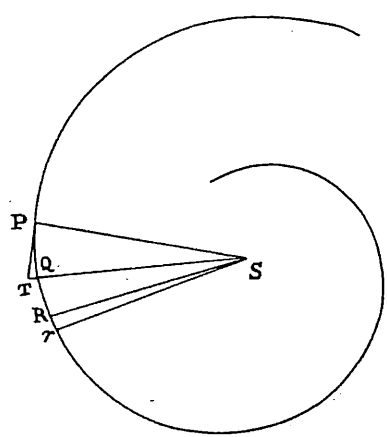
ESCOLIO

Esta Proposición y la anterior, que se refieren a medios de desigual densidad, son tan sólo aplicables al movimiento de cuerpos de tan reducido tamaño que la mayor densidad del medio en un lado del cuerpo puede ser ignorada. Doy también por supuesto que la resistencia, si los demás elementos no varían, es proporcional a su densidad. Por ello, en medios cuya fuerza de resistencia no es como la densidad, esta última debe aumentarse o disminuirse de forma que el exceso de resistencia sea anulado, o el defecto compensado.

PROPOSICIÓN XVII. PROBLEMA IV

Determinar la fuerza centrípeta y la fuerza de resistencia del medio por las que un cuerpo, dada la ley de la velocidad, girará por una espiral dada.

Supóngase que dicha espiral es PQR. El tiempo estará dado por la velocidad a la que el cuerpo recorre el brevísimo arco PQ, y la altitud TQ, que es como la fuerza centrípeta y el cuadrado del tiempo, dará dicha fuerza. La retardación del cuerpo será dada por la diferencia RS*r* de las áreas PSQ y QSR descritas en intervalos iguales de tiempo, y por la retardación se determinarán la fuerza de resistencia y la densidad del medio.



PROPOSICIÓN XVIII. PROBLEMA V

Dada la ley de la fuerza centrípeta, determinar en cada uno de sus lugares la densidad del medio por la que un cuerpo puede describir una espiral dada.

La velocidad en cada uno de los puntos debe determinarse a partir de la fuerza centrípeta; después se determinará la densidad del medio a partir de la retardación de la velocidad, como en la anterior Proposición.

Pero como ya he explicado el método para resolver estos Problemas en la décima Proposición y el segundo Lema de este Libro, no retendré más al lector en estas complicadas investigaciones. Quiero ahora añadir algunas cosas relativas a las fuerzas de los cuerpos progresivos y a la densidad y resistencia de los medios en los que tienen lugar los movimientos hasta aquí estudiados y otros afines a ellos.

SECCION V

Sobre la densidad y compresión de los fluidos; hidrostática.

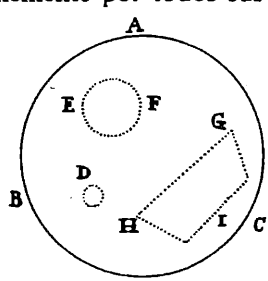
DEFINICION DE FLUIDO

Un fluido es cualquier cuerpo cuyas partes ceden a toda fuerza impresa sobre él y, al ceder, se desplazan fácilmente entre sí.

PROPOSICIÓN XIX. PROBLEMA XIV

Todas las partes de un fluido homogéneo e inmóvil en el interior de cualquier recipiente inmóvil y comprimido por todos sus lados (dejando de lado la consideración de la condensación, gravedad y todas las fuerzas centrípetas) serán igualmente presionadas por todos lados y permanecerán en su lugar sin que de aquella presión surja movimiento alguno.

CASO 1. Supóngase que se introduce un fluido en el recipiente esférico ABC, comprimiéndolo uniformemente por todos sus lados. Afirmo que ninguna parte de aquél será movida por dicha presión. Pues si cualquier parte, como D, fuera movida, todas las partes semejantes situadas en cualquier lado a la misma distancia del centro deberán necesariamente ser movidas al mismo tiempo y con el mismo movimiento, porque la presión de todas ellas es semejante e



igual, y queda excluido todo movimiento que no obedezca a aquella presión. Pero si todas estas partes se acercan al centro, el fluido se condensará hacia el centro, en contra de lo supuesto. Si se alejan de él, el fluido se condensará hacia la superficie, lo que es también contrario a lo supuesto. Tampoco pueden moverse en dirección alguna manteniendo su distancia al centro, porque, por la misma razón, podrían moverse en dirección opuesta, y una misma parte no puede ser movida en direcciones opuestas al mismo tiempo. En consecuencia, ninguna parte del fluido será movida de su lugar. Q.E.D.

CASO 2. Afirmo ahora que todas las partes esféricas de este fluido son igualmente presionadas por todos lados. Pues supóngase que EF es una parte esférica del fluido; si no fuera igualmente presionada por todos lados, auméntese la menor presión hasta que sea igualmente presionada por todos lados, y sus partes (por el Caso 1) permanecerán en su lugar. Pero antes del incremento de presión permanecerían en su lugar (según el Caso 1), y al añadirse nueva presión serán movidas de dicho lugar, a tenor de la definición del fluido. Ahora bien, estas dos conclusiones son contradictorias. En consecuencia, era falso afirmar que la esfera EF no era presionada igualmente por todos lados. Q.E.D.

CASO 3. Afirmo además que diferentes partes esféricas están sometidas a presiones iguales, pues las partes esféricas contiguas se presionan mutua e igualmente en el punto de contacto (por la Ley III). Pero (por el Caso 2) están presionadas por todos lados con la misma fuerza. En consecuencia, cualesquiera dos partes esféricas no contiguas serán presionadas con la misma fuerza, puesto que una parte esférica intermedia puede tocar a ambas. Q.E.D.

CASO 4. Afirmo ahora que todas las partes del fluido son igualmente presionadas por todos lados. Pues cualesquiera dos partes pueden ser tocadas por partes esféricas en cualquier punto, y allí presionarán por igual a dichas partes esféricas (por el Caso 3) y serán por reacción igualmente presionadas por ellas (por la Ley III). Q.E.D.

CASO 5. En consecuencia, como cualquier parte GHI del fluido está cercada por el resto del fluido como en un recipiente y es presionada por igual por todos lados, y como también sus partes se presionan por igual entre sí y están entre sí en reposo, es evidente que todas las partes de cualquier fluido, como GHI,

que es presionada por igual por todos lados, se presionan mutua e igualmente y están entre sí en reposo. Q.E.D.

CASO 6. En consecuencia, si dicho fluido se encuentra en un recipiente de una sustancia que cede, o que no es rígida, y no está presionado por igual por todos lados, el mismo se retirará ante una presión más fuerte, por la definición de la fluidez.

CASO 7. Y, en consecuencia, en un recipiente inflexible o rígido, un fluido no soportará una presión más fuerte en un lado que en otro, sino que se retirará ante ella, y ello en un momento de tiempo, porque el lado rígido del recipiente no sigue al líquido que cede. Pero el fluido, al ceder de esta forma, presionará el lado opuesto, por lo que la presión tenderá a igualarse en todos lados. Y dado que el fluido, tan pronto como consigue retirarse de la parte más presionada, es soportado por la resistencia del recipiente en el lado opuesto, la presión será reducida a igualdad en todos lados, en un momento de tiempo, sin movimiento local alguno, por lo que las partes del fluido (por el Caso 5) se presionarán mutua e igualmente y estarán entre sí en reposo. Q.E.D.

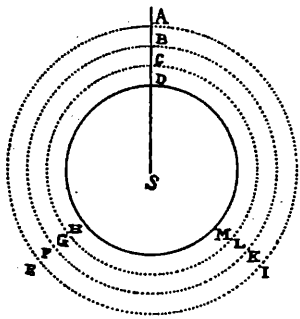
COROLARIO. Por tanto, tampoco el movimiento entre sí de las partes del fluido cambiará por efecto de una presión comunicada a la superficie exterior, salvo por el hecho de que la forma de la superficie sea alterada en algún lugar o si todas las partes del fluido, al presionarse entre sí con mayor o menor intensidad, pueden deslizarse entre sí con mayor o menor dificultad.

PROPOSICIÓN XX. TEOREMA XV

Si todas las partes de un fluido esférico, homogéneas a igual distancia del centro y depositadas sobre un fondo esférico concéntrico, gravitan hacia el centro del todo, el fondo soportará el peso de un cilindro cuya base es igual a la superficie del fondo y cuya altura es la misma que la del fluido en cuestión.

Supóngase que DHM es la superficie del fondo, y sea AEI la superficie superior del fluido. Divídase el fluido en orbes concéntricos de igual grosor por medio de las innumerables superficies esféricas BFK, CGL; concíbase que la fuerza de la gravedad actúa solamente sobre la superficie exterior de cada

uno de los orbes, y que las acciones son iguales sobre las partes iguales de las superficies. En consecuencia, la superficie superior AE es presionada únicamente por la fuerza de su propia gravedad, por la que todas las partes de la superficie superior y la segunda superficie BFK serán (por la Proposición XIX), de acuerdo con su medida, igualmente presionadas. La segunda superficie BFK es de la misma forma presionada por la fuerza de su propia gravedad, que añadida a la anterior fuerza, duplica la presión. La tercera superficie CGI soporta, de acuerdo con su medida, esta presión y además la fuerza de su propia gravedad, lo que triplica su presión. Y análogamente, la cuarta superficie soporta una presión cuádruple, la quinta superficie una presión quíntuple, etc. En consecuencia, la presión que actúa sobre cada superficie no es como la cantidad sólida del fluido en cuestión, sino como el número de orbes que se extienden hasta la superficie superior del fluido, y es igual a la gravedad del orbe más bajo multiplicada por el número de orbes, es decir, a la gravedad de un sólido cuya razón última al cilindro arriba mencionado (cuando el número de orbes es aumentado y su grosor disminuido, *ad infinitum*, de forma que la acción de la gravedad desde la superficie más baja a la más alta pueda ser continua) es la razón de igualdad. En consecuencia, la superficie más baja soporta el peso del cilindro más arriba determinado. Q.E.D. Y, según el mismo razonamiento, la Proposición será evidente allí donde la gravedad del fluido decrezca en cualquier razón determinada de la distancia al centro, y también donde el fluido es más raro arriba y más denso abajo. Q.E.D.



COROLARIO I. En consecuencia, el fondo no es presionado por el peso total del fluido en cuestión, sino que sólo soporta la parte del mismo descrita en la Proposición, siendo el resto del peso soportado, como en un arco, por la figura esférica del fluido.

COROLARIO II. La cantidad de presión es siempre la misma a igual distancia del centro, tanto si la superficie presionada es paralela al horizonte como si es perpendicular u oblicua, y tanto si el fluido, continuando hacia arriba desde la superficie compri-

mida, sube perpendicularmente en dirección rectilínea, como si se arrastra oblicuamente a través de sinuosas cavidades y canales, regulares o irregulares, anchos o estrechos. El hecho de que la presión no es alterada por ninguna de estas circunstancias se infiere de la aplicación de la demostración del presente Teorema a los diversos casos de fluidos.

COROLARIO III. La misma demostración conduce también a la conclusión (por la Proposición XIX) de que las partes de un fluido pesado no adquieren entre sí por la presión del peso en cuestión más movimiento que el debido a la condensación.

COROLARIO IV. Y, en consecuencia, si otro cuerpo de la misma gravedad específica, incapaz de condensación, es sumergido en este fluido, no adquirirá movimiento alguno por la presión del peso en cuestión: ni ascenderá ni descenderá, ni cambiará de configuración. Si fuera esférico, así permanecerá, a pesar de la presión; si fuera cuadrado, permanecerá cuadrado, y ello tanto si es blando como si es fluido, tanto si flota libremente en el fluido como si reposa en el fondo. Pues toda parte interior de un fluido está en el mismo estado que el cuerpo sumergido, y lo mismo ocurre con cualquier cuerpo sumergido que tenga la misma magnitud, figura y gravedad específica. Si un cuerpo sumergido, reteniendo su peso, se disolviera y adoptara la forma de un fluido, dicho cuerpo, si antes le hubiera correspondido ascender, descender o adoptar una nueva configuración debido a cualquier presión, en este caso ascendería, descendería o adoptaría nueva configuración de forma análoga, y ello debido a que su gravedad y las otras causas de su movimiento permanecen. Pero (por el Caso 5, Proposición XIX) ahora se encontraría en reposo y mantendría su configuración. Lo mismo ocurre, en consecuencia, en el caso anterior.

COROLARIO V. En consecuencia, un cuerpo que es específicamente más pesado que un fluido contiguo a él se hundirá, y el que sea específicamente más ligero ascenderá, y adquirirán el movimiento y cambio de configuración que el exceso o defecto de gravedad puedan producir. Pues tal exceso o defecto es lo mismo que un impulso que actúa sobre un cuerpo por lo demás en equilibrio con las partes del fluido, y puede compararse con el exceso o defecto de peso en uno de los platillos de una balanza.

COROLARIO VI. En consecuencia, los cuerpos situados en fluidos tienen una doble gravedad: una gravedad verdadera y absoluta y otra aparente, común y relativa. Gravedad absoluta es la totalidad de la fuerza por la que el cuerpo tiende a dirigirse

hacia abajo; gravedad relativa y común es el exceso de gravedad por el que el cuerpo tiende a dirigirse hacia abajo más que el fluido ambiente. Por la primera clase de gravedad, las partes de todo fluido y cuerpo gravitan en su lugar adecuado y, en consecuencia, el conjunto de sus pesos compone el peso del todo. Pues el todo tomado en su conjunto es pesado, como puede comprobarse en recipientes llenos de líquido, y el peso del todo es igual a los pesos de todas las partes y está, por tanto, compuesto por ellos. Por la otra clase de gravedad los cuerpos no gravitan en su lugar; es decir, comparados los unos con los otros, ninguno de ellos prepondera, sino que, anulando sus mutuos esfuerzos por descender, todos permanecen en sus lugares adecuados como si carecieran de peso. Las cosas que se encuentran en el aire y no preponderan son por lo común consideradas como faltas de peso. Las que preponderan son por lo común consideradas pesadas, en la medida en que no son sustentadas por el peso del aire. Los pesos comunes no son otra cosa que el exceso del verdadero peso sobre el peso del aire. De ahí que las cosas menos pesadas, que, cediendo ante el aire preponderante, suben hacia arriba, reciban por lo común el calificativo de ligeras. Pero estas cosas son sólo relativamente ligeras, y no lo son verdaderamente, pues descienden en el vacío. De esta forma, los cuerpos que, por su mayor o menor gravedad, descienden o ascienden en el agua son relativa y aparentemente pesados o ligeros, y su relativa y aparente gravedad o ligereza es el exceso o defecto por el que su verdadera gravedad excede la gravedad del agua o es superada por ésta. Pero las cosas que ni descienden por preponderar ni ascienden al ceder al fluido preponderante, aunque con su verdadero peso aumentan el peso del todo, relativa y comúnmente hablando no gravitan en el agua. Pues estos casos se demuestran de la misma manera.

COROLARIO VII. Las cosas demostradas en lo que concierne a la gravedad tienen también lugar en cualquier otra fuerza centrípeta.

COROLARIO VIII. En consecuencia, si el medio en que se mueve un cuerpo está sometido a su propia gravedad o a cualquier otra fuerza centrípeta, y el cuerpo es impulsado más poderosamente por la misma fuerza, la diferencia de las fuerzas es precisamente la fuerza motriz que, en la anterior Proposición, he considerado como fuerza centrípeta. Pero si el cuerpo es impulsado más ligeramente por dicha fuerza, la diferencia de

fuerzas se convierte en fuerza centrífuga y como tal debe ser considerada.

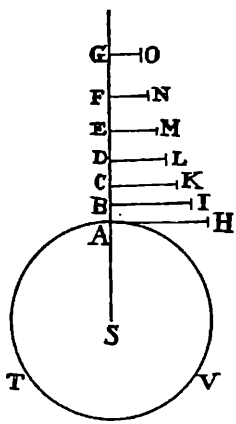
COROLARIO IX. Pero como los fluidos no cambian su configuración exterior al presionar a los cuerpos en ellos incluidos, también se desprende (por el Corolario, Proposición XIX) que no cambiarán la situación de sus partes interiores en su relación mutua; en consecuencia, si en ellos se sumergieran animales, y si toda sensación obedeciera al movimiento de sus partes, el fluido no dañaría los cuerpos sumergidos ni excitaría sensación alguna, salvo en la medida en que dichos cuerpos pudieran condensarse debido a la compresión. Y lo mismo ocurre con cualquier sistema de cuerpos abarcado por un fluido compresor. Todas las partes del sistema serán agitadas con los mismos movimientos que las agitarían si se encontraran en el vacío y sólo retuvieran su gravedad relativa, salvo en la medida en que el fluido pueda de alguna forma resistir sus movimientos o se vea obligado a unirlas por compresión.

PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA XVI

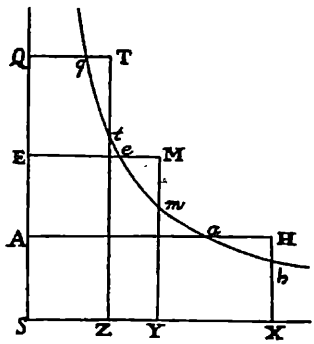
Supóngase que la densidad de un fluido es proporcional a la compresión y que sus partes son atraídas hacia abajo por una fuerza centrípeta inversamente proporcional a las distancias al centro; afirmo que si dichas distancias son tomadas continuamente proporcionales, las densidades del fluido a las mismas distancias serán también continuamente proporcionales.

Supóngase que ATV representa el fondo esférico del fluido, S el centro, SA, SB, SC, SD, SE, SF, etc., distancias continuamente proporcionales. Levántense las perpendiculares AH, BI, CK, DL, EM, FN, etc., que serán como las densidades del medio en los puntos A, B, C, D, E, F; las gravedades específicas en dichos puntos serán como $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, etc., o, lo que es igual, como $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$, etc. Supóngase, en primer lugar, que estas gravedades son uniformemente continuas de A a B, de B a C, de C a D, etc., tomándose paso a paso los decrementos en los

puntos B, C, D, etc. Estas gravedades, multiplicadas por las alturas AB, BC, CD, etc., darán las presiones AH, BI, CK, que soporta el fondo ATV (por el Teorema XV). En consecuencia, la partícula A soporta todas las presiones AH, BI, CK, DL, etc., *in infinitum*, la partícula B soporta todas las presiones salvo la primera AH, y la partícula C todas menos las dos primeras AH, BI, etc. En consecuencia, la densidad AH de la primera partícula A es a la densidad BI de la segunda partícula B como la suma de AH + BI + CK + DL, *in infinitum*, a la suma de BI + CK + DL, etc. Y BI, densidad de la segunda partícula B, es a CK, densidad de la tercera C, como la suma de BI + CK + DL, etc., a la suma de CK + DL, etc. En consecuencia, dichas sumas son proporcionales a sus diferencias AH, BI, CK, etc., y, por tanto, continuamente proporcionales (por el Lema I de este Libro). En consecuencia, las diferencias AH, BI, CK, etc., proporcionales a las sumas, son también continuamente proporcionales. En consecuencia, dado que las densidades en los puntos A, B, C, etc., son como AH, BI, CK, etcétera, serán también continuamente proporcionales. Procédase intermitentemente y, a las distancias SA, SC, SE, continuamente proporcionales, las densidades AH, CK, EM, serán continuamente proporcionales. Y, por el mismo razonamiento, a cualquier distancia SA, SD, SG, continuamente proporcionales. Hágase ahora coincidir los puntos A, B, C, D, E, etc., de modo que la progresión de las gravedades específicas desde el fondo A a la parte superior del fluido sea continua, y a cualesquiera distancias SA, SD, SG, continuamente proporcionales, las densidades AH, DL, GO, siempre continuamente proporcionales, seguirán siendo continuamente proporcionales. Q.E.D.



COROLARIO. Por tanto, si la densidad del fluido en dos lugares, como A y E, está dada, puede determinarse su densidad en cualquier otro punto Q. Con centro S y asíntotas rectangulares SQ, SX, descríbase una hipérbola cortando las perpendiculares AH, EM, QT en *a*, *e* y *q*, y las perpendiculares HX, MY, TZ, abatidas sobre la asíntota SX, en *h*, *m* y *t*. Hágase el área Y*mt*Z al área dada Y*mh*X como el área dada E*eq*Q al área dada E*eaA*, y la línea Z*t*, prolongada, cortará la línea QT proporcional a la densidad. Pues si las líneas SA, SE, SQ, son continuamente



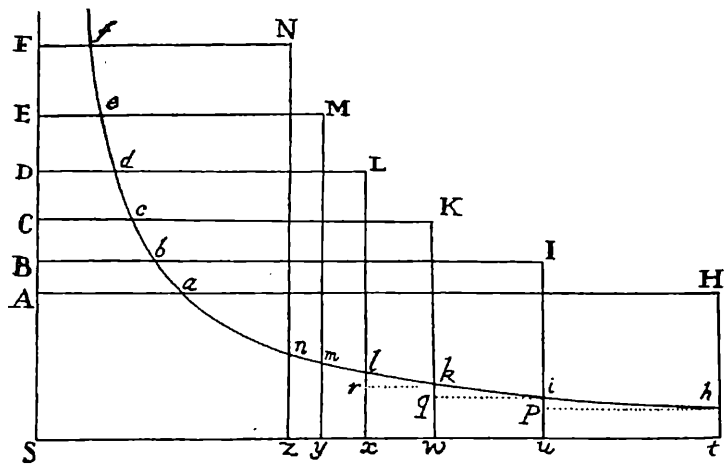
proporcionales, las áreas E*eq*Q, E*ea*A, serán iguales y, por tanto, las áreas Y*mt*Z, X*hm*Y, proporcionales a ellas, serán también iguales, y las líneas SX, SY, SZ, es decir, AH, EM, QT, continuamente proporcionales, como deben ser. Y si las líneas SA, SE, SQ, obtienen cualquier otro orden en la serie de proporcionales continuas, las líneas AH, EM, QT, debido a las áreas hiperbólicas proporcionales, obtendrán el mismo orden en otra serie de cantidades continuamente proporcionales.

PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA XVII

Supóngase que la densidad de un fluido es proporcional a la compresión, y que sus partes son atraídas hacia abajo por una gravitación inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias al centro; afirmo que si las distancias son tomadas en progresión armónica, las densidades del fluido a tales distancias estarán en progresión geométrica.

Representen S el centro y SA, SB, SC, SE, las distancias en progresión geométrica. Levántense las perpendiculares AH, BI, CK, etc., que serán como las densidades del fluido en los puntos A, B, C, D, E, etc., y las gravedades específicas del mismo en dichos puntos serán como $\frac{AH}{SA^2}, \frac{BI}{SB^2}, \frac{CK}{SC^2}$, etc. Supóngase que estas gravedades son uniformemente continuas, la primera de A a B, la segunda de B a C, la tercera de C a D, etc., y, multiplicadas por las alturas AB, BC, CD, DE, etc., o, lo que es lo mismo, por las distancias SA, SB, SC, etc., proporcionales a dichas alturas, darán $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, etc., representando las presiones. En consecuencia, dado que las densidades son como las sumas de dichas presiones, las diferencias AH − BI, BI − CK, etc., de las densidades serán como las diferencias de dichas sumas $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, etc. Con centro S y asíntotas SA, S*x*,

descríbase cualquier hipérbola, cortando las perpendiculares AH, BI, CK, etc., en *a*, *b*, *c*, etc., y las perpendiculares H*t*, I*u*, K*w*, abatidas sobre la asíntota S*x*, en *h*, *i*, *k*, y las diferencias de las densidades, *tu*, *uw*, etc., serán como $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, etc. Y los rectángulos $tu \times th$, $uw \times ui$, etc., o *tp*, *uq*, etc., como $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, etc., es decir, como A*a*, B*b*, etc. Pues, por la naturaleza



de la hipérbola, SA es a AH o S*t* como *th* a A*a*, por lo que $\frac{AH \times th}{SA}$ es igual a A*a*. Y, por el mismo razonamiento, $\frac{BI \times ui}{SB}$ es igual a B*b*, etc. Pero A*a*, B*b*, C*c*, etc., son continuamente proporcionales y, en consecuencia, proporcionales a sus diferencias A*a* − B*b*, B*b* − C*c*, etc., por lo que los rectángulos *tp*, *uq*, etc., son proporcionales a dichas diferencias, como lo son las sumas de los rectángulos *tp* + *uq* o *tp* + *uq* + *wr* a las sumas de las diferencias A*a* − C*c* o A*a* − D*d*. Supónganse varios de estos términos, y la suma de todas las diferencias, como A*a* − F*f*, será proporcional a la suma de todos los rectángulos, como *zthn*. Auméntese el número de términos y disminúyanse las distancias de los puntos A, B, C, etc., *in infinitum*, y estos rectángulos serán

iguales al área hiperbólica *zthn*, por lo que la diferencia A*a* − F*f* es proporcional a dicha área. Tómense ahora cualesquiera distancias, como SA, SD, SF, en progresión armónica, y las diferencias A*a* − D*d*, D*d* − F*f*, serán iguales, por lo que las áreas *thlx*, *xlnz*, proporcionales a dichas diferencias, serán iguales entre sí, y las densidades S*t*, S*x*, S*z*, es decir, AH, DL, FN, continuamente proporcionales. Q.E.D.

COROLARIO. Por tanto, si cualesquiera dos densidades del fluido, como AH y BI, están dadas, el área *thiu*, que corresponde a su diferencia *tu*, estará dada, por lo que la densidad FN se determinará para cualquier altura SF, tomando el área *thnz* a dicha área dada *thiu* como la diferencia A*a* − F*f* a la diferencia A*a* − *B*b.

ESCOLIO

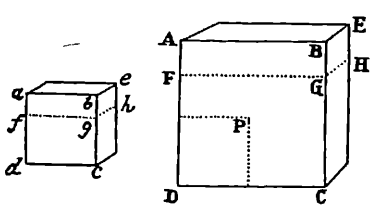
Por el mismo razonamiento puede probarse que si la gravedad de las partículas de un fluido disminuye como el cubo de las distancias al centro y las inversas de los cuadrados de las distancias SA, SB, SC, etc. (es decir, $\frac{SA^3}{SA^2}, \frac{SA^3}{SB^2}, \frac{SA^3}{SC^2}$) se toman en progresión aritmética, las densidades AH, BI, CK, etc., estarán en progresión geométrica. Y si la gravedad es disminuida como la cuarta potencia de las distancias, y las inversas de los cubos de las distancias $\left(\text{como } \frac{SA^4}{SA^3}, \frac{SA^4}{SB^3}, \frac{SA^4}{SC^3}, \text{ etc.}\right)$ se toman en progresión aritmética, las densidades AH, BI, CK, etc., estarán en progresión geométrica. Y así *in infinitum*. Igualmente, si la gravedad de las partículas del fluido es la misma a todas las distancias, y las distancias están en progresión aritmética, las densidades estarán en progresión geométrica, como ha determinado el doctor *Halley*. Si la gravedad es como la distancia y los cuadrados de las distancias están en progresión aritmética, las densidades estarán en progresión geométrica. Y así *in infinitum*. Esto es así cuando la densidad del fluido condensado por compresión es como la fuerza de compresión o, lo que es lo mismo, cuando el espacio poseído por el fluido es inversamente proporcional a dicha fuerza. Pueden también suponerse otras leyes de la condensación, como que el cubo de la fuerza de compresión puede ser como la cuarta potencia de la densidad, o el cubo de la razón de la fuerza igual a la cuarta potencia de la

razón de la densidad, en cuyo caso, si la gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro, la densidad será inversamente proporcional al cubo de la distancia. Supóngase que el cubo de la fuerza de compresión es como la quinta potencia de la densidad; si la gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la densidad será inversamente proporcional a la $\frac{3}{2}$ava potencia de la distancia. Supóngase que la fuerza de compresión es como el cuadrado de la densidad, y la gravedad inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; entonces la densidad será inversamente proporcional a la distancia. Ocuparse de todos los casos que podrían imaginarse sería tedioso. Pero en lo que toca a nuestro propio aire, sabemos experimentalmente con certeza que su densidad es exacta, o al menos muy aproximadamente, como la fuerza de compresión; en consecuencia, la densidad del aire en la atmósfera terrestre es como el peso de todo el aire en cuestión, es decir, como la altura del mercurio en el barómetro.

PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA XVIII

Si un fluido está compuesto por partículas que huyen unas de otras y la densidad es como la compresión, las fuerzas centrífugas de las partículas serán inversamente proporcionales a las distancias de sus centros y, a la inversa, las partículas que huyen unas de otras, con fuerzas inversamente proporcionales a las distancias de sus centros, componen un fluido elástico cuya densidad es como la compresión.

Supóngase que el fluido está contenido en un espacio cúbico ACE, y después es reducido por compresión a un espacio cúbico menor *ace*; las distancias de las partículas, conservando una relación análoga entre sí en ambos espacios, serán como los lados AB, *ab* de los cubos, y las densidades de los medios serán inversamente proporcionales a los espacios continentes AB^3, ab^3. Tómese en el lado plano ABCD del cubo mayor el cuadrado DP, igual al lado plano *db* del cubo menor y, según lo supuesto, la presión que el cuadrado DP ejerce sobre el



fluido encerrado será a la presión que el cuadrado *db* ejerce sobre el fluido encerrado como las densidades de los medios son entre sí, es decir, como ab^3 a AB^3. Pero la presión que el cuadrado DB ejerce sobre el fluido encerrado es a la presión que el cuadrado DP ejerce sobre el mismo fluido como el cuadrado DB al cuadrado DP, es decir, como AB^2 a ab^2. En consecuencia, multiplicando términos correspondientes de las proporciones, la presión que el cuadrado DB ejerce sobre el fluido es a la presión que el cuadrado *db* ejerce sobre el fluido como *ab* a AB. Trácense los planos FGH, *fgh*, por el interior de los dos cubos y divídase el fluido en dos partes. Estas partes se presionarán mutuamente con las mismas fuerzas con que ellas mismas son presionadas por los planos AC, *ac*, es decir, en la proporción de *ab* a AB; en consecuencia, las fuerzas centrífugas que sostienen estas presiones están en la misma razón. Si el número de partículas es igual y la situación semejante en ambos cubos, las fuerzas que todas las partículas ejercen sobre todas, de acuerdo con los planos FGH, *fgh*, son como las fuerzas que cada una de ellas ejerce sobre cada una. En consecuencia, las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una, de acuerdo con el plano FGH en el cubo mayor, son a las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una, de acuerdo con el plano *fgh* en el cubo menor, como *ab* a AB, es decir, inversamente proporcionales a las distancias de las partículas entre sí. Q.E.D.

Y, a la inversa, si las fuerzas de las partículas singulares son inversamente proporcionales a las distancias, es decir, inversamente proporcionales a los lados AB, *ab*, de los cubos, las sumas de las fuerzas estarán en la misma razón, las presiones de los lados DB, *db*, serán como las sumas de las fuerzas, y la presión del cuadrado DP será a la presión del lado DB como ab^2 a AB^2. Y multiplicando términos correspondientes de las proporciones resulta que la presión del cuadrado DP es a la presión del lado *db* como ab^3 a AB^3, es decir, que la fuerza de compresión en uno es a la fuerza de compresión en el otro como la densidad en el primero a la densidad en el último. Q.E.D.

ESCOLIO

Por el mismo razonamiento, si las fuerzas centrífugas de las partículas son inversamente proporcionales al cuadrado de las

distancias entre los centros, los cubos de las fuerzas de compresión serán como la cuarta potencia de las densidades. Si las fuerzas centrífugas son inversamente proporcionales a la tercera o cuarta potencia de las distancias, los cubos de las fuerzas de compresión serán como la quinta o sexta potencia de las densidades. Y universalmente, si D representa la distancia y E la densidad del fluido comprimido, y las fuerzas centrífugas son inversamente proporcionales a cualquier potencia D^n de la distancia, cuyo índice es el número n, las fuerzas de compresión serán como las raíces cúbicas de la potencia E^{n+2}, cuyo índice es el número $n+2$, y a la inversa. Todo ello debe entenderse referido a partículas cuyas fuerzas centrífugas terminan en las partículas contiguas a ellas o no se difunden mucho más allá. Los cuerpos magnéticos nos ofrecen un ejemplo. Su fuerza de atracción termina prácticamente en los cuerpos de su misma especie contiguos a ellos. La fuerza del imán es reducida por la interposición de una lámina de hierro, y prácticamente termina en ella, pues los cuerpos más alejados son más atraídos por la lámina de hierro que por el imán. Si, de esta forma, las partículas repelen a otras contiguas de su propia especie, pero no ejercen su fuerza sobre las más remotas, las partículas de esta especie compondrán fluidos como los estudiados en esta Proposición. Si la fuerza de cualquier partícula se difunde en todas direcciones *in infinitum*, se necesitará una fuerza más poderosa para producir igual condensación de una mayor cantidad de fluido. Pero el problema de si los fluidos elásticos están realmente compuestos por partículas que se repelen mutuamente de esta forma es un problema de física. Aquí hemos demostrado matemáticamente la propiedad de los fluidos compuestos por partículas de esta especie, para que los filósofos tengan ocasión de discutir aquel problema.

SECCION VI

Sobre el movimiento y resistencia de los cuerpos pendulares.

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA XIX

Las cantidades de materia de los cuerpos pendulares cuyos centros de oscilación se encuentran a igual distancia del centro de suspensión están en razón compuesta de la razón de los pesos y el cuadrado de la razón de los tiempos de las oscilaciones en el vacío.

Pues la velocidad que una fuerza dada puede generar en una materia dada y un tiempo dado es directamente proporcional a la fuerza y al tiempo e inversamente proporcional a la materia. Cuanto mayores sean la fuerza o el tiempo, o menor la materia, mayor será la velocidad generada. Esto es manifiesto a tenor de la segunda Ley del Movimiento. Si los péndulos son de igual longitud, las fuerzas motrices en puntos igualmente distantes de la perpendicular son como los pesos y, en consecuencia, si dos cuerpos describen arcos iguales al oscilar, y estos arcos son divididos en partes iguales, como los tiempos en que los cuerpos describen cada una de las partes correspondientes de los arcos son como los tiempos de las oscilaciones totales, las velocidades en las partes correspondientes de las oscilaciones serán entre sí directamente proporcionales a las fuerzas motrices y los tiempos totales de las oscilaciones, e inversamente proporcionales a las cantidades de materia; en consecuencia, las cantidades de materia son directamente proporcionales a las fuerzas y los tiempos de las oscilaciones, e inversamente proporcionales a las velocidades. Pero las velocidades son inversamente proporcionales a los tiempos y, en consecuencia, los tiempos son directa y las

velocidades inversamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos, por lo que las cantidades de materia son como las fuerzas motrices y los cuadrados de los tiempos, es decir, como los pesos y los cuadrados de los tiempos. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, si los tiempos son iguales, las cantidades de materia en cada uno de los cuerpos son como los pesos.

COROLARIO II. Si los pesos son iguales, las cantidades de materia serán como los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO III. Si las cantidades de materia son iguales, los pesos serán inversamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO IV. Puesto que los cuadrados de los tiempos, si los demás elementos no cambian, son como las longitudes de los péndulos, cuando tanto los tiempos como las cantidades de materia son iguales los pesos serán como las longitudes de los péndulos.

COROLARIO V. Y, en general, la cantidad de materia del cuerpo pendular es directamente proporcional al peso y al cuadrado del tiempo, e inversamente proporcional a la longitud del péndulo.

COROLARIO VI. Pero en un medio no resistente, la cantidad de materia del cuerpo pendular es directamente proporcional al peso relativo y el cuadrado del tiempo, e inversamente proporcional a la longitud del péndulo. Pues el peso relativo es la fuerza motriz del cuerpo en cualquier medio pesado, como más arriba se mostró, y, en consecuencia, se comporta en tal medio no resistente como el peso absoluto se comporta en el vacío.

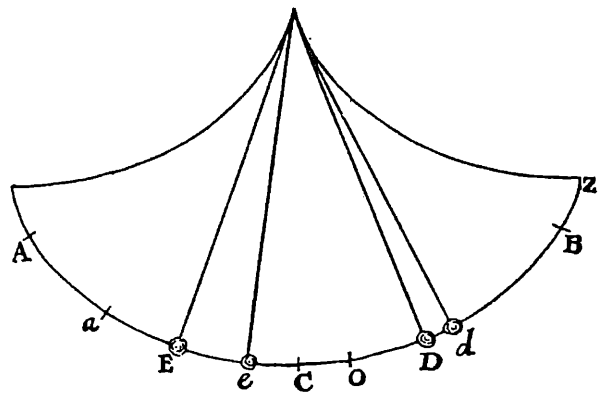
COROLARIO VII. De ello se desprende un método para comparar tanto cuerpos entre sí, en lo que toca a la cantidad de materia de cada uno, como pesos del mismo cuerpo en diferentes lugares, para conocer la variación de su gravedad. Y, por medio de experimentos realizados con la mayor precisión, siempre he observado que la cantidad de materia de los cuerpos es proporcional a su peso.

PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA XX

Los cuerpos pendulares que, en cualquier medio, son resistidos en razón de los momentos del tiempo, así como los cuerpos pendulares

que se mueven en un medio no resistente de la misma gravedad específica, ejecutan sus oscilaciones en una cicloide en el mismo tiempo y describen juntos partes proporcionales de arcos.

Supóngase que AB es un arco de una cicloide que un cuerpo D, vibrando en un medio no resistente, describe en un tiempo cualquiera. Biséctese dicho arco en C de forma que C sea su punto más bajo, y la fuerza acelerativa que impulsa al cuerpo en cualquier punto D, o *d*, o E, será como la longitud del arco CD, o C*d*, o CE. Exprésese dicha fuerza por el mismo arco, y puesto que la resistencia es como el momento del tiempo, y está, por tanto, dada, exprésese por la parte dada CO del arco cicloidal, tómese el arco O*d* al arco CD en la misma razón que el arco OB al arco CB, y la fuerza que, en un medio resistente, impulsa al cuerpo en *d*, al ser el exceso de la fuerza C*d* sobre la resistencia CO, se expresará por el arco O*d* y, en consecuencia, será a la fuerza que impulsa, en un medio no resistente, al cuerpo D en el punto D como el arco O*d* al arco CD; en consecuencia, también en el punto B será como el arco OB al arco CB. Por tanto, si dos cuerpos D, *d*, parten del punto B y son impulsados por estas fuerzas, puesto que las fuerzas iniciales son como los arcos CB y OB, las primeras velocidades y los primeros arcos descritos estarán en la misma razón. Representados dichos arcos por BD y B*d*, los restantes arcos CD, O*d* estarán en la misma razón. En consecuencia, las fuerzas, al ser proporcionales a dichos arcos CD, O*d*, permanecerán en la misma razón que al principio, por lo que los cuerpos seguirán describiendo juntos arcos en la misma razón. En consecuencia, las fuerzas y velocidades y los restantes arcos CD, O*d*, serán siempre como los arcos totales CB, OB, por lo que los arcos restantes se describirán juntos. En consecuencia, los dos cuerpos D y *d* llegarán juntos a los puntos C y O; el que se mueve en el medio no resistente al punto C, y el otro, en el medio resistente, al punto O. Y puesto que las velocidades en C y O son como los arcos CB, OB, los arcos que los cuerpos describen si van más lejos estarán en la misma razón. Sean dichos arcos CE y O*e*. La fuerza que retarda, en un medio no resistente, al cuerpo D en E es como CE, y la fuerza que retarda en el medio resistente al cuerpo *d* en *e* es como la suma de la fuerza C*e* y la resistencia CO, es decir, como O*e;* en consecuencia, las fuerzas con que los cuerpos son retardados son como los arcos CB, OB, proporcionales a los arcos CE, O*e*, por lo que las velocidades, retardadas en la razón dada, permanecen



en la misma razón dada. En consecuencia, las velocidades y los arcos descritos con dichas velocidades están siempre entre sí en dicha razón dada de los arcos CB y OB y, por tanto, si los arcos enteros AB, *a*B, se toman en la misma razón, los cuerpos D y *d* describirán juntos dichos arcos y perderán juntos todo su movimiento en los puntos A y *a*. En consecuencia, las oscilaciones totales son isócronas o ejecutadas en el mismo tiempo, y cualesquiera partes de los arcos, como BD, B*d*, o BE, B*e*, que se describan juntas son proporcionales a los arcos totales BA, B*a*. Q.E.D.

COROLARIO. En consecuencia, el movimiento más veloz en un medio resistente no cae en el punto más bajo C, sino que se encuentra en el punto O, donde es bisectado el arco total descrito B*a*. Y el cuerpo, desplazándose de allí a *a*, es retardado en la misma razón que fuera acelerado en su descenso de B a O.

PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA XXI

Los cuerpos pendulares que son resistidos en razón de la velocidad oscilan en una cicloide isócrona.

Pues si dos cuerpos igualmente distantes de sus centros de suspensión describen al oscilar arcos desiguales y las velocidades en las partes correspondientes de los arcos son entre sí como los arcos enteros, las resistencias, proporcionales a las velocidades.

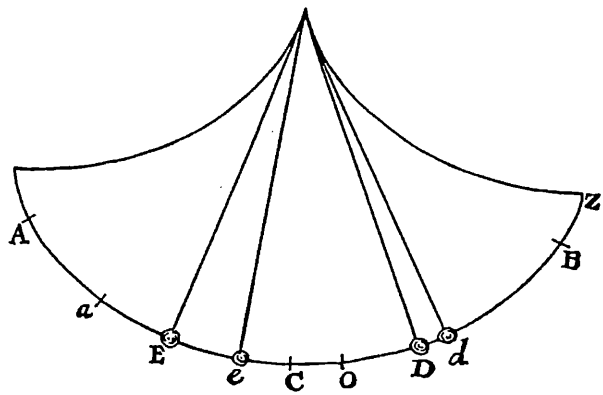
también serán entre sí como los mismos arcos. En consecuencia, si estas resistencias son sustraídas o añadidas a las fuerzas motrices debidas a la gravedad que son como los mismos arcos, las diferencias o sumas estarán entre sí en la misma razón de los arcos, y puesto que los incrementos y decrementos de las velocidades son como dichas diferencias o sumas, las velocidades serán siempre como los arcos enteros. En consecuencia, si las velocidades son en una oportunidad como los arcos enteros, seguirán siempre en la misma razón. Pero al inicio del movimiento, cuando los cuerpos comienzan a descender y describir los arcos, las fuerzas, que en ese momento son proporcionales a los arcos, generarán velocidades proporcionales a los arcos. En consecuencia, las velocidades serán siempre como la totalidad de los arcos a describir, por lo que dichos arcos serán descritos en el mismo tiempo. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA XXII

Si los cuerpos pendulares son resistidos como el cuadrado de sus velocidades, las diferencias entre los tiempos de las oscilaciones en un medio resistente y los tiempos de las oscilaciones en un medio no resistente de la misma gravedad específica serán aproximadamente proporcionales a los arcos descritos al oscilar.

Pues supóngase que péndulos iguales describen en un medio resistente los arcos desiguales A, B, y la resistencia del cuerpo en el arco A será a la resistencia del cuerpo en la parte correspondiente del arco B como el cuadrado de las velocidades, es decir, aproximadamente como AA a BB. Si la resistencia en el arco B fuera a la resistencia en el arco A como AB a AA, los tiempos en los arcos A y B serían iguales (por la última Proposición). En consecuencia, la resistencia AA en el arco A, o AB en el arco B, es causa del exceso del tiempo en el arco A sobre el tiempo en un medio no resistente, y la resistencia BB es causa del exceso del tiempo en el arco B sobre el tiempo en un medio no resistente. Pero dichos excesos son aproximadamente como las fuerzas eficientes AB y BB, es decir, como los arcos A y B. Q.E.D.

COROLARIO I. Por tanto, los tiempos de las oscilaciones por arcos desiguales en un medio resistente permiten determinar los



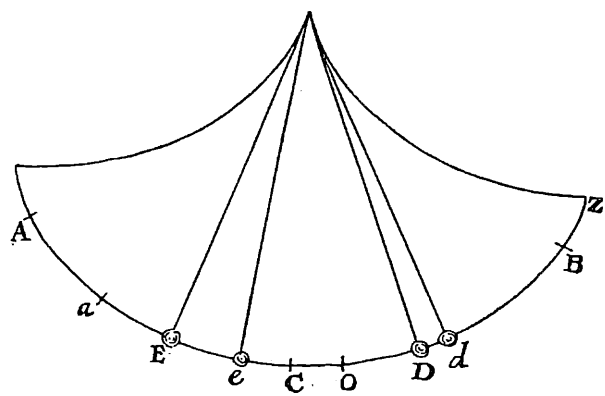
tiempos de las oscilaciones en un medio no resistente de la misma gravedad específica. Pues la diferencia de los tiempos será al exceso del tiempo en el arco más corto sobre el tiempo en un medio no resistente como la diferencia de los arcos es al arco más corto.

COROLARIO II. Las oscilaciones más cortas son más isócronas, y las muy cortas tienen lugar aproximadamente en los mismos tiempos que en un medio no resistente. Pero los tiempos de las que describen arcos mayores son algo mayores, porque la resistencia del cuerpo en el descenso, que prolonga el tiempo, es mayor, en proporción a la longitud descrita en el descenso, que la resistencia en el subsiguiente ascenso, que contrae el tiempo. Pero el tiempo de las oscilaciones, tanto cortas como largas, parece en cierta medida prolongarse por el movimiento del medio. Pues los cuerpos retardados son algo menos resistidos en proporción a la velocidad, y los cuerpos acelerados algo más que los que proceden uniformemente hacia adelante, porque el medio, por el movimiento que ha recibido de los cuerpos, avanzando en su misma dirección, está más agitado en el primer caso y menos en el último, cooperando más o menos de esta forma con los cuerpos en movimiento. En consecuencia, en su descenso resiste a los péndulos más que en proporción a la velocidad, y en su ascenso menos, y la combinación de estas dos causas prolonga el tiempo.

PROPOSICIÓN XXVIII. TEOREMA XXIII

Si un cuerpo, al oscilar por una cicloide, es resistido en razón de los momentos del tiempo, su resistencia será a la fuerza de la gravedad como el exceso del arco descrito en todo el descenso sobre el arco descrito en el subsiguiente ascenso es a dos veces la longitud del péndulo.

Representen BC el arco descrito en el descenso, C*a* el arco descrito en el ascenso, y A*a* la diferencia de los arcos; si los elementos permanecen como fueron construidos y demostrados en la Proposición XXV, la fuerza que impulsa al cuerpo

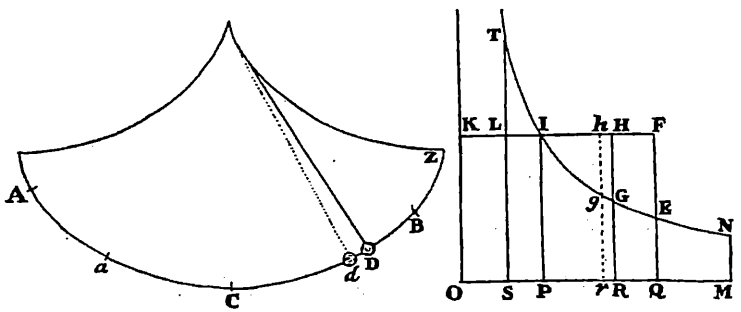


pendular en cualquier punto D será a la fuerza de la resistencia como el arco CD al arco CO, que es la mitad de aquella diferencia A*a*. En consecuencia, la fuerza que impulsa al cuerpo oscilante en el inicio o punto más alto de la cicloide, es decir, la fuerza de la gravedad, será a la resistencia como el arco de la cicloide, entre dicho punto más alto y el punto más bajo C, es al arco CO, es decir (duplicando dichos arcos), como todo el arco cicloidal, o dos veces la longitud del péndulo, es al arco A*a*. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA VI

Suponiendo que un cuerpo, al oscilar por una cicloide, es resistido como el cuadrado de la velocidad, determinar la resistencia en cada punto.

Sea B*a* un arco descrito en una oscilación completa, C el punto más bajo de la cicloide y CZ la mitad del arco cicloidal completo, igual a la longitud del péndulo, y determínese con ello la resistencia del cuerpo en cualquier punto D. Córtese la línea recta indefinida OQ en los puntos O, S, P, Q, de forma que (levantando las perpendiculares OK, ST, PI, QE, con centro O y asíntotas OK, OQ, se describe la hipérbola TIGE cortando las perpendiculares ST, PI, QE en T, I y E, y trazando por el punto I la línea KF, paralela a la asíntota OQ, encontrando la asíntota



OK en K y las perpendiculares ST y QE en L y F) el área hiperbólica PIEQ pueda ser al área hiperbólica PITS como el arco BC, descrito en el descenso del cuerpo, es al arco C*a*, descrito en el ascenso; sea el área IEF al área ILT como OQ a OS. Después córtese con la perpendicular MN el área hiperbólica PINM, y sea dicha área al área hiperbólica PIEQ como el arco CZ al arco BC descrito en el descenso. Si la perpendicular RG corta el área hiperbólica PIGR, que será al área PIEQ como cualquier arco CD al arco BC descrito en el descenso entero, la resistencia en cualquier punto D será a la fuerza de la gravedad como el área $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH es al área PINM.

Pues dado que las fuerzas derivadas de la gravedad que impulsan al cuerpo en los puntos Z, D, B, *a*, son como los arcos

CZ, CB, CD, C*a*, y que dichos arcos son como las áreas PINM, PIEQ, PIGR, PITS, supóngase que dichas áreas representen respectivamente tanto los arcos como las fuerzas. Sea D*d* un espacio muy corto descrito por el cuerpo en su descenso y supóngase expresado por la muy pequeña área RG*gr*, comprendida entre las paralelas RG, *rg*; prolónguese *rg* hasta *h*, de forma que GH*hg* y RG*gr* sean decrementos contemporáneos de las áreas IGH, PIGR. El incremento $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, o $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$ del área $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ será al decremento RG*gr*, o $Rr \times RG$, del área PIGR como $HG - \frac{IEF}{OQ}$ es a RG y, en consecuencia, como $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ a $OR \times GR$ o $OP \times PI$, es decir (por las cantidades iguales $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, ORHK − OPIK, PIHR y PIGR + IHG), como $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF$ es a OPIK. En consecuencia, si el área $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ es llamada Y, y RG*gr*, decremento del área PIGR, está dado, el incremento del área Y será como PIGR − Y.

Entonces, si V representa la fuerza debida a la gravedad, proporcional al arco a describir CD, que actúa sobre el cuerpo en D, y R representa la resistencia, V − R será el total de la fuerza que impulsa al cuerpo en D. En consecuencia, el incremento de la velocidad es como V − R y el intervalo de tiempo en que es generado juntamente. Pero la velocidad misma es directamente proporcional al incremento contemporáneo del espacio descrito, e inversamente proporcional al mismo intervalo de tiempo. En consecuencia, puesto que la resistencia es, según lo supuesto, como el cuadrado de la velocidad, el incremento de la resistencia será (por el Lema II) como la velocidad y el incremento de la velocidad juntamente, es decir, como el momento del espacio y V − R conjuntamente y, en consecuencia, si el momento del espacio está dado, como V − R, de forma que si expresamos la fuerza V mediante PIGR y la resistencia R mediante cualquier otra área Z, será como PIGR − Z.

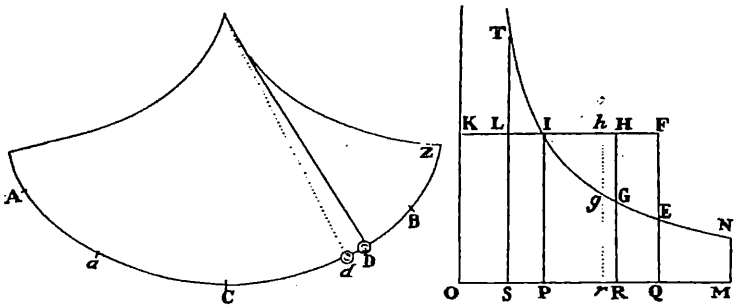
En consecuencia, al decrecer uniformemente el área PIGR por la sustracción de momentos dados, el área Y incrementa en proporción de PIGR − Y, y el área Z en proporción de PIGR − Z. Y, en consecuencia, si las áreas Y y Z comienzan juntas y son iguales al comienzo, dichas áreas, por adición de momentos iguales, seguirán siendo iguales, y desaparecerán juntas, de la misma forma, al decrecer por momentos iguales. Y, a la inversa, si empiezan y desaparecen juntas, tendrán iguales momentos y serán siempre iguales. Pues, si la resistencia Z es aumentada, la velocidad, así como el arco C*a*, descrito en el ascenso del cuerpo, disminuirán, y, al acercarse al punto C el punto donde todo movimiento y resistencia cesan, la resistencia desaparece antes que el área Y. Y si la resistencia es disminuida ocurrirá lo contrario.

Ahora bien, el área Z comienza y termina donde la resistencia es nula, es decir, al comienzo del movimiento donde el arco CD es igual al arco CB y la línea recta RG cae sobre la línea recta QE, y al final del movimiento donde el arco CD es igual al arco C*a* y RG cae sobre la línea recta ST. Y el área Y o $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH comienza y termina también donde la resistencia es nula y, en consecuencia, donde $\frac{OR}{OQ}$ IEF e IGH son iguales, es decir (según la construcción) donde la línea recta RG cae sucesivamente sobre las líneas rectas QE y ST. En consecuencia, dichas áreas comienzan y desaparecen juntas, y son, por tanto, siempre iguales. Por ello, el área $\frac{OR}{OQ}$ IEF − IGH es igual al área Z, que expresa la resistencia y, en consecuencia, es al área PINM, que expresa la gravedad, como la resistencia a la gravedad. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, la resistencia en el lugar más bajo C es a la fuerza de la gravedad como el área $\frac{OP}{OQ}$ IEF al área PINM.

COROLARIO II. Pero alcanza el máximo donde el área PIHR es al área IEF como OR a QQ, pues en ese caso su momento (es decir, PIGR − Y) es nulo.

COROLARIO III. De esta forma puede también determinarse la velocidad en cada lugar, que varía como la raíz cuadrada de la resistencia, y al comienzo del movimiento es igual a la



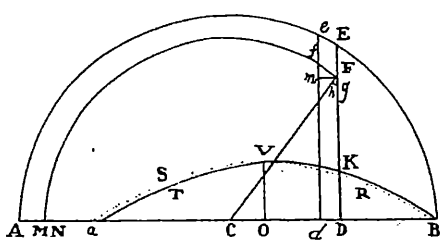
velocidad del cuerpo oscilando por la misma cicloide sin resistencia alguna.

Sin embargo, debido a la dificultad de los cálculos para determinar la resistencia y la velocidad mediante esta Proposición, hemos creído adecuado adjuntar la Proposición siguiente.

PROPOSICIÓN XXX. TEOREMA XXIV

Si una línea recta a**B** *es igual al arco de una cicloide descrito por un cuerpo pendular y en cada uno de sus puntos* D *se levantan las perpendiculares* DK, *que serán a la longitud del péndulo como la resistencia del cuerpo en los puntos correspondientes del arco es a la fuerza de la gravedad, afirmo que la diferencia entre el arco descrito en todo el descenso y el arco descrito en todo el ascenso subsiguiente, multiplicada por la mitad de la suma de dichos arcos, será igual al área* BK*a ocupada por todas aquellas perpendiculares.*

Exprésese el arco de la cicloide descrito en una oscilación completa mediante la línea recta *a*B, igual al mismo, y el arco que se hubiera descrito en el vacío mediante la longitud AB. Biséctese AB en C, y el punto C representará el punto más bajo de la cicloide, y CD será como la fuerza debida a la gravedad que impulsa en D al cuerpo



en dirección de la tangente de la cicloide, y estará en la misma razón a la longitud del péndulo que la fuerza en D a la fuerza de la gravedad. Exprésese, en consecuencia, aquella fuerza mediante la longitud CD, y la fuerza de la gravedad mediante la longitud del péndulo, y si en DE se toma DK en la misma razón a la longitud del péndulo que la resistencia a la gravedad, DK será la expresión de la resistencia. Descríbase desde el centro C un semicírculo BE*e*A con el intervalo CA o CB. Supóngase que el cuerpo describe, en el tiempo mínimo, el espacio D*d*, levántense las perpendiculares DE, *de*, hasta alcanzar la circunferencia en E y *e*, y serán como las velocidades que el cuerpo, descendiendo por el vacío desde el punto B, adquiriría en los puntos D y *d*. Esto se desprende de la Proposición LII, Libro I. Exprésense, en consecuencia, estas velocidades mediante dichas perpendiculares DE, *de*, y sea DF la velocidad que adquiere en D cayendo desde B por el medio resistente. Si desde el centro C, con el intervalo CF, describimos el círculo F*f*M alcanzando las líneas rectas *de* y AB en *f* y M, M será el punto hasta el cual ascendería de no haber más resistencia, y *df* la velocidad que adquiriría en *d*. Igualmente, por tanto, si F*g* representa el momento de la velocidad que el cuerpo D pierde por la resistencia del medio al describir el espacio mínimo D*d*, y CN se toma igual a C*g*, N sería el punto hasta el cual ascendería el cuerpo si no encontrase más resistencia, y MN el decremento del ascenso debido a la pérdida de dicha velocidad. Trácese F*m* perpendicular a *df*, y el decremento F*g* de la velocidad DF generado por la resistencia DK será al incremento *fm* de la misma velocidad, generado por la fuerza CD, como la fuerza generadora DK a la fuerza generadora CD. Pero, debido a los triángulos semejantes F*mf*, F*hg*, FDC, *fm* es a F*m* o D*d* como CD a DF y, por multiplicación de términos correspondientes, F*g* a D*d* como DK a DF. Igualmente, F*h* es a F*g* como DF a CF y, también por multiplicación de términos correspondientes, F*h* o MN a D*d* como DK a CF o CM; en consecuencia, la suma de todas las MN × CM será igual a la suma de todas las D*d* × DK. Supóngase siempre levantada en el punto móvil M una ordenada rectangular igual a la indeterminada CM, que por movimiento continuo es multiplicada por toda la longitud A*a*, y el trapecio descrito por dicho movimiento, o su igual, el rectángulo A*a* $\times \frac{1}{2}a$B, será igual a la suma de todas las MN × CM y, en consecuencia, a la suma de todas las D*d* × DK, es decir, al área BKVT*a*. Q.E.D.

COROLARIO. Por tanto, de la ley de la resistencia y la diferencia A*a* de los arcos C*a*, CB puede derivarse, aproximadamente, la proporción de la resistencia a la gravedad.

Pues si la resistencia DK es uniforme, la figura BKT*a* será un rectángulo bajo B*a* y DK y, por tanto, el rectángulo bajo $\frac{1}{2}$B*a* y A*a* será igual al rectángulo bajo B*a* y DK, y DK será igual a $\frac{1}{2}$A*a*. En consecuencia, puesto que DK representa la resistencia, y la longitud del péndulo la gravedad, la resistencia será a la gravedad como $\frac{1}{2}$A*a* es a la longitud del péndulo, igual que se ha demostrado en la Proposición XXVIII.

Si la resistencia es como la velocidad, la figura BKT*a* será aproximadamente una elipse. Pues si un cuerpo, en un medio no resistente, describiera en una oscilación completa la longitud BA, la velocidad en cualquier punto D será como la ordenada DE del círculo descrito con diámetro AB. En consecuencia, puesto que B*a*, en el medio resistente, y BA, en el no resistente, son descritas aproximadamente en el mismo tiempo, y por lo tanto las velocidades en cada uno de los puntos de B*a* son a las velocidades en los puntos correspondientes de la longitud BA aproximadamente como B*a* es a BA, la velocidad en el punto D del medio resistente será como la ordenada del círculo o elipse descritos con diámetro B*a*; en consecuencia, la figura BKVT será aproximadamente una elipse. Puesto que se ha supuesto que la resistencia es proporcional a la velocidad, represente OV la resistencia en el punto medio O, y una elipse BRVS*a* descrita con centro O y semiejes OB, OV, será aproximadamente igual a la figura BKVT*a* y a su igual el rectángulo A*a* × BO. En consecuencia, A*a* × BO es a OV × BO como el área de dicha elipse a OV × BA; es decir, A*a* es a OV como el área del semicírculo es al cuadrado del radio, o aproximadamente como 11 a 7. En consecuencia, $\frac{7}{11}$A*a* es a la longitud del péndulo como la resistencia del cuerpo oscilante en O es a su gravedad.

Ahora bien, si la resistencia DK varía como el cuadrado de la velocidad, la figura BKVT*a* será casi una parábola con vértice V y eje OV; en consecuencia, será casi igual al rectángulo bajo $\frac{2}{3}$B*a* y OV. Por tanto, el rectángulo bajo $\frac{1}{2}$B*a* y A*a* es igual al rectángulo $\frac{2}{3}$B*a* × OV y, en consecuencia, OV es igual a $\frac{3}{4}$A*a*, por lo que la resistencia con que tropieza el cuerpo oscilante en O es a su gravedad como $\frac{3}{4}$A*a* a la longitud del péndulo.

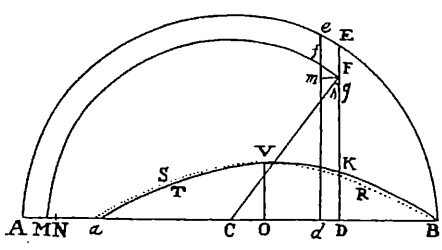
Considero que estas conclusiones son suficientemente precisas para su uso en la práctica, pues, dado que una elipse o parábola BRVS*a* coincide con la figura BKVT*a* en el punto

medio V, dicha figura, aunque sea mayor hacia el lado BRV o VS*a*, es menor hacia el lado opuesto y, en consecuencia, casi igual a aquélla.

PROPOSICIÓN XXXI. TEOREMA XXV

Si la resistencia que se opone a un cuerpo oscilante en cada una de las partes proporcionales de los arcos descritos es aumentada o disminuida en una razón dada, la diferencia entre el arco descrito en el descenso y el arco descrito en el ascenso subsiguiente aumentará o disminuirá en la misma razón.

Pues dicha diferencia se debe a la retardación del péndulo por la resistencia del medio y, en consecuencia, es como la retardación total y la resistencia retardante proporcional a ella.



En la anterior Proposición, el rectángulo bajo la línea recta $\frac{1}{2}a$B y la diferencia A*a* de los arcos CB, C*a*, era igual al área BKT*a*. Y ese área, si la longitud *a*B permanece, aumenta y disminuye en razón de las ordenadas DK, es decir, en razón de la resistencia, por lo que es como la longitud *a*B y la resistencia juntamente. En consecuencia, el rectángulo bajo A*a* y $\frac{1}{2}a$B es como *a*B y la resistencia juntamente, por lo que A*a* es como la resistencia. Q.E.D.

COROLARIO I. Por tanto, si la resistencia es como la velocidad, la diferencia de los arcos en el mismo medio será como todo el arco descrito, y a la inversa.

COROLARIO II. Si la resistencia varía como el cuadrado de la velocidad, la diferencia variará como el cuadrado de todo el arco, y a la inversa.

COROLARIO III. Y, en general, si la resistencia varía como la potencia un tercio o cualquier otra de la velocidad, la diferencia variará como la misma potencia de todo el arco, y a la inversa.

COROLARIO IV. Si la resistencia varía en parte como la primera potencia de la velocidad y en parte como el cuadrado de

la misma, la diferencia variará en parte como la primera potencia y en parte como el cuadrado de todo el arco, y viceversa, por lo que la ley y razón de la resistencia serán para la velocidad iguales que la ley y razón de la diferencia para la longitud del arco.

COROLARIO V. Y, en consecuencia, si un péndulo describe sucesivamente arcos desiguales y podemos determinar la razón del incremento o decremento de esta diferencia con respecto a la longitud del arco descrito, conoceremos también la razón del incremento o decremento de la resistencia con respecto a una velocidad mayor o menor.

ESCOLIO GENERAL

Mediante estas Proposiciones podemos determinar la resistencia de los medios utilizando péndulos que oscilen en ellos. Yo determiné la resistencia del aire con los siguientes experimentos. Utilizando un hilo delgado y un gancho firme, colgué un globo o bola de madera con un peso de $57\frac{5}{12}$ onzas *troy* [de joyería] y diámetro de $6\frac{7}{8}$ pulgadas de *Londres*, de forma que la distancia entre el gancho y el centro de oscilación del globo fuera de $10\frac{1}{2}$ pies. Marqué en el hilo un punto a 10 pies y 1 pulgada de distancia del centro de suspensión, y al nivel de este punto situé una regla dividida en pulgadas, con ayuda de la cual observé las longitudes de los arcos descritos por el péndulo. Después numeré las oscilaciones en las que el globo perdía $\frac{1}{8}$ parte de su movimiento. Si el péndulo era separado de la perpendicular hasta una distancia de 2 pulgadas y después liberado, de forma que en todo su descenso describía un arco de 2 pulgadas, y en la primera oscilación completa, compuesta por el descenso y el ascenso subsiguiente, un arco de casi 4 pulgadas, en 164 oscilaciones perdía $\frac{1}{8}$ parte de su movimiento, por lo que en su último ascenso describía un arco de $1\frac{3}{4}$ pulgadas. Si en el primer descenso describía un arco de 4 pulgadas, en 121 oscilaciones perdía $\frac{1}{8}$ parte de su movimiento, describiendo en su último ascenso un arco de $3\frac{1}{2}$ pulgadas. Si en el primer descenso describía un arco de 8, 16, 32 ó 64 pulgadas, perdía $\frac{1}{8}$ parte de su movimiento en 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ oscilaciones, respectivamente. En consecuencia, la diferencia entre los arcos descritos en el primer descenso y el último ascenso fue en los casos primero, segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto, de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 pulgadas.

respectivamente. Divídanse estas diferencias por el número de oscilaciones en cada caso, y en una oscilación media, donde se describió un arco de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 y 120 pulgadas, la diferencia de los arcos descritos en el descenso y el subsiguiente ascenso será de $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes de pulgada, respectivamente. Pero estas diferencias son en las oscilaciones mayores aproximadamente como el cuadrado de los arcos descritos, y en las oscilaciones menores superan algo esta razón; en consecuencia (por el Corolario II, Proposición XXXI de este Libro), la resistencia del globo, cuando se mueve muy velozmente, varía como el cuadrado de la velocidad, y cuando se mueve lentamente varía en una razón algo mayor.

Represente ahora V la velocidad máxima en cualquier oscilación, sean A, B y C cantidades dadas, y supóngase que la diferencia de los arcos es $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^2$. Puesto que las velocidades máximas son en la cicloide como $\frac{1}{2}$ de las cuerdas de dichos arcos, por lo que a iguales arcos son mayores en la cicloide que en el círculo en una razón de $\frac{1}{2}$ de los arcos a sus cuerdas, pero los tiempos son mayores en el círculo que en la cicloide en razón inversamente proporcional a la velocidad, es evidente que las diferencias de los arcos (que son como la resistencia y el cuadrado del tiempo juntamente) son prácticamente iguales en ambas curvas, pues en la cicloide las diferencias deben, por un lado, aumentarse, con la resistencia, en aproximadamente el cuadrado de la razón del arco a la cuerda, debido a la velocidad aumentada en la razón simple de la misma, y, por otro lado, disminuirse, con el cuadrado del tiempo, en el mismo cuadrado de la razón. En consecuencia, para reducir estas observaciones a la cicloide debemos tomar las mismas diferencias de arcos que se observaron en el círculo, y suponer las velocidades máximas análogas a la mitad, o a los arcos completos, es decir, a los números $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. En consecuencia, en los casos segundo, cuarto y sexto póngase 1, 4 y 16 por V, y la diferencia de los arcos será $\frac{\frac{1}{2}}{121}=A+B+C$ en el segundo caso, $\frac{2}{35\frac{1}{2}}=4A+8B+16C$ en el cuarto caso y $\frac{8}{9\frac{2}{3}}=16A+64B+256C$ en el sexto caso. Resueltas estas ecuaciones, tenemos que $A=0{,}0000916$, $B=0{,}0010847$ y

$C = 0{,}0029558$. En consecuencia, la diferencia de los arcos es como $0{,}0000916V + 0{,}0010847V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558V^2$; en consecuencia, puesto que (por el Corolario de la Proposición XXX, aplicado a este caso) la resistencia del globo en la mitad del arco descrito al oscilar, donde la velocidad es V, es a su peso como $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ a la longitud del péndulo, si se sustituyen A, B y C por los números hallados, la resistencia del globo será a su peso como $0{,}0000583V + 0{,}0007593V^{\frac{3}{2}} + 0.0022169V^2$ a la longitud del péndulo entre el centro de suspensión y la regla, es decir, a 121 pulgadas. En consecuencia, puesto que V representa 1 en el segundo caso, 4 en el cuarto caso y 16 en el sexto caso, la resistencia será al peso del globo como 0,0030345 a 121 en el segundo caso, como 0,041748 a 121 en el cuarto y como 0,61705 a 121 en el sexto.

El arco descrito por el punto marcado en el hilo fue en el sexto caso $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, ó $119\frac{5}{29}$ pulgadas. En consecuencia, puesto que el radio medía 121 pulgadas, y la longitud del péndulo entre el punto de suspensión y el centro del globo era de 126, el centro del globo describió un arco de $124\frac{3}{31}$ pulgadas. Como la velocidad máxima del cuerpo oscilante, debido a la resistencia del aire, no coincide con el punto más bajo del arco descrito, sino aproximadamente con el punto medio del arco completo, esta velocidad será aproximadamente la misma que si el globo, en todo su descenso por un medio no resistente, describiera $62\frac{3}{62}$ pulgadas, la mitad del arco, y ello en una cicloide, a la que hemos reducido el movimiento del péndulo. En consecuencia, dicha velocidad será igual a la que el globo adquiriría cayendo perpendicularmente desde una altura igual al seno verso de dicho arco. Pero en la cicloide este seno verso es al arco $62\frac{3}{62}$ como el mismo arco a dos veces la longitud del péndulo, 252, y en consecuencia igual a 15,278 pulgadas. En consecuencia, a esta velocidad, el globo tropieza con una resistencia que es a su peso como 0,61705 a 121, o (si solamente tomamos la parte de la resistencia que está en razón del cuadrado de la velocidad) como 0,56752 a 121.

Mediante un experimento hidrostático determiné que el peso de aquel globo de madera era al peso de un globo de agua del mismo volumen como 55 a 97; en consecuencia, puesto que 121 está en la misma razón a 213,4, la resistencia que se opone a este

globo de agua cuando se mueve hacia adelante con la velocidad arriba mencionada será a su peso como 0,56752 a 213,4, es decir, como 1 a $376\frac{1}{50}$. Como el peso de un globo de agua, en el tiempo en que el globo, con una velocidad uniformemente continuada, describe una longitud de 30,556 pulgadas, generará toda esa velocidad en el globo que cae, es evidente que la fuerza de la resistencia uniformemente continuada en el mismo tiempo restará una velocidad que será menor que la otra en una razón de 1 a $376\frac{1}{50}$, es decir, la $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ parte de la velocidad total. En consecuencia, en el tiempo empleado para describir, con la misma velocidad uniformemente continuada, la longitud de su semidiámetro, ó $3\frac{7}{16}$ pulgadas, el globo perdería una $\frac{1}{3342}$ parte de su movimiento.

Conté también las oscilaciones en las que el péndulo perdió $\frac{1}{4}$ parte de su movimiento. En la siguiente tabla los números superiores representan la longitud del arco descrito en el primer descenso, expresada en pulgadas y fracciones de pulgada; los números medios representan la longitud del arco descrito en el último ascenso, y los números inferiores son los de las oscilaciones. Doy cuenta de este experimento por ser más preciso que aquel donde sólo se perdió $\frac{1}{8}$ parte del movimiento. Dejo los cálculos en manos de quienes estén dispuestos a realizarlos.

Primer descenso	2	4	8	16	32	64
Ultimo ascenso	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Núm. de oscilaciones	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Después colgué del mismo hilo un globo de plomo de un diámetro de dos pulgadas y un peso de $26\frac{1}{4}$ onzas *troy*, de forma que entre el centro del globo y el punto de suspensión hubiera un intervalo de $10\frac{1}{2}$ pies, y conté las oscilaciones en que se perdía una parte dada del movimiento. La primera de las siguientes tablas muestra el número de oscilaciones en que se perdió $\frac{1}{8}$ parte del movimiento total; la segunda el número de oscilaciones en que se perdió $\frac{1}{4}$ parte del mismo.

Primer descenso	1	2	4	8	16	32	64
Ultimo ascenso	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Núm. oscilaciones	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
Primer descenso	1	2	4	8	16	32	64
Ultimo ascenso	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Núm. de oscilaciones	510	518	420	318	204	121	70

Seleccionando en la primera tabla las observaciones tercera, quinta y séptima, y expresando las velocidades máximas en estas observaciones particularmente por los números 1, 4 y 6, respectivamente, y en general por la cantidad V, como más arriba, resultará $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$ en la tercera observación, $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ en la quinta observación y $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$ en la séptima observación. Estas ecuaciones, resueltas, dan $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Por tanto, la resistencia del globo moviéndose con la velocidad V estará en la misma razón a su peso de $26\frac{1}{4}$ onzas que $0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2$ a 121 pulgadas, la longitud del péndulo. Y si solamente consideramos la parte de la resistencia que es como el cuadrado de la velocidad, será al peso del globo como $0{,}000659V^2$ a 121 pulgadas. Pero en el primer experimento esta parte de la resistencia era al peso del globo de madera, $57\frac{7}{22}$ onzas, como $0{,}002217V^2$ a 121, por lo que la resistencia del globo de madera es a la resistencia del globo de plomo (a igualdad de velocidades) como $57\frac{7}{22}$ por 0,002217 a $26\frac{1}{4}$ por 0,000659, es decir, como $7\frac{1}{3}$ a 1. Los diámetros de los globos eran de $6\frac{7}{8}$ y 2 pulgadas, y los cuadrados de los mismos son entre sí aproximadamente con $47\frac{1}{4}$ y 4, ó $11\frac{13}{16}$ y 1. En consecuencia, las resistencias de estos dos globos igualmente veloces estaban en razón menor que la del cuadrado de los diámetros. Pero no hemos considerado todavía la resistencia del hilo, que era ciertamente muy considerable y debe sustraerse a la resistencia determinada para los péndulos. No pude determinarla con exactitud, pero observé que era mayor que $\frac{1}{3}$ parte de la resistencia total del péndulo menor, de donde deduje que las resistencias de los globos, sustraída la resistencia del hilo, están aproximadamente en el cuadrado de la razón de sus diámetros. Pues la razón de $7\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ a $1 - \frac{1}{3}$, o de $10\frac{1}{2}$ a 1 no difiere mucho del cuadrado de la razón de los diámetros $11\frac{13}{16}$ a 1.

Como el momento de la resistencia del hilo es menor en globos más grandes, hice también la experiencia con un globo de un diámetro de $18\frac{3}{4}$ pulgadas. La longitud del péndulo entre el punto de suspensión y el centro de oscilación era de $122\frac{1}{2}$ pulgadas, y entre el punto de suspensión y el nudo del hilo de $109\frac{1}{2}$ pulgadas. El arco descrito por el nudo en el primer descenso fue de 32 pulgadas. El arco descrito por el mismo nudo

en el último ascenso, tras cinco oscilaciones, fue de 28 pulgadas. La suma de los arcos, o el arco total descrito en una oscilación media, fue de 60 pulgadas, y la diferencia de los arcos 4 pulgadas. La $\frac{1}{10}$ parte, o la diferencia entre el descenso y el ascenso en una oscilación media, es $\frac{2}{5}$ de pulgada. Entonces, así como el radio $109\frac{1}{2}$ es al radio $122\frac{1}{2}$, así también el arco entero de 60 pulgadas descrito por el nudo en una oscilación media es al arco entero de $67\frac{1}{8}$ pulgadas descrito por el centro del globo en una oscilación media, y así también es la diferencia $\frac{2}{5}$ a una nueva diferencia 0,4475. Si se mantuviera la longitud del arco descrito y se aumentara la longitud del péndulo en la razón de 126 a $122\frac{1}{2}$, el tiempo de la oscilación aumentaría y la velocidad del péndulo disminuiría como la raíz cuadrada de dicha razón, por lo que la diferencia 0,4475 de los arcos descritos en el descenso y subsiguiente ascenso permanecería. Y si el arco descrito se aumentara en la razón de $124\frac{3}{31}$ a $67\frac{1}{8}$, la diferencia 0,4475 aumentaría como el cuadrado de dicha razón, convirtiéndose en 1,5295. Todo ello en el supuesto de que la resistencia del péndulo sea como el cuadrado de la velocidad. En consecuencia, si el péndulo describe el arco entero de $124\frac{3}{31}$ pulgadas y su longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación es de 126 pulgadas, la diferencia de los arcos descritos en el descenso y subsiguiente ascenso será de 1,5295 pulgadas. Y esta diferencia, multiplicada por el peso del globo pendular, que era de 208 onzas, arroja un producto de 318,136. Cuando el centro de oscilación del péndulo de madera arriba mencionado, situado a 126 pulgadas del punto de suspensión, describió el arco entero de $124\frac{3}{31}$ pulgadas, la diferencia de los arcos descritos en el descenso y ascenso fue de $\frac{126}{121}$ por $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Esto, multiplicado por el peso del globo, $57\frac{7}{22}$ onzas, produce 49,396. Pero multiplico estas diferencias por los pesos de los globos con el fin de determinar sus resistencias, pues las diferencias obedecen a las resistencias, y son directamente proporcionales a las resistencias e inversamente proporcionales a los pesos. En consecuencia, las resistencias son como los números 318,136 y 49,396. Pero la parte de la resistencia del globo menor que es como el cuadrado de la velocidad era a la resistencia total como 0,56752 a 0,61675, es decir, como 45,453 a 49,396, mientras que esa parte de la resistencia del globo mayor es casi igual a la resistencia total, por lo que dichas partes son aproximadamente como 318,136 y 45,453, es decir, como 7 y 1. Pero los diámetros de los globos

son $18\frac{3}{4}$ y $6\frac{7}{8}$, y sus cuadrados $351\frac{9}{16}$ y $47\frac{17}{64}$ son como 7,438 y 1, es decir, aproximadamente como las resistencias de los globos 7 y 1. La diferencia de estas razones es ligeramente mayor que la que pueda deberse a la resistencia del hilo. En consecuencia, las partes de las resistencias que, cuando los globos son iguales, son como los cuadrados de las velocidades, son también, cuando las velocidades son iguales, como los cuadrados de los diámetros de los globos.

Pero el mayor de los globos que utilicé en estos experimentos no era perfectamente esférico, por lo que en este cálculo he omitido, para abreviar, algunas precisiones, sin preocuparme mucho por la exactitud en un experimento que no era muy exacto. Desearía que estos experimentos fueran realizados de nuevo con otros globos, de mayor tamaño, más numerosos y de formas más precisas, pues la demostración del vacío depende de ellos. Si se toman los globos en proporción geométrica, con diámetros, supongamos, de 4, 8, 16, 32 pulgadas, de la progresión observada en los experimentos podrá inferirse lo que ocurriría si los globos fueran aún mayores.

Con el fin de comparar entre sí las resistencias de diversos fluidos, hice las pruebas siguientes. Me procuré un recipiente de madera de 4 pies de largo, 1 pie de ancho y un pie de alto. Llené el recipiente, que no tenía tapadera, con agua de manantial y, tras introducir algunos péndulos en él, los hice oscilar en el agua. Observé que un globo de plomo con un peso de $166\frac{1}{6}$ onzas y diámetro de $3\frac{5}{8}$ pulgadas se movía como se expone en la siguiente tabla; la longitud del péndulo desde el punto de suspensión hasta un cierto punto marcado en el hilo era de 126 pulgadas, y hasta el centro de oscilación $134\frac{3}{8}$ pulgadas.

Arco descrito en el primer descenso por un punto marcado en el hilo, en pulgadas

$64 . 32 . 16 . 8 . 4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4}$

Arco descrito en el último ascenso, en pulgadas

$48 . 24 . 12 . 6 . 3 . 1\frac{1}{2} . \frac{3}{4} . \frac{3}{8} . \frac{3}{16}$

Diferencias de los arcos, proporcionales al movimiento perdido, en pulgadas

$16 . 8 . 4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16}$

Numero de oscilaciones en el agua

$\frac{29}{60} . 1\frac{1}{5} . 3 . 7 . 11\frac{1}{4} . 12\frac{2}{3} . 13\frac{1}{3}$

Número de oscilaciones en el aire

$85\frac{1}{2} . 287 . 535$

En los experimentos de la cuarta columna se perdieron iguales movimientos en 535 oscilaciones en el aire y $1\frac{1}{5}$ en el agua. Las oscilaciones en el aire fueron, desde luego, algo más veloces que en el agua. Pero si las oscilaciones en el agua fueran aceleradas en razón suficiente para que los movimientos del péndulo fueran igualmente veloces en ambos medios, seguiría habiendo $1\frac{1}{5}$ oscilaciones en el agua, y con ellas se perdería la misma cantidad de movimiento que antes, porque la resistencia y el cuadrado del tiempo aumentan y disminuyen, respectivamente, en la misma razón cuadrada. En consecuencia, al tener los péndulos la misma velocidad, en 535 oscilaciones en el aire se perdieron los mismos movimientos que en $1\frac{1}{5}$ oscilaciones en el agua, por lo que la resistencia del péndulo en el agua es a su resistencia en el aire como 535 a $1\frac{1}{5}$. Esta es la proporción de las resistencias totales en lo que respecta a la cuarta columna.

Represente ahora $AV+CV^2$ la diferencia de los arcos descritos por el globo en el descenso y subsiguiente ascenso, moviéndose por el aire a la velocidad máxima V, y, dado que la velocidad máxima en la cuarta columna es a la velocidad máxima en la primera columna como 1 a 8, y la diferencia de los arcos en la cuarta columna a la diferencia en la primera columna como $\frac{2}{535}$ a $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, o como $85\frac{1}{2}$ a 4280, póngase en estos casos 1 y 8 por las velocidades y $85\frac{1}{2}$ y 4280 por las diferencias de los arcos, y $A+C$ será $=85\frac{1}{2}$, $8A+64C=4280$ o $A+8C=535$. Resolviendo estas ecuaciones resultará que $7C=449\frac{1}{2}$, $C=64\frac{3}{14}$, y $A=21\frac{2}{7}$, por lo que la resistencia, que es como $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, será como $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. En consecuencia, en la cuarta columna, donde la velocidad era 1, la resistencia total es a su parte proporcional al cuadrado de la velocidad como $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$ o $61\frac{12}{17}$ a $48\frac{9}{56}$; en consecuencia, la resistencia del péndulo en el agua es a la parte proporcional al cuadrado de la velocidad de la resistencia en el aire, en movimientos veloces la única parte que merece ser considerada, como $61\frac{12}{17}$ a $48\frac{9}{56}$ y 535 a $1\frac{1}{5}$ juntamente, es decir, como 571 a 1. Si todo el hilo del péndulo que oscilaba en el agua hubiera estado sumergido, su resistencia habría sido aún mayor, por lo que la resistencia del péndulo oscilando en el agua, es decir, la parte proporcional al cuadrado de la velocidad, que sólo hay que considerar para los cuerpos veloces, es a la resistencia del mismo péndulo completo, oscilando en el aire con la misma velocidad, aproximadamente como

850 a 1, es decir, aproximadamente como la densidad del agua a la densidad del aire.

En estos cálculos deberíamos haber tomado también en cuenta la parte de la resistencia del péndulo en el agua que era como el cuadrado de la velocidad. Observé, sin embargo, que (aunque quizá parezca extraño) la resistencia en el agua aumentaba en más del cuadrado de la razón de la velocidad. Tratando de esclarecer la causa pensé que el recipiente podía ser demasiado estrecho para el volumen del globo pendular, obstruyendo por su estrechez el movimiento del agua al ceder ante el globo oscilante. En efecto, al sumergir un globo pendular cuyo diámetro era sólo de una pulgada, la resistencia aumentó aproximadamente como el cuadrado de la velocidad. Lo probé fabricando un péndulo con dos globos, de los que el menor y más bajo oscilaba en el agua y el mayor y más alto, sujeto al hilo justo encima del agua, oscilaba en el aire, ayudando al movimiento del péndulo y llevándolo más lejos. Los experimentos realizados con este dispositivo arrojaron los resultados que se exponen en la siguiente tabla.

Arco descrito en el primer descenso

$$16 \,.\, 8 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{4}$$

Arco descrito en el último ascenso

$$12 \,.\, 6 \,.\, 3 \,.\, 1\tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{3}{4} \,.\, \tfrac{3}{8} \,.\, \tfrac{3}{16}$$

Diferencia de arcos, proporcional al movimiento perdido

$$4 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, \tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{1}{4} \,.\, \tfrac{1}{8} \,.\, \tfrac{1}{16}$$

Número de oscilaciones

$$3\tfrac{3}{8} \,.\, 6\tfrac{1}{2} \,.\, 12\tfrac{1}{12} \,.\, 21\tfrac{1}{5} \,.\, 34 \,.\, 53 \,.\, 62\tfrac{1}{5}$$

Para comparar entre sí las resistencias de los medios, también hice oscilar péndulos de hierro en mercurio. La longitud del cable de hierro era aproximadamente 3 pies, y el diámetro del globo pendular aproximadamente $\frac{1}{3}$ de pulgada. Fijé al cable, justo encima del mercurio, otro globo de plomo de tamaño suficiente para continuar el movimiento del péndulo durante algún tiempo. Después llené sucesivamente con mercurio y agua común un recipiente capaz de contener aproximadamente 3 libras de mercurio, con el fin de determinar la proporción de sus resistencias haciendo oscilar el péndulo

sucesivamente en cada uno de los dos fluidos. La resistencia del mercurio demostró ser a la resistencia del agua como aproximadamente 13 ó 14 a 1, es decir, como la densidad del mercurio a la densidad del agua. Cuando utilicé un globo pendular algo mayor, como uno cuyo diámetro era aproximadamente $\frac{1}{2}$ ó $\frac{2}{3}$ de pulgada, la resistencia del mercurio demostró ser a la resistencia del agua como aproximadamente 12 ó 10 a 1. Pero el primer experimento es más digno de confianza, porque en el último el recipiente era demasiado estrecho en proporción al volumen del globo sumergido, y el recipiente debía haber sido ampliado al mismo tiempo que el globo. Tenía intención de repetir estos experimentos con recipientes más grandes, metales fundidos y otros líquidos, tanto calientes como fríos, pero nunca tuve tiempo libre suficiente para probarlos todos. Por otra parte, lo ya descrito demuestra suficientemente que la resistencia de los cuerpos que se mueven velozmente es aproximadamente proporcional a las densidades de los fluidos por los que se mueven. No digo que con exactitud, pues los fluidos más tenaces, a igual densidad, resistirán sin duda más que los más líquidos; el aceite frío más que el caliente, el aceite caliente más que el agua de lluvia y el agua más que el espíritu de vino. Pero en líquidos que sean lo bastante fluidos, como en aire, en agua dulce y salada, en espíritus de vino y de trementina, en sales, en aceite calentado y limpio de heces por destilación, en aceite de vitriolo, en mercurio, metales fundidos y otros semejantes, suficientemente fluidos para retener durante algún tiempo el movimiento que les impone la agitación del recipiente, y que al derramarse se distribuyen fácilmente en gotas, no tengo la menor duda de que la norma establecida es lo bastante exacta, especialmente cuando el experimento se realiza con cuerpos pendulares más grandes y de movimiento más veloz.

Finalmente, puesto que algunos opinan que existe un cierto medio etéreo, extremadamente raro y sutil, que invade libremente los poros de todo cuerpo, y que de tal medio que invade los poros de los cuerpos debe surgir necesariamente alguna resistencia, para probar si la resistencia que experimentamos en los cuerpos en movimiento actúa tan sólo sobre su superficie exterior, o si sus partes internas tropiezan con alguna resistencia digna de tenerse en consideración en sus superficies, dispuse el siguiente experimento. Colgué una caja redonda de madera de pino, sujeta a un hilo de 11 pies de longitud, de un gancho de acero, utilizando un anillo del mismo metal, con el fin de dar al

péndulo la mencionada longitud. El gancho tenía un borde afilado y cóncavo en su parte superior, para que la parte superior del anillo, que presionaba sobre el borde, pudiera moverse con la mayor libertad posible; até el hilo al arco inferior del anillo. Una vez preparado el péndulo, lo separé de la perpendicular hasta una distancia de aproximadamente 6 pies, en un plano perpendicular al borde del gancho para evitar que el anillo resbalara durante las oscilaciones a lo largo del borde del gancho, pues el punto de suspensión, donde el anillo entra en contacto con el gancho, debe permanecer inmóvil. Marqué con precisión el lugar al que desplacé el péndulo y, liberándolo, marqué los tres lugares a que volvió tras la primera, segunda y tercera oscilaciones. Lo repetí muchas veces; para determinar dichos lugares con la mayor exactitud posible. Después llené la caja de plomo y otros metales pesados que tenía a mano. Antes de esto, sin embargo, pesé la caja vacía, la parte del hilo que la rodeaba y la mitad de la parte restante del mismo extendida entre el gancho y la caja colgada, pues el hilo, así extendido, siempre actúa sobre el péndulo con la mitad de su peso cuando el péndulo es separado de la perpendicular. A este peso añadí el peso del aire contenido en la caja. El peso total resultó ser aproximadamente $\frac{1}{78}$ del peso de la caja llena de metales. Después, como la caja llena de metales, al extender el hilo con su peso, aumentaba la longitud del péndulo, acorté el hilo para que la longitud del péndulo fuera al oscilar la misma que antes. Después, separando el péndulo hasta el primer lugar marcado y liberándolo, conté unas 77 oscilaciones hasta que la caja retornó a la segunda marca, y otras tantas hasta que llegó a la tercera marca, y de nuevo otras tantas hasta que llegó a la cuarta marca. De ello deduzco que la resistencia total de la caja llena no estaba en proporción mayor que 78 a 77 respecto a la resistencia de la caja vacía. Pues si sus resistencias fueran iguales, la caja llena, por razón de su inercia, que era 78 veces mayor que la inercia de la caja vacía, tendría que haber continuado su movimiento oscilatorio en la misma proporción, retornando, por tanto, a las marcas tras 78 oscilaciones. Pero retornó a ellas tras 77 oscilaciones.

Represente A, en consecuencia, la resistencia de la caja sobre su superficie exterior, B la resistencia de la caja vacía en su superficie interior, y si las resistencias a las partes interiores de cuerpos igualmente veloces son como la materia, o el número de partículas resistidas, la resistencia que se opone a las partes

interiores de la caja llena será 78B. En consecuencia, la resistencia total A+B de la caja vacía será a la resistencia total A+78B de la caja llena como 77 a 78 y, por sustracción, A+B a 77B como 77 a 1, de donde A+B será a B como 77×77 a 1 y, de nuevo por sustracción, A a B como 5928 a 1. En consecuencia, la resistencia de la caja vacía en sus partes internas será más de 5000 veces menor que la resistencia en su superficie exterior. Este razonamiento está basado en la suposición de que la mayor resistencia de la caja llena no se debe a alguna otra causa latente, sino tan sólo a la acción de algún fluido sutil sobre el metal incluido.

Relato este experimento de memoria por haber perdido el papel donde lo describía. Me he visto obligado, en consecuencia, a omitir algunas fracciones que escapan a mi memoria, y no tengo ya tiempo libre para repetirlo. La primera vez que lo realicé, la caja llena fue retardada antes porque el gancho era débil. Pude determinar que la causa era que el gancho no tenía fuerza suficiente para soportar el peso de la caja, por lo que, al oscilar ésta de un lado a otro, el gancho se doblaba en uno u otro sentido. Busqué entonces un gancho lo suficientemente fuerte como para que el punto de suspensión permaneciera inmóvil, y después todo sucedió como más arriba se describe.

SECCION VII

Sobre el movimiento de los fluidos y la resistencia a cuerpos proyectados.

PROPOSICIÓN XXXII. TEOREMA XXVI

Supónganse dos sistemas semejantes de cuerpos consistentes de un número igual de partículas, y sean las partículas correspondientes semejantes y proporcionales, cada una de las de un sistema a cada una de las del otro, con la misma situación entre sí y la misma razón dada de densidad a las demás; supóngase que empiezan a moverse entre sí en tiempos proporcionales y con movimientos iguales (es decir, las de un sistema entre sí y las del otro entre sí). Si las partículas de un mismo sistema no se tocan entre sí, salvo en los momentos de reflexión, ni se atraen o repelen, salvo con fuerzas aceleratívas que son inversamente proporcionales a los diámetros de las partículas correspondientes y directamente proporcionales a los cuadrados de las velocidades, afirmo que las partículas de estos sistemas seguirán moviéndose entre sí con movimientos iguales y en tiempos proporcionales.

Se dice que cuerpos iguales en situaciones iguales se mueven entre sí con movimientos iguales y en tiempos proporcionales cuando su situación entre sí sigue siendo igual al transcurrir dichos tiempos; como si comparamos las partículas de un sistema con las partículas correspondientes de otro. Por tanto, los tiempos en que partículas correspondientes describirán partes semejantes y proporcionales de figuras semejantes serán proporcionales. En consecuencia, si suponemos dos sistemas de esta índole, las partículas correspondientes, por razón de la semejanza de los movimientos iniciales, continuarán moviéndose

con movimientos iguales siempre que se muevan sin tropezar entre sí; pues si sobre ellas no actúa fuerza alguna, proseguirán uniformemente por una línea recta, según la primera Ley. Pero si se perturban entre sí con determinadas fuerzas, y estas fuerzas son inversamente proporcionales a los diámetros de las partículas correspondientes y directamente proporcionales a los cuadrados de las velocidades, como las partículas están en situaciones iguales y sus fuerzas son proporcionales, las fuerzas totales que perturban a las partículas correspondientes, compuestas por cada una de las fuerzas de perturbación (por el Corolario II de las Leyes), tendrán direcciones iguales y el mismo efecto que si concernieran a centros situados igualmente entre las partículas, y estas fuerzas totales serán entre sí como las diversas fuerzas que las componen, es decir, inversamente proporcionales a los diámetros de las partículas correspondientes y directamente proporcionales a los cuadrados de las velocidades, y, en consecuencia, harán que las partículas correspondientes sigan describiendo figuras iguales. Ello será así (por los Corolarios I y VIII, Proposición IV, Libro I) si dichos centros están en reposo; y aunque se muevan, sus situaciones entre las partículas del sistema seguirán siendo semejantes, por razón de la semejanza de las traslaciones, por lo que los cambios introducidos en las figuras descritas por las partículas serán también semejantes. Así que los movimientos de partículas correspondientes y semejantes seguirán siendo semejantes hasta su primer encuentro entre sí, de donde surgirán colisiones y reflexiones semejantes, que darán a su vez lugar a movimientos semejantes de las partículas entre sí (según lo que acaba de mostrarse), hasta que vuelvan a tropezar entre sí, y así *ad infinitum*. Q.E.D.

COROLARIO I. Por tanto, si cualesquiera dos cuerpos semejantes y en igual situación con respecto a las partículas correspondientes de los sistemas comienzan a moverse entre sí de la misma forma y en tiempos proporcionales, y sus volúmenes y densidades son mutuamente como los volúmenes y densidades de las partículas correspondientes, dichos cuerpos seguirán moviéndose de la misma forma y en tiempos proporcionales, pues con las partes mayores de ambos sistemas ocurre lo mismo que con las partículas.

COROLARIO II. Si todas las partes semejantes y en situación semejante de ambos sistemas están entre sí en reposo, y dos de ellas, mayores que las demás y mutuamente correspondientes en ambos sistemas, comienzan a moverse por líneas igualmente

dispuestas y con cualquier movimiento semejante, excitarán movimientos semejantes en las restantes partes de los sistemas y seguirán moviéndose entre dichas partes de la misma forma y en tiempos proporcionales, por lo que describirán espacios proporcionales a sus diámetros.

PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA XXVII

Supuestas las mismas cosas, afirmo que las partes mayores de los sistemas son resistidas en una razón compuesta del cuadrado de la razón de sus velocidades, el cuadrado de la razón de sus diámetros y la razón simple de la densidad de las partes de los sistemas.

Pues la resistencia obedece en parte a las fuerzas centrípetas o centrífugas con que las partículas del sistema actúan entre sí y en parte a las colisiones y reflexiones de las partículas y las partes mayores. Las resistencias de la primera especie son entre sí como todas las fuerzas motrices a que obedecen, es decir, como todas las fuerzas aceleratívas y las cantidades de materia en las partes correspondientes, es decir (por lo supuesto), directamente proporcionales a los cuadrados de las velocidades e inversamente proporcionales a las distancias de las partículas correspondientes, y directamente proporcionales a las cantidades de materia en las partes correspondientes. En consecuencia, puesto que las distancias de las partículas en un sistema son a las distancias correspondientes de las partículas en el otro como el diámetro de una partícula o parte en el primer sistema al diámetro de la partícula o parte correspondiente en el otro, y puesto que las cantidades de materia son como las densidades de las partes y los cubos de los diámetros, las resistencias son entre sí como los cuadrados de las velocidades y los cuadrados de los diámetros y las densidades de las partes de los sistemas. Q.E.D. Las resistencias de la última especie son como el número de reflexiones correspondientes y las fuerzas de dichas reflexiones juntamente; pero las reflexiones son entre sí directamente proporcionales a las velocidades de las partes correspondientes e inversamente proporcionales a los espacios entre sus reflexiones. Y las fuerzas de las reflexiones son como las velocidades y las magnitudes y las densidades de las partes correspondientes juntamente, es decir, como las velocidades y los cubos de los

diámetros y las densidades de las partes. Y, uniendo todas estas razones, las resistencias de las partes correspondientes son entre sí como los cuadrados de las velocidades y los cuadrados de los diámetros y las densidades de las partes juntamente. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, si dichos sistemas son dos fluidos elásticos, como nuestro aire, y sus partes están en reposo entre sí, y dos cuerpos semejantes, proporcionales en volumen y densidad a las partes de los fluidos y situados semejantemente entre dichas partes, son en cualquier forma proyectados por líneas semejantemente dispuestas, y las fuerzas acelerativas con que las partículas de los fluidos actúan entre sí son inversamente proporcionales a los diámetros de los cuerpos proyectados y directamente proporcionales a los cuadrados de sus velocidades, los cuerpos excitarán en los fluidos movimientos semejantes en tiempos proporcionales y describirán espacios semejantes y proporcionales a sus diámetros.

COROLARIO II. En consecuencia, en un mismo fluido, un cuerpo proyectado que se mueve velozmente tropieza con una resistencia aproximadamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Pues si las fuerzas con que partículas distantes actúan entre sí aumentaran como el cuadrado de la velocidad, el cuerpo proyectado sería resistido exactamente en el cuadrado de la misma razón, por lo que en un medio donde las partes, cuando están distanciadas, no actúan entre sí con fuerza alguna, la resistencia es exactamente como el cuadrado de la velocidad. Supóngase, en consecuencia, tres medios A, B, C, compuestos por partes semejantes e iguales dispuestas regularmente a distancias iguales. Supóngase que las partes de los medios A y B se separan con fuerzas que son entre sí como T y V, y que las partes del medio C carecen por completo de dichas fuerzas. Si cuatro cuerpos iguales, D, E, F, G, se mueven en dichos medios, los dos primeros D y E, en los dos primeros A y B, y los otros dos, F y G, en el tercero, C, y la velocidad del cuerpo D es a la velocidad del cuerpo E, y la del cuerpo F a la del cuerpo G, como la raíz cuadrada de la razón de la fuerza T a la fuerza V, la resistencia del cuerpo D será a la resistencia del cuerpo E, y la del cuerpo F a la del cuerpo G, como el cuadrado de las velocidades. En consecuencia, la resistencia del cuerpo D será a la resistencia del cuerpo F como la resistencia del cuerpo E a la resistencia del cuerpo G. Sean los cuerpos D y F igualmente veloces, séanlo también los cuerpos E y G, y, aumentando en cualquier razón las velocidades de los cuerpos D y F y

disminuyendo en el cuadrado de la misma razón las fuerzas de las partículas del medio B, el medio B se aproximará a voluntad a la forma y condición del medio C, por lo que las resistencias en estos medios de los cuerpos E y G, igualmente veloces, se aproximarán continuamente a la igualdad, de forma que su diferencia terminará por ser menor que cualquiera dada. En consecuencia, puesto que las resistencias de los cuerpos D y F son entre sí como las resistencias de los cuerpos E y G, también aquéllas se aproximarán de la misma manera a la razón de igualdad. En consecuencia, los cuerpos D y F tropiezan con resistencias muy aproximadamente iguales cuando se mueven con gran velocidad; por tanto, puesto que la resistencia del cuerpo F está en el cuadrado de la razón de la velocidad, la resistencia de cuerpo D estará aproximadamente en la misma razón.

COROLARIO III. De esta forma, la resistencia de un cuerpo que se mueva muy velozmente por un fluido elástico es casi la misma que si las partes del fluido carecieran de fuerzas centrífugas y no se alejasen unas de otras, siempre que la elasticidad del fluido obedezca a las fuerzas centrífugas de las partículas y la velocidad sea lo bastante grande como para no dar a las partículas tiempo suficiente para actuar.

COROLARIO IV. Puesto que las resistencias de cuerpos semejantes e igualmente veloces son, en un medio cuyas partes distantes no se alejan unas de otras, como los cuadrados de los diámetros, las resistencias que se oponen a cuerpos que se muevan a velocidades muy grandes e iguales por un fluido elástico serán aproximadamente como los cuadrados de los diámetros.

COROLARIO V. Y puesto que cuerpos semejantes, iguales e igualmente veloces, al moverse por medios de la misma densidad cuyas partículas no se alejan unas de otras, tropezarán con una cantidad igual de materia en tiempos iguales, tanto si las partículas que componen el cuerpo son muchas y pequeñas como si son pocas y grandes, imprimiendo, por tanto, a dicha materia una cantidad igual de movimiento y sufriendo, a su vez (según la tercera Ley del Movimiento), una reacción igual de la misma, es decir, siendo igualmente resistidos, también es evidente que cuando los cuerpos se mueven con velocidad extremada por fluidos elásticos de la misma densidad, sus resistencias son aproximadamente iguales, tanto si los fluidos están compuestos por partes gruesas como si están compuestos por partes muy

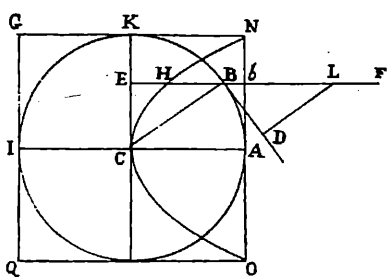
sutiles. Pues la resistencia de un proyectil que se mueve con extremada y grande celeridad no disminuye gran cosa por la sutileza del medio.

COROLARIO VI. Todo ello es así en fluidos cuya fuerza elástica obedece a las fuerzas centrífugas de las partículas. Pero si dicha fuerza obedece a alguna otra causa, como la expansión de las partículas propia de la lana o de las ramas de los árboles, o a cualquier otra causa que impida que las partículas se muevan libremente entre sí, la resistencia, por razón de la menor fluidez del medio, será mayor que en los anteriores Corolarios.

PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA XXVIII

Si en un medio raro, compuesto por partículas iguales libremente dispuestas a iguales distancias unas de otras, un globo y un cilindro de igual diámetro se mueven con igual velocidad en la dirección del eje del cilindro, la resistencia del globo será la mitad que la del cilindro.

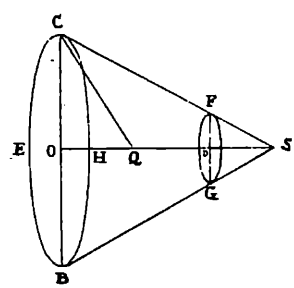
Puesto que la acción del medio sobre el cuerpo es la misma (por el Corolario V de las leyes) tanto si el cuerpo se mueve en un medio en reposo como si las partículas del medio inciden con la misma velocidad sobre el cuerpo en reposo, supongamos que el cuerpo está en reposo y veamos con qué fuerza sería impelido por el medio en movimiento. Represente, en consecuencia, ABKI un cuerpo esférico descrito desde el centro C con semidiámetro CA, y supongamos que las partículas del medio inciden con una velocidad dada sobre dicho cuerpo esférico por líneas rectas paralelas a AC; sea FB una de dichas líneas rectas. Tómese LB en FB igual al semidiámetro CB y trácese BD tangente a la esfera en B. Abátanse sobre KC y BD las perpendiculares BE, LD, y la fuerza con que una partícula del medio, incidiendo oblicuamente sobre el globo en la dirección FB, golpearía el globo en B será a la fuerza con que la misma partícula, alcanzando al cilindro ONGQ descrito alrededor del



globo con eje ACI, lo golpearía perpendicularmente en *b* como LD es a LB, o BE a BC. Igualmente, la eficacia de esta fuerza para mover el globo, según la dirección FB o AC de su incidencia, es a la eficacia de la misma para mover el globo, de acuerdo con la dirección de su determinación, es decir, por la línea recta BC por la que impele directamente al globo, como BE a BC. Y, uniendo estas razones, la eficacia de una partícula que caiga oblicuamente sobre el globo por la línea recta FB para mover al globo en la dirección de su incidencia es a la eficacia de la misma partícula, si cae por la misma línea perpendicularmente sobre el cilindro, para moverlo en la misma dirección, como BE^2 a BC^2. En consecuencia, si en *b*E, que es perpendicular a la base circular del cilindro NAO e igual al radio AC, tomamos *b*H igual a $\frac{BE^2}{CB}$, *b*H será a *b*E como el efecto de la partícula sobre el globo al efecto de la partícula sobre el cilindro. En consecuencia, el sólido formado por todas las líneas rectas *b*H será al sólido formado por todas las líneas rectas *b*E como el efecto de todas las partículas sobre el globo al efecto de todas las partículas sobre el cilindro. Pero el primero de dichos sólidos es un paraboloide con vértice C, eje CA y *latus rectum* CA, y el último un cilindro circunscribiendo al paraboloide, y es sabido que un paraboloide es la mitad del cilindro por él circunscrito. En consecuencia, la fuerza total del medio sobre el globo es la mitad de la fuerza total del mismo sobre el cilindro. Y, en consecuencia, si las partículas del medio están en reposo, y el cilindro y el globo se mueven con velocidades iguales, la resistencia del globo será la mitad de la resistencia del cilindro. Q.E.D.

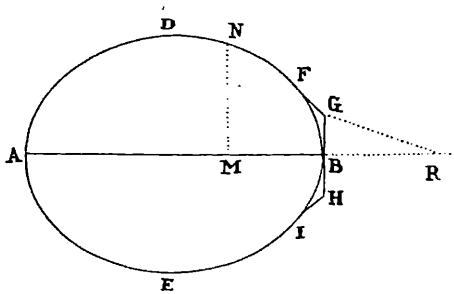
ESCOLIO

Con el mismo método pueden compararse también la resistencia de otras figuras, y encontrarse aquellas que son más capaces de continuar sus movimientos en medios resistentes. Por ejemplo, sobre la base circular CEBH, con centro O, radio OC y altura OD, puede construirse el tronco CBGF de un cono, que debe tropezar con menos resistencia que cualquier otro tronco



construido con la misma base y altura y que avance hacia D en la dirección de su eje. Biséctese la altura OD en Q, prolónguese OQ hasta S, de forma que QS sea igual a QC, y S será el vértice del cono cuyo tronco se trata de determinar.

Incidentalmente, puesto que el ángulo CSB es siempre agudo, de lo expuesto se sigue que si el sólido ADBE es generado por circunvolución de una figura elíptica u oval ADBE alrededor de su eje AB, y la figura generadora es tocada por tres líneas rectas FG, GH, HI, en los puntos F, B e I, de forma que GH sea perpendicular al eje en el punto de contacto B y FG y HI se inclinen hacia GH en los ángulos de 135 grados FGB, BHI, el sólido nacido de la circunvolución de la figura ADFG-HIE alrededor del mismo eje AB será menos resistido que el anterior sólido, siempre que ambos se muevan hacia adelante en la dirección de su eje AB y que el extremo B de ambos sea el delantero. Creo que esta Proposición puede resultar útil para la construcción de buques.



Si la figura DNFG es una curva en la que, abatiendo desde cualquier punto de la misma, como N, la perpendicular NM sobre el eje AB, y trazando desde el punto dado G la línea recta GR, paralela a una línea recta tangente a la figura en N y secante al eje prolongado en R, MN es a GR como GR^3 a $4BR \times GB^2$, el sólido descrito por la revolución de esta figura alrededor de su eje AB, al moverse en el mencionado medio raro desde A hacia B, será menos resistido que cualquier otro sólido circular descrito con la misma longitud y anchura.

PROPOSICIÓN XXXV. PROBLEMA VII

Si un medio raro está compuesto por partículas muy pequeñas en reposo, de igual volumen y libremente dispuestas a distancias iguales unas de otras, determinar la resistencia de un globo que se mueva uniformemente hacia adelante en este medio.

CASO 1. Supóngase que un cilindro descrito con el mismo diámetro y altura avanza por el mismo medio con la misma velocidad en la dirección de su eje, y supóngase que las partículas del medio por el que cae el globo o cilindro se reflejan con la mayor fuerza de reflexión posible. Puesto que la resistencia del globo (por la anterior Proposición) es la mitad de la resistencia del cilindro, puesto que el globo es al cilindro como 2 a 3, y puesto que el cilindro, al caer perpendicularmente sobre las partículas, reflejándolas con la mayor fuerza, les comunica una velocidad que es de dos veces la suya, se sigue que el cilindro, al avanzar uniformemente la mitad de la longitud de sus eje, comunicará a las partículas un movimiento que será al movimiento total del cilindro como la densidad del medio a la densidad del cilindro, y que el globo, en el tiempo que emplea en describir una longitud de su diámetro avanzando uniformemente, comunicará el mismo movimiento a las partículas, y en el tiempo que emplea en describir dos terceras partes de su diámetro comunicará a las partículas un movimiento que es al movimiento total del globo como la densidad del medio a la densidad del globo. En consecuencia, el globo tropieza con una resistencia que es a la fuerza con que su movimiento total puede ser anulado o generado en el tiempo en que describe dos terceras partes de su diámetro avanzando uniformemente como la densidad del medio es a la densidad del globo.

CASO 2. Supongamos que las partículas del medio que inciden sobre el globo o cilindro no son reflejadas; en ese caso, el cilindro, al caer perpendicularmente sobre las partículas, les comunicará simplemente su velocidad, por lo que tropezará con la mitad de resistencia que en el caso anterior, de la misma manera que el globo tropezará con la mitad de resistencia.

CASO 3. Supongamos que las partículas del medio se reflejan del globo con una fuerza que no es la mayor, pero tampoco inexistente, sino una cierta fuerza media; en ese caso, la resistencia del globo estará en la misma razón media entre la resistencia en el primer caso y la resistencia en el segundo. Q.E.I.

COROLARIO I. Por tanto, si el globo y las partículas son infinitamente duros y están privados de toda fuerza elástica y, en consecuencia, de toda fuerza de reflexión, la resistencia del globo será a la fuerza con que todo su movimiento puede ser destruido o generado en el tiempo en que el globo describe cuatro terceras partes de su diámetro como la densidad del medio es a la densidad del globo.

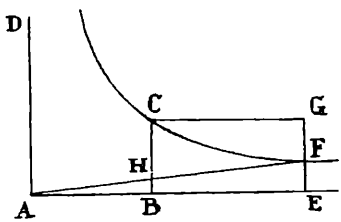
COROLARIO II. La resistencia del globo, en igualdad de condiciones, varía como el cuadrado de la velocidad.

COROLARIO III. La resistencia del globo, en igualdad de condiciones, varía como el cuadrado del diámetro.

COROLARIO IV. La resistencia del globo, en igualdad de condiciones, varía como la densidad del medio.

COROLARIO V. La resistencia del globo varía como el cuadrado de la velocidad, como el cuadrado del diámetro y como la densidad del medio juntamente.

COROLARIO VI. El movimiento del globo y su resistencia pueden representarse de la siguiente forma. Sea AB el tiempo en que el globo puede perder todo su movimiento por su resistencia uniformemente continuada. Levántense AD, BC, perpendiculares a AB. Sea BC el movimiento total. Descríbase la hipérbola CF, con asíntotas AD y AB, por el punto C. Prolónguese AB hasta cualquier punto E. Levántese la perpendicular EF hasta alcanzar la hipérbola en F. Complétese el paralelogramo CBEG y trácese AF cortando BC en H. Entonces, si el globo, en cualquier tiempo BE, con su primer movimiento BC uniformemente continuado, describe en un medio sin resistencia el espacio CBEG representado por el área del paralelogramo, el mismo globo, en un medio resistente, describirá el espacio CBEF, representado por el área de la hipérbola, y su movimiento al terminar aquel tiempo será representado por EF, la ordenada de la hipérbola, habiéndose perdido la parte FG de dicho movimiento. Y su resistencia al final del mismo tiempo será representada por la longitud BH, habiéndose perdido la parte CH de su resistencia. Todo ello se desprende de los Corolarios I y III, Proposición V, Libro II.



COROLARIO VII. Por tanto, si el globo pierde todo su movimiento M en el tiempo T por la resistencia R uniformemente continuada, el mismo globo, en el tiempo t y en un medio resistente donde la resistencia R decrece como el cuadrado de la velocidad, perderá la parte $\frac{tM}{T+t}$ de su movimiento M, quedando la parte $\frac{TM}{T+t}$, y describirá un espacio que es al espacio descrito

en el mismo tiempo t, con el movimiento uniforme M, como el logaritmo del número $\frac{T+t}{T}$ multiplicado por el número 2,302585092994 es al número $\frac{t}{T}$, puesto que el área hiperbólica BCFE está en dicha proporción al rectángulo BCGE.

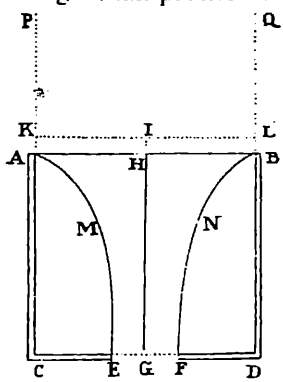
ESCOLIO

He expuesto en la presente Proposición la resistencia y retardación de proyectiles esféricos en medios no continuos, demostrando que la resistencia es a la fuerza con que el movimiento total del globo puede ser destruido o producido en el tiempo en que el globo puede describir dos terceras partes de su diámetro, con una velocidad uniformemente continuada, como la densidad del medio es a la densidad del globo, siempre que el globo y las partículas del medio sean perfectamente elásticos y estén dotados de la mayor fuerza de reflexión; y que esta fuerza, cuando el globo y las partículas del medio son infinitamente duros y están privados de toda fuerza de reflexión, se reduce a la mitad. Pero en medios continuos, como el agua, el aceite caliente y el mercurio, el globo, en su paso, no golpea inmediatamente a todas las partículas del fluido que generan la resistencia con que tropieza, sino que presiona tan sólo a las partículas contiguas a él, que presionan a las partículas situadas más allá, que presionan a otras partículas, etc.; en estos medios la resistencia disminuye otra mitad. En estos medios extremadamente fluidos, un globo tropieza con una resistencia que es a la fuerza con que su movimiento total puede ser destruido o generado en el tiempo en que puede describir con un movimiento uniformemente continuado ocho terceras partes de su diámetro como la densidad del medio es a la densidad del globo, lo que me esforzaré en demostrar seguidamente.

PROPOSICIÓN XXXVI. PROBLEMA VIII

Determinar el movimiento del agua que escapa de un recipiente cilíndrico por un orificio practicado en el fondo.

Supóngase que ACDB es un recipiente cilíndrico, y sean AB su boca, CD el fondo, paralelo al horizonte, EF un orificio circular en mitad del fondo, G el centro del orificio y GH el eje del cilindro, perpendicular al horizonte. Supóngase también que un cilindro de hielo APQB, de la misma anchura que la cavidad del recipiente y con el mismo eje, desciende continuamente con movimiento uniforme, y que sus partes se funden, convirtiéndose en agua, tan pronto como tocan la superficie AB, derramándose



por su propio peso en el recipiente y formando en su caída la catarata o columna de agua ABNFEM, que pasa por el orificio EF y lo llena completamente. Sea la velocidad uniforme del hielo que desciende y del agua contigua en el círculo AB la misma que el agua adquiriría cayendo por el espacio IH, y supóngase que IH y HG están en la misma línea recta. Trácese por el punto I la línea recta KL, paralela al horizonte y alcanzando ambos lados del hielo en K y L. Entonces la velocidad del agua que se derrama por el orificio EF será la misma que adquiriría cayendo desde I por el espacio IG. En consecuencia, según los Teoremas de *Galileo*, IG será a IH como el cuadrado de la velocidad del agua que se derrama por el orificio a la velocidad del agua en el círculo AB, es decir, como el cuadrado de la razón del círculo AB al círculo EF, siendo dichos círculos inversamente proporcionales a las velocidades del agua que, en el mismo tiempo e igual cantidad, pasa por cada uno de ellos, llenándolos por completo. Estamos ahora considerando la velocidad con que el agua tiende hacia el plano del horizonte. Pero el movimiento paralelo al mismo con que las partes del agua que cae se aproximan entre sí no se considera aquí, ya que ni es producido por la gravedad ni cambia en absoluto el movimiento perpendicular al horizonte que la gravedad produce. Suponemos, desde luego, que las partes del agua tienen cierta cohesión y que, debido a esta cohesión, pueden, al caer, aproximarse entre sí con movimientos paralelos al horizonte para formar una sola catarata y evitar dividirse en varias. Pero el movimiento paralelo al horizonte que obedece a dicha cohesión no forma parte de nuestras actuales consideraciones.

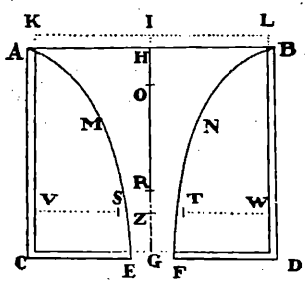
CASO 1. Supóngase ahora que toda la cavidad del recipiente

que rodea la caída de agua ABNFEM está llena de hielo, de forma que el agua pasará por medio del hielo como en un embudo. Entonces, si el agua sólo se aproxima mucho al hielo, sin tocarlo, o, lo que es lo mismo, si debido a la perfecta tersura de la superficie del hielo, aun tocándolo, resbala sobre él con la mayor libertad y sin resistencia alguna, el agua pasará por el orificio EF con la misma velocidad que antes, y todo el peso de la columna de agua ABNFEM actuará como antes para hacer pasar el agua, y el fondo del recipiente soportará el peso del hielo que rodea a la columna.

Supóngase ahora que el hielo del recipiente se funde en agua; pero el flujo de agua, en lo que respecta a su velocidad, no se modificará. No será menor, porque el hielo fundido se esforzará en descender; no será mayor, porque el hielo, convertido ahora en agua, no puede descender sin perturbar el descenso de otra agua igual a su propio descenso. La misma fuerza debe siempre generar la misma velocidad en el flujo del agua.

Pero el orificio del fondo del recipiente, debido a los movimientos oblicuos de las partículas del agua que corre, debe ser algo mayor que antes. Pues ahora no todas las partículas de agua pasan por el orificio perpendicularmente, sino que, fluyendo por todas partes desde los lados del recipiente y convergiendo hacia el orificio, pasan por éste con movimientos oblicuos y, en su tendencia hacia abajo, se reúnen para formar un torrente cuyo diámetro es algo menor bajo el orificio que en el orificio mismo, siendo dicho diámetro al diámetro del orificio muy aproximadamente como 5 a 6, ó $5\frac{1}{2}$ a $6\frac{1}{2}$, si he medido bien los diámetros. Utilicé una lámina plana y delgada con un orificio circular de un diámetro de cinco octavas partes de pulgada practicado en el centro. Para evitar que el torrente de agua se acelerase al caer, estrechándose por la aceleración, no fijé la lámina al fondo sino al lado del recipiente, para que el agua saliera por una línea paralela al horizonte. Después, tras llenar el recipiente de agua, abrí el orificio para dejarla salir; el diámetro del chorro, medido con gran precisión a una distancia de aproximadamente media pulgada del orificio, era de $\frac{21}{40}$ de pulgada. En consecuencia, el diámetro de este orificio circular era al diámetro del chorro muy aproximadamente como 25 a 21. De forma que el agua, al atravesar el orificio, converge por todos lados y, tras salir convergiendo del recipiente, se hace más estrecha, y al estrecharse se acelera hasta llegar a una distancia de media pulgada del orificio, distancia a la que fluye en un

chorro más estrecho y más acelerado que en el orificio mismo, y ello muy aproximadamente en una razón de 25×25 a 21×21, es decir, aproximadamente en la razón de $\sqrt{2}$ a 1. Ahora bien, los experimentos demuestran con seguridad que la cantidad de agua que pasa en un tiempo dado por un orificio circular practicado en el fondo de un recipiente es igual a la cantidad que, fluyendo libremente con la mencionada velocidad, pasaría en el mismo tiempo por otro orificio circular cuyo diámetro fuera al diámetro del primero como 21 a 25. En consecuencia, el agua que corre por el orificio tiene una velocidad hacia abajo casi igual a la que un cuerpo pesado adquiriría cayendo por la mitad de la altura del agua estancada en el recipiente. Pero después, tras haber salido, sigue siendo acelerada al converger hasta que llega a una distancia del orificio casi igual a su diámetro, y adquiere una velocidad mayor que la otra en aproximadamente la razón de $\sqrt{2}$ a 1, velocidad que un cuerpo pesado casi adquiriría cayendo libremente por toda la altura del agua estancada en el recipiente.



En consecuencia, sea ahora el diámetro del chorro representado por el orificio menor, que llamaremos EF. Supóngase que se sitúa otro plano VW encima del orificio EF y paralelo al plano del mismo, a una distancia igual al diámetro del mencionado orificio, y que en él se practica un orificio mayor ST, de tamaño suficiente para que un chorro que llene exactamente el orificio inferior EF pase por él. El diámetro de este orificio, en consecuencia, será al diámetro del orificio inferior aproximadamente como 25 a 21. De esta forma el agua saldrá perpendicularmente al orificio inferior, y la cantidad de agua que salga será, de acuerdo con la magnitud de este último orificio, muy aproximadamente la misma que exige la solución del Problema. El espacio incluido entre los dos planos y la caída de agua puede ser considerado como el fondo del recipiente. Pero para hacer la solución más simple y matemática es mejor considerar sólo el plano inferior como fondo del recipiente y suponer que el agua que pasó en medio del hielo como por un embudo, saliendo del recipiente por el orificio EF practicado en el plano inferior, mantiene su movimiento continuamente, y que el hielo sigue en

reposo. En consecuencia, sea ahora ST el diámetro de un orificio circular descrito con centro Z, y supóngase que el chorro sale del recipiente por dicho orificio cuando toda el agua del recipiente es fluida. Sea EF el diámetro del orificio que el chorro, al pasar, llena por completo, tanto si el agua sale del recipiente por el orificio superior ST como si fluye por medio del hielo, como en un embudo. Supóngase que el diámetro del orificio superior ST es al diámetro del inferior EF aproximadamente como 25 a 21, y sea la distancia perpendicular entre los planos de los orificios igual al diámetro del orificio inferior EF. Entonces, la velocidad del agua hacia abajo, al salir del recipiente por el orificio ST, será en dicho orificio igual que la que un cuerpo podría adquirir cayendo libremente por la mitad de la altura IZ, y la velocidad de ambos chorros en el orificio EF será la misma que un cuerpo adquiriría cayendo libremente por toda la altura IG.

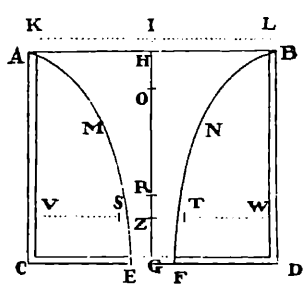
CASO 2. Si el orificio EF no se encuentra en la mitad del fondo del recipiente, sino en alguna otra parte del mismo, el agua seguirá saliendo con la misma velocidad que antes, siempre que el tamaño del orificio sea el mismo. Pues aunque un cuerpo pesado emplea más tiempo en descender a la misma profundidad por una línea oblicua que por una línea perpendicular, en ambos casos adquiere en su descenso la misma velocidad, como ha demostrado *Galileo.*

CASO 3. La velocidad del agua es la misma cuando se derrama por un orificio practicado en un lado del recipiente. Pues si el orificio es pequeño, de forma que el intervalo entre las superficies AB y KL no sea ya perceptible a los sentidos y el chorro de agua que sale horizontalmente forme una figura parabólica, del *latus rectum* de esta parábola puede verse que la velocidad del flujo de agua es la que un cuerpo podría adquirir cayendo por la altura IG o HG del agua estancada en el recipiente. Pues, al realizar un experimento, observé que si la altura del agua estancada sobre el orificio era de 20 pulgadas, y la altura del orificio sobre un plano paralelo al horizonte también de 20 pulgadas, un chorro de agua que saliera del mismo caería sobre el plano, a una distancia de muy aproximadamente 37 pulgadas, desde una perpendicular abatida sobre el plano desde el orificio. Pues sin resistencia el chorro hubiera caído sobre el plano a una distancia de 40 pulgadas, siendo el *latus rectum* del chorro parabólico 80 pulgadas.

CASO 4. Si el flujo del agua tiende hacia arriba, seguirá saliendo con la misma velocidad. Pues el pequeño chorro de

agua que se dirige hacia arriba asciende con un movimiento perpendicular hasta GH o GI, la altura del agua estancada en el recipiente, excepto en la medida en que es ligeramente perturbado por la resistencia del aire; en consecuencia, sale con la misma velocidad que adquiriría cayendo desde dicha altura. Todas las partículas del agua estancada son igualmente presionadas por todas partes (por la Proposición XIX, Libro II) y, al ceder a la presión, tienden siempre con igual fuerza, tanto si el agua desciende por un orificio practicado en el fondo del recipiente como si se derrama en dirección horizontal por un orificio practicado en un lado o pasa por un canal, saliendo por un pequeño orificio practicado en la parte superior del canal. Y el hecho de que la velocidad con que el agua sale sea precisamente la misma que se expone en esta Proposición no sólo se deduce de razonamientos, sino que es también evidente a la vista de los bien conocidos experimentos recién mencionados.

CASO 5. La velocidad del flujo de agua es la misma tanto si la figura del orificio es circular como si es cuadrada, triangular o de cualquier otra forma igual a la circular, pues la velocidad del flujo de agua no depende de la forma del orificio sino de la profundidad de éste por debajo del plano KL.



CASO 6. Si la parte inferior del recipiente ABDC está sumergida en agua estancada y la altura del agua estancada sobre el fondo del recipiente es GR, la velocidad con que el agua contenida en el recipiente saldrá por el orificio EF hacia el agua estancada será la misma que el agua adquiriría cayendo desde la altura IR, pues el peso de toda el agua del recipiente que se encuentra por debajo de la superficie del agua estancada será sostenido en equilibrio por el peso del agua estancada y, en consecuencia, no acelerará en absoluto el movimiento del agua que desciende en el recipiente. Ello puede ser perfectamente demostrado mediante experimentos para medir los tiempos de salida del agua.

COROLARIO I. Por tanto, si CA, profundidad del agua, es prolongada hasta K, de forma que AK sea a CK como el cuadrado de la razón del área de un orificio practicado en cualquier parte del fondo al área del círculo AB, la velocidad

del flujo del agua será igual a la velocidad que el agua adquiriría cayendo libremente desde la altura KC.

COROLARIO II. Y la fuerza con que el movimiento total del flujo de agua puede ser generado es igual al peso de una columna cilíndrica de agua cuya base sea el orificio EF y su altura 2GI ó 2CK. Pues el flujo del agua, cayendo por su propio peso desde la altura GI, puede adquirir, en el tiempo en que se hace igual a dicha columna, una velocidad igual a aquella con la que se derrama.

COROLARIO III. El peso de toda el agua contenida en el recipiente ABDC es a la parte del peso empleada en forzar la salida del agua como la suma de los círculos AB y EF a dos veces el círculo EF. Pues, suponiendo que IO sea una media proporcional entre IH e IG, el agua que escapa por el orificio EF será, en el tiempo en que una gota, cayendo desde I, describiría la altura IG, igual a un cilindro cuya base sea el círculo EF y su altura 2IG, es decir, a un cilindro con base circular AB y altura 2IO. Pues el círculo EF es al círculo AB como la raíz cuadrada de la razón de la altura IH a la altura IG, es decir, está en razón simple de la proporcional media IO a la altura IG. Por lo demás, en el tiempo en que una gota, cayendo desde I, puede describir la altura IH, el agua que se escapa se habrá hecho igual a un cilindro con base circular AB y altura 2IH, y en el tiempo en que una gota, cayendo por H de I a G, describe HG, diferencia de las alturas, el agua que fluye, es decir, el agua contenida en el sólido ABNFEM, será igual a la diferencia de los cilindros, es decir, a un cilindro con base AB y altura 2HO. En consecuencia, la totalidad del agua contenida en el recipiente ABDC es a la totalidad del agua que cae contenida en el mencionado sólido ABNFEM como HG es a 2HO, es decir, como HO + OG a 2HO, ó IH + IO a 2IH. Pero el peso de toda el agua en el sólido ABNFEM es empleado en forzar la salida del agua y, en consecuencia, el peso de toda el agua en el recipiente es a la parte del peso empleada en forzar la salida del agua como IH + IO a 2IH; en consecuencia, como la suma de los círculos EF y AB a dos veces el círculo EF.

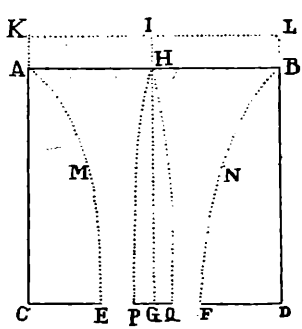
COROLARIO IV. Por tanto, el peso de toda el agua en el recipiente ABDC es a la parte del peso soportada por el fondo del recipiente como la suma de los círculos AB y EF es a la diferencia de los mismos círculos.

COROLARIO V. Y la parte del peso soportada por el fondo del recipiente es a la parte del peso empleada en forzar la salida

del agua como las diferencias de los círculos AB y EF a dos veces el círculo menor EF, o como el área del fondo a dos veces el orificio.

COROLARIO VI. La parte del peso que presiona sobre el fondo es al peso total del agua que presiona perpendicularmente sobre él como el círculo AB a la suma de los círculos AB y EF, o como el círculo AB al exceso de dos veces el círculo AB sobre el área del fondo. Pues la parte del peso que presiona sobre el fondo es al peso de toda el agua contenida en el recipiente como la diferencia de los círculos AB y EF a la suma de los mismos círculos (por el Corolario IV), y el peso de toda el agua contenida en el recipiente es al peso de toda el agua que presiona perpendicularmente sobre el fondo como el círculo AB a la diferencia de los círculos AB y EF. En consecuencia, multiplicando entre sí términos correspondientes de las dos proporciones, la parte del peso que presiona sobre el fondo es al peso de toda el agua que presiona perpendicularmente sobre él como el círculo AB a la suma de los círculos AB y EF, o el exceso de dos veces el círculo AB sobre el fondo.

COROLARIO VII. Si en el centro del orificio EF se sitúa el pequeño círculo PQ, descrito en torno al centro G y paralelo al horizonte, dicho pequeño círculo soporta un peso de agua superior al peso de una tercera parte de un cilindro de agua cuya base sea el pequeño círculo y su altura GH. Sea ABNFEM, como más arriba, la catarata o columna de agua que cae, sea GH su eje, y supóngase que toda el agua cuya fluidez no es necesaria para un inmediato y rápido descenso del agua está congelada, tanto alrededor de la catarata como encima del pequeño círculo. Sea PHQ la columna de agua congelada sobre el pequeño círculo, con vértice H y altura GH. Supóngase que esta catarata cae hacia abajo con todo su peso, sin apoyarse ni presionar en absoluto PHQ, antes bien deslizándose libremente por ella sin fricción alguna, salvo quizá en el vértice mismo del hielo, donde la catarata al iniciar la caída, puede tender a formar una figura cóncava. Puesto que el agua congelada AMEC, BNFD, situada en torno a la catarata, es convexa en sus superficies interiores AME, BNF hacia la



catarata que cae, también la columna PHQ será convexa hacia la catarata y será, en consecuencia, mayor que un cono cuya base sea el pequeño círculo PQ y su altura GH, es decir, mayor que una tercera parte de un cilindro descrito con la misma base y altura. Ahora bien, dicho pequeño círculo soporta el peso de esta columna, es decir, un peso mayor que el peso del cono o una tercera parte del cilindro.

COROLARIO VIII. El peso de agua que el círculo PQ soporta cuando es muy pequeño parece ser menor que el peso de dos terceras partes de un cilindro de agua cuya base sea dicho pequeño círculo y su altura HG. Pues, si todo permanece como más arriba se expone, supóngase la mitad de un esferoide descrito cuya base sea el pequeño círculo y su altura o semieje HG, y la figura resultante será igual a dos terceras partes de aquel cilindro y comprenderá en su interior la columna de agua congelada PHQ, cuyo peso es soportado por el pequeño círculo. Pues aunque el movimiento del agua tiende directamente hacia abajo, las superficies exteriores de la mencionada columna alcanzarán necesariamente la base PQ en un ángulo algo agudo, dado que el agua es continuamente acelerada en su caída y, debido a esta aceleración, se hace más estrecha. En consecuencia, puesto que el ángulo es menos que recto, las partes inferiores de la columna estarán dentro del hemiesferoide. En sus partes superiores también será aguda o puntiaguda, porque de lo contrario el movimiento horizontal del agua tendría que ser en el vértice infinitamente más veloz que su movimiento hacia el horizonte. Y cuanto menor sea el círculo PQ, más agudo será el vértice de la columna, y disminuyendo el círculo *in infinitum*, el ángulo PHQ disminuirá *in infinitum*, por lo que la columna estará dentro del hemisferoide. En consecuencia, la columna es menor que el hemisferoide, o que dos terceras partes del cilindro cuya base es el pequeño círculo y su altura GH. Ahora el pequeño círculo soporta una fuerza de agua igual al peso de la columna, empleándose el peso del agua que la rodea en forzar el flujo de salida por el orificio.

COROLARIO IX. El peso de agua que soporta el pequeño círculo PQ cuando es muy reducido es muy aproximadamente igual al peso de un cilindro de agua cuya base sea dicho pequeño círculo y su altura $\frac{1}{2}$ GH, pues este peso es una media aritmética de los pesos del cono y el hemisferoide arriba mencionados. Pero si el pequeño círculo no es muy reducido, sino, por el contrario, aumentado hasta igualar al orificio EF, soportará el

peso de toda el agua que se encuentra perpendicularmente sobre él, es deçir, el peso de un cilindro de agua cuya base sea el pequeño círculo y su altura GH.

COROLARIO X. Y (en la medida en que me es posible determinarlo) el peso que este pequeño círculo soporta es siempre al peso de un cilindro de agua cuya base sea dicho pequeño círculo y su altura $\frac{1}{2}$GH como EF^2 es a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, o como el círculo EF al exceso de dicho círculo sobre la mitad del pequeño círculo PQ, muy aproximadamente.

LEMA IV

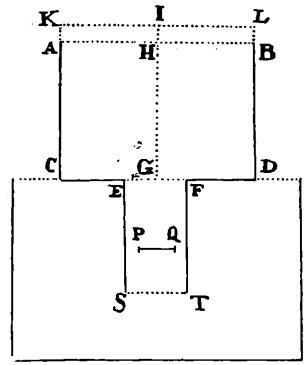
Si un cilindro se mueve uniformemente hacia adelante por la dirección de su longitud, la resistencia que se le opone no cambia en absoluto aumentando o disminuyendo la longitud, y es, en consecuencia, igual que la resistencia que se opone a un círculo, descrito con el mismo diámetro, que se mueva hacia adelante con la misma velocidad por una línea recta perpendicular a su plano.

Pues los lados no se oponen en absoluto al movimiento, y un cilindro se convierte en círculo cuando su longitud es disminuida *in infinitum*.

PROPOSICIÓN XXXVII. TEOREMA XXIX

Si un cilindro se mueve uniformemente hacia adelante por la dirección de su longitud en un fluido comprimido, infinito y no elástico, la resistencia debida a la magnitud de su sección transversal es a la fuerza con que todo su movimiento puede ser destruido o generado en el tiempo en que recorre cuatro veces su longitud como la densidad del medio a la densidad del cilindro, aproximadamente.

Pues supóngase que el recipiente ABDC toca la superficie del agua estancada con su fondo CD, hágase que el agua salga de dicho recipiente hacia el agua estancada por el canal cilíndrico EFTS, perpendicular al horizonte, situése el pequeño círculo PQ paralelo al horizonte en cualquier posición en el medio del canal



y prolónguese CA hasta K de forma que AK sea a CK como el cuadrado de la razón del exceso del orificio del canal EF sobre el pequeño círculo PQ al círculo AB. Entonces es evidente (por el Caso V, el Caso VI y el Corolario I, Proposición XXXVI) que la velocidad del agua que pasa por el espacio anular entre el pequeño círculo y los lados del recipiente será la misma que el agua adquiriría cayendo y describiendo en su caída la altura KC o IG.

Y (por el Corolario X, Proposición XXXVI) si la anchura del recipiente es infinita, de forma que la línea breve HI desaparece y las alturas IG, GH se igualan, la fuerza del agua que fluye hacia abajo y presiona sobre el círculo será al peso de un cilindro cuya base sea el pequeño círculo y su altura $\frac{1}{2}$IG como EF^2 a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$. muy aproximadamente. Pues la fuerza del agua que fluye uniformemente hacia abajo por todo el canal será siempre igual sobre el pequeño círculo PQ, sea cual fuere la posición de este último dentro del canal.

Ciérrense ahora los orificios EF, ST del canal, hágase que el pequeño círculo ascienda en el fluido comprimido por todas partes, obligando en su ascenso al agua que está sobre él a descender por el espacio anular entre el pequeño círculo y los lados del canal. Entonces la velocidad de ascenso del pequeño círculo será a la velocidad de descenso del agua como la diferencia de los círculos EF y PQ es al círculo PQ, y la velocidad de ascenso del pequeño círculo será a la suma de las velocidades, es decir, a la velocidad relativa del agua descendente con la que pasa junto al pequeño círculo en su ascenso, como la diferencia de los círculos EF y PQ es al círculo EF, o como $EF^2 - PQ^2$ a EF^2. Sea dicha velocidad relativa igual a la velocidad con que, como más arriba se expuso, el agua pasaría por el espacio anular si el círculo permaneciera inmóvil, es decir, a la velocidad que el agua adquiriría cayendo y describiendo en su caída la altura IG, y la fuerza del agua sobre el círculo ascendente será la misma que antes (por el Corolario V de las Leyes del Movimiento): es decir, la resistencia del pequeño círculo ascendente será al peso de un cilindro de agua cuya base

sea dicho pequeño círculo y su altura $\frac{1}{2}$IG como EF^2 es a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, aproximadamente. Pero la velocidad del pequeño círculo será a la velocidad que el agua adquiere cayendo y describiendo al caer la altura IG como $EF^2 - PQ^2$ es a EF^2.

Auméntese *in infinitum* la anchura del canal, y las razones de $EF^2 - PQ^2$ a EF^2 y de EF^2 a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ se convertirán finalmente en razones de igualdad. Y, en consecuencia, la velocidad del pequeño círculo será ahora la misma que el agua adquiriría cayendo y describiendo en su caída la altitud IG, y la resistencia será igual al peso de un cilindro cuya base sea dicho pequeño círculo y su altura la mitad de la altura IG, de la que el cilindro tiene que caer para adquirir la velocidad del círculo ascendente, velocidad con que el cilindro describirá, en el tiempo de su caída, cuatro veces su longitud. Pero la resistencia del cilindro avanzando con esta velocidad por la dirección de su longitud es la misma que la resistencia del pequeño círculo (según el Lema IV), y es, en consecuencia, casi igual a la fuerza con que su movimiento puede generarse mientras describe cuatro veces su longitud.

Si la longitud del cilindro aumenta o disminuye, su movimiento y el tiempo en que describe cuatro veces su longitud aumentarán o disminuirán en la misma razón. En consecuencia, la fuerza con que el movimiento así aumentado o disminuido puede ser destruido o generado seguirá siendo la misma, puesto que el tiempo aumenta o disminuye en la misma proporción. En consecuencia, dicha fuerza sigue siendo igual a la resistencia del cilindro, puesto que (por el Lema IV) dicha resistencia permanece también igual.

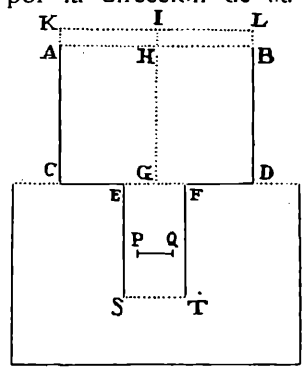
Si la densidad del cilindro aumenta o disminuye, su movimiento y la fuerza con que su movimiento puede ser generado o destruido en el mismo tiempo aumentarán o disminuirán en la misma razón. En consecuencia, la resistencia de todo cilindro será a la fuerza con que todo su movimiento puede generarse o destruirse en el tiempo en que recorre cuatro veces su longitud como la densidad del medio es a la densidad del cilindro, aproximadamente. Q.E.D.

Un fluido debe ser comprimido para hacerse continuo; debe ser continuo y no elástico para que toda la presión debida a su compresión pueda propagarse en un instante, de forma que, al actuar igualmente sobre todas las partes del cuerpo movido, no produzca cambio alguno de resistencia. La presión debida al movimiento del cuerpo se gasta generando un movimiento en

las partes del fluido, lo que crea la resistencia. Pero la presión debida a la compresión del fluido, por fuerte que sea, si se propaga en un instante, no genera movimiento alguno en las partes de un fluido continuo, no produce en él cambio alguno de movimiento y, en consecuencia, ni aumenta ni disminuye la resistencia. Es evidente que la acción del fluido debida a la compresión no puede ser más fuerte en las partes posteriores del cuerpo movido que en sus partes anteriores, por lo que no puede disminuir la resistencia descrita en esta proposición. Y si su propagación es infinitamente más veloz que el movimiento del cuerpo presionado, no será más fuerte en las partes anteriores que en las partes posteriores. Pero esa acción será infinitamente más veloz, y se propagará en un instante, si el fluido es continuo y no elástico.

COROLARIO I. Las resistencias que se oponen a cilindros que avanzan uniformemente por la dirección de sus longitudes en medios infinitos continuos están en razón compuesta del cuadrado de la razón de las velocidades y el cuadrado de la razón de los diámetros, y la razón de la densidad de los medios.

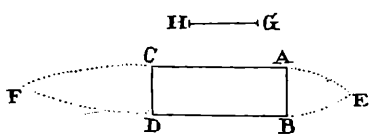
COROLARIO II. Si la anchura del canal no es infinitamente aumentada, pero el cilindro avanza por la dirección de su longitud en un medio en reposo incluido, coincidiendo siempre su eje con el eje del canal, su resistencia estará a la fuerza con que todo su movimiento puede ser generado o destruido en el tiempo en que describe cuatro veces su longitud en razón compuesta de la razón de EF^2 a $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, el cuadrado de la razón de EF^2 a $EF^2 - PQ^2$ y la razón de la densidad del medio a la densidad del cilindro.



COROLARIO III. Supuestas las mismas cosas, así como que una longitud L está a cuatro veces la longitud del cilindro en razón compuesta de la razón $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ a EF^2 y el cuadrado de la razón de $EF^2 - PQ^2$ a EF^2, la resistencia del cilindro será a la fuerza con que todo su movimiento puede ser generado o destruido en el tiempo en que describe la longitud L como la densidad del medio es a la densidad del cilindro.

ESCOLIO

En esta Proposición sólo hemos investigado la resistencia debida a a magnitud de la sección transversal del cilindro, ignorando la parte de la misma que pueda deberse a la oblicuidad de los movimientos. Pues así como en el Caso 1 de la Proposición XXXVI la oblicuidad de los movimientos con que las partes del agua en el recipiente convergían por todos lados hacia el orificio EF perturbaba el flujo de agua por el orificio, así también, en esta Proposición, la oblicuidad de los movimientos con que las partes del agua, presionadas por el extremo anterior del cilindro, ceden a la presión y divergen en todos lados, retarda su paso por los lugares que rodean dicho extremo anterior hacia las partes posteriores del cilindro y hace que el fluido se mueva a mayor distancia, lo que aumenta la resistencia aproximadamente en la misma razón en que disminuía el flujo de salida del agua del recipiente, es decir, aproximadamente en el cuadrado de la razón de 25 a 21. Y, así como en el Caso 1 de aquella Proposición hacíamos que las partes del agua pasaran perpendicularmente por el orificio EF en la mayor abundancia, suponiendo que toda el agua contenida en el recipiente en torno a la catarata estaba congelada y que la parte del agua cuyo movimiento era oblicuo e inútil permanecía inmóvil, así también, en esta Proposición, para eliminar la oblicuidad de los movimientos y permitir que las partes del agua ofrezcan el camino más expedito al cilindro, cediendo ante él con el movimiento más directo y rápido posible, de forma que no quede más resistencia que la debida a la magnitud de la sección transversal, resistencia que sólo puede disminuir si disminuye el diámetro del cilindro, debemos suponer que las partes del fluido cuyos movimientos son oblicuos e inútiles, y producen resistencia, están en reposo entre sí en ambos extremos del cilindro, donde se cohesionan y se unen al cilindro. Sean ABCD un rectángulo y AE y BE dos arcos parabólicos descritos con eje AB y con un *latus rectum* que es al espacio HG, que habrá de ser descrito por el cilindro en su caída para adquirir la velocidad con que se mueve, como HG a $\frac{1}{2}$AB. Sean CF y DF otros dos arcos parabólicos descritos con eje CD y un *latus rectum* cuatro veces mayor que el anterior y, por revolu-



ción de la figura alrededor del eje EF, genérese un sólido cuya parte central ABDC sea el cilindro del que estamos hablando y cuyas partes extremas ABE y CDF contienen las partes del fluido en reposo entre sí, amalgamadas en dos cuerpos duros que se adhieren a los extremos del cilindro como si fueran cabeza y cola. Entonces, si este sólido EACFDB se mueve por la dirección de la longitud de su eje FE hacia las partes situadas más allá de E, la resistencia será aproximadamente la misma que hemos determinado en esta Proposición, es decir, estará a la fuerza con que todo el movimiento del cilindro puede destruirse o generarse en el tiempo en que describe la longitud 4AC con movimiento uniforme continuo en la misma razón que la densidad del fluido a la densidad del cilindro, aproximadamente. Y (por el Corolario VII, Proposición XXXVI), la resistencia tiene que estar al menos en una razón de 2 a 3 a esta fuerza.

LEMA V

Si un cilindro, una esfera y un esferoide de la misma anchura son situados sucesivamente en el centro de un canal cilíndrico, de forma que sus ejes coincidan con el eje del canal, estos cuerpos perturbarán igualmente el paso del agua por el canal.

Pues los espacios entre los lados del canal y el cilindro, esfera y esferoide, por donde pasa el agua, son iguales, y el agua pasará igualmente por espacios iguales.

Ello es cierto suponiendo que toda el agua situada sobre el cilindro, esfera o esferoide, cuya fluidez no es necesaria para que el paso del agua sea lo más rápido posible, esté congelada, como se explicó más arriba, en el Corolario VII de la Proposición XXXVI.

LEMA VI

En el mismo supuesto, el agua que fluye por el canal obrará igualmente sobre los mencionados cuerpos.

Ello se desprende del Lema V y de la tercera Ley. Pues el agua y los cuerpos actúan entre sí mutua e igualmente.

LEMA VII

Si el agua del canal está en reposo y dichos cuerpos se mueven con igual velocidad y en direcciones opuestas por el canal, sus resistencias serán iguales entre sí.

Ello se desprende del último Lema, pues los movimientos relativos permanecen iguales entre sí.

ESCOLIO

Lo mismo ocurre con todo cuerpo convexo y redondo cuyo eje coincida con el eje del canal. Podría surgir alguna diferencia debida a la mayor o menor fricción, pero en estos Lemas suponemos que los cuerpos son perfectamente lisos, que el medio está desprovisto de toda tenacidad y fricción, y que las partes del fluido que con sus movimientos oblicuos y superfluos pueden perturbar, impedir y retardar el flujo del agua por el canal están en reposo entre sí, fijos como el agua helada y adheridos a las partes anteriores y posteriores de los cuerpos, tal como se expuso en el escolio de la última Proposición. Pues en lo que sigue consideramos la resistencia mínima que puede oponerse a cuerpos redondos descritos con la mayor sección transversal dada.

Los cuerpos que se desplazan por fluidos, al avanzar, hacen que el fluido ascienda en sus partes anteriores y descienda en las posteriores, especialmente cuando su figura es obtusa. En consecuencia, tropiezan con algo más de resistencia que si fueran agudos por delante y por detrás. Y los cuerpos que se mueven en fluidos elásticos, cuando son obtusos por detras y por delante, condensan el fluido un poco más en su parte anterior y lo relajan en su parte posterior, por lo que también tropiezan con algo más de resistencia que si fueran agudos por delante y por detrás. Pero en estos Lemas y Proposiciones no estamos estudiando fluidos elásticos, sino no elásticos, y tampoco cuerpos que flotan en la superficie del fluido, sino cuerpos profundamente sumergidos en el mismo. Y una vez conocida la resistencia de los cuerpos en fluidos no elásticos, podremos aumentar un poco dicha resistencia en los fluidos elásticos, como nuestro aire, y en las superficies de fluidos estancados, como los lagos y el mar.

PROPOSICIÓN XXXVIII. TEOREMA XXX

Si un globo avanza uniformemente en un fluido comprimido, infinito y no elástico, su resistencia es a la fuerza con que todo su movimiento puede ser destruido o generado en el tiempo en que describe ocho terceras partes de su diámetro como la densidad del fluido es a la densidad del globo, muy aproximadamente.

Pues el globo es a su cilindro circunscrito como 2 a 3, por lo que la fuerza capaz de destruir todo el movimiento del cilindro mientras éste describe la longitud de cuatro de sus diámetros destruirá todo el movimiento del globo mientras éste describe dos terceras partes de esta longitud, es decir, ocho terceras partes de su diámetro. Ahora bien, la resistencia del cilindro es a esta fuerza muy aproximadamente como la densidad del fluido a la densidad del cilindro o globo (por la Proposición XXXVII), y la resistencia del globo es igual a la resistencia del cilindro (según los Lemas V, VI, VII). Q.E.D.

COROLARIO I. Las resistencias de los globos en medios infinitos comprimidos están en razón compuesta del cuadrado de la razón de la velocidad, el cuadrado de la razón del diámetro y la razón de la densidad de los medios.

COROLARIO II. La mayor velocidad con que un globo puede descender por su peso relativo a través de un fluido resistente es la misma que puede adquirir cayendo con el mismo peso y sin resistencia alguna y describiendo en su caída un espacio que es a cuatro terceras partes de su diámetro como la densidad del globo a la densidad del fluido. Pues el globo, moviéndose en el tiempo de su caída con la velocidad adquirida al caer, describirá un espacio que será a ocho terceras partes de su diámetro como la densidad del globo a la densidad del fluido, y la fuerza de su peso que genera este movimiento será a la fuerza capaz de generar el mismo movimiento en el tiempo en que el globo describe ocho terceras partes de su diámetro con la misma velocidad como la densidad del fluido es a la densidad del globo; en consecuencia (por esta Proposición), la fuerza del peso será igual a la fuerza de la resistencia, por lo que no podrá acelerar el globo.

COROLARIO III. Dadas tanto la densidad del globo y su velocidad al comienzo del movimiento como la densidad del fluido comprimido en reposo por donde el globo se mueve, tanto la velocidad del globo y su resistencia como el espacio descrito

por el mismo estarán dados en cualquier tiempo (por el Corolario VII, Proposición XXXV).

COROLARIO IV. Un globo que se mueva en un fluido comprimido en reposo de su misma densidad perderá la mitad de su movimiento antes de poder describir la longitud de dos de sus diámetros (por el mismo Corolario VII).

PROPOSICIÓN XXXIX. TEOREMA XXXI

Si un globo avanza uniformemente por un fluido encerrado y comprimido en un canal cilíndrico, su resistencia está a la fuerza con que todo su movimiento puede generarse o destruirse en el tiempo en que describe ocho terceras partes de su diámetro en razón compuesta de la razón del orificio del canal al exceso de dicho orificio sobre la mitad del círculo máximo del globo, el cuadrado de la razón del orificio del canal al exceso de dicho orificio sobre el círculo máximo del globo y la razón de la densidad del fluido a la densidad del globo, aproximadamente.

Ello se desprende del Corolario II, Proposición XXXVII, y la demostración es análoga a la de la anterior Proposición.

ESCOLIO

En las dos últimas Proposiciones hemos supuesto (como antes se hizo en el Lema V) que toda el agua que precede al globo, cuya fluidez aumenta la resistencia del mismo, está congelada. Ahora bien, si dicha agua se fluidifica, aumentará en cierta medida la resistencia. Pero en estas Proposiciones el incremento es tan pequeño que puede ser ignorado, porque la superficie convexa del globo produce casi el mismo efecto que la congelación del agua.

PROPOSICIÓN XL. PROBLEMA IX

Determinar experimentalmente la resistencia de un globo que se mueve por un medio comprimido perfectamente fluido.

Sea A el peso del globo en el vacío, B su peso en el medio resistente, D el diámetro del globo, F un espacio que es a $\frac{4}{3}$D como la densidad del globo a la densidad del medio, es decir, como A es a A − B, G el tiempo en que el globo, cayendo con el peso B, sin resistencia, describe el espacio F, y H la velocidad que el cuerpo adquiere en dicha caída. Entonces, según el Corolario II, Proposición XXXVIII, H será la velocidad máxima de descenso del globo con el peso B en el medio resistente, la resistencia que se opone al globo cuando éste desciende con dicha velocidad será igual a su peso B, y la resistencia que se le opone cuando desciende con cualquier otra velocidad será al peso B como el cuadrado de la razón de dicha velocidad es a la velocidad máxima H, según el Corolario I, Proposición XXXVIII.

Esta es la resistencia debida a la inactividad de la materia del fluido. La resistencia debida a la elasticidad, tenacidad y fricción de sus partes puede determinarse de la siguiente manera.

Déjese caer el globo de forma que descienda en el fluido con el peso B; sea P el tiempo de caída y exprésese dicho tiempo en segundos si el tiempo G está dado en segundos. Determínese el número absoluto N concorde con el logaritmo $0{,}4342944819\,\frac{2P}{G}$, sea L el logaritmo del número $\frac{N+1}{N}$, y la velocidad adquirida al caer será $\frac{N-1}{N+1}$ H, y la altura descrita $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611F + 4{,}605170186LF$. Si el fluido tiene profundidad suficiente, podemos ignorar el término 4,605170186, y $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611F$ será aproximadamente la altura descrita. Ello se desprende de la Proposición IX, Libro II, y sus Corolarios, y es cierto en el supuesto de que el globo no tropiece con más resistencia que la debida a la inactividad de la materia. Ahora bien, si en realidad tropieza con cualquier resistencia de otra índole, el descenso será más lento, y de la magnitud de la retardación podrá deducirse la magnitud de esta nueva resistencia.

Para que puedan conocerse más fácilmente la velocidad y descenso de un cuerpo que cae por un fluido, he compuesto la siguiente tabla, donde la primera columna recoge los tiempos de

descenso, la segunda las velocidades adquiridas en la caída, siendo 100000000 la velocidad máxima, la tercera los espacios descritos cayendo en aquellos tiempos, siendo 2F el espacio que el cuerpo describe en el tiempo G con la velocidad máxima, y la cuarta los espacios descritos con la velocidad máxima en los mismos tiempos. Los números de la cuarta columna son $\frac{2P}{G}$, y en la tercera columna se encontrarán los números sustrayendo el número 1,3862944 – 4,6051702L; estos números deben ser multiplicados por el espacio F para obtener los espacios descritos en la caída. A estas columnas se añade una quinta, que expone los espacios descritos en los mismos tiempos por un cuerpo que cae en el vacío con la fuerza de B, su peso relativo.

Los tiempos P	*Velocidades del cuerpo cayendo en el fluido*	*Espacios descritos cayendo en el fluido*	*Espacios descritos con el máximo movimiento*	*Espacios descritos cayendo en el vacío*
0,001G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,02F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

ESCOLIO

Con el fin de investigar experimentalmente las resistencias de los fluidos me hice con un recipiente de madera cuya longitud y

anchura interiores eran 9 pulgadas, medida *inglesa*, siendo su profundidad de $9\frac{1}{2}$ pies. Lo llené de agua de lluvia y, tras conseguir globos de cera rellenos de plomo, anoté los tiempos de los descensos de dichos globos, que descendían una altura de 112 pulgadas. Un pie cúbico sólido, medida *inglesa*, contiene 76 libras *troy* de agua de lluvia, una pulgada sólida contiene un peso de $\frac{19}{36}$ onzas *troy* ó $253\frac{1}{3}$ granos, y un globo de agua de una pulgada de diámetro contiene 132,645 granos en el aire, ó 132,8 granos en el vacío; y cualquier otro globo será como el exceso de su peso en el vacío a su peso en el agua.

EXPERIMENTO 1. Un globo de un peso de $156\frac{1}{4}$ granos en el aire y 77 granos en el agua describió la altura total de 112 pulgadas en 4 segundos. Y, al repetir el experimento, el globo empleó exactamente el mismo tiempo de 4 segundos en caer.

El peso de este globo en el vacío es de $156\frac{13}{38}$ granos, y el exceso de este peso sobre el peso del globo en el agua es $79\frac{13}{18}$ granos, de lo que se desprende que el diámetro del globo es 0,84224 partes de pulgada. Entonces será como dicho exceso al peso del globo en el vacío, igual que la densidad del agua a la densidad del globo, e igual que $\frac{8}{3}$ partes del diámetro del globo (es decir, 2,24597 pulgadas) al espacio 2F, que, en consecuencia, será de 4,4256 pulgadas. Ahora bien, un globo, cayendo en el vacío con todo su peso de $156\frac{13}{38}$ granos, describirá en un segundo de tiempo $193\frac{1}{3}$ pulgadas; cayendo en agua en el mismo tiempo con el peso de 77 granos sin resistencia describirá 95,219 pulgadas, y en el tiempo G, que es a un segundo de tiempo como la raíz cuadrada de la razón del espacio F, o de 2,2128 pulgadas, a 95,219 pulgadas, describirá 2,2128 pulgadas y adquirirá la velocidad máxima H con que es capaz de descender en el agua. En consecuencia, el tiempo G es 0,15244 segundos. Y en este tiempo G, con la velocidad máxima H, el globo descenderá el espacio 2F, que es 4,4256 pulgadas, por lo que en 4 segundos describirá un espacio de 116,1245 pulgadas. Sustráigase el espacio $1{,}3862944 \times F$, ó 3,0676 pulgadas, y quedará un espacio de 113,0569 pulgadas, que el globo, cayendo por el agua en un recipiente muy ancho, describirá en 4 segundos. Pero este espacio, debido a la estrechez del recipiente antes mencionado, debe disminuirse en una razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón del orificio del recipiente al exceso de dicho orificio sobre la mitad del círculo máximo del globo y la razón simple del mismo orificio a su exceso sobre el círculo máximo del globo, es decir, en una razón de 1 a 0,9914. Hecho esto, nos

queda un espacio de 112,08 pulgadas, que, según esta teoría, un globo, cayendo por el agua en este recipiente de madera, debería describir en aproximadamente 4 segundos; pero en el experimento describió 112 pulgadas.

EXPERIMENTO 2. Tres globos iguales, cada uno de un peso de $76\frac{1}{3}$ granos en el aire y $5\frac{1}{16}$ granos en el agua, fueron liberados sucesivamente; los tres cayeron por el agua en un tiempo de 15 segundos, describiendo en su caída una altura de 112 pulgadas.

Puede calcularse que el peso de cada uno de los globos en el vacío es de $76\frac{5}{12}$ granos, el exceso de dicho peso sobre el peso en el agua $71\frac{17}{48}$ granos, el diámetro del globo 0,81296 pulgadas, $\frac{8}{3}$ partes de este diámetro 2,16789 pulgadas, el espacio 2F 2,3217 pulgadas, el espacio que un globo de $5\frac{1}{16}$ granos podría describir sin resistencia en un segundo 12,808 pulgadas, y el tiempo G 0,301056 seg. En consecuencia, el globo, con la mayor velocidad que puede recibir de un peso de $5\frac{1}{16}$ granos en su descenso por el agua, describirá el espacio de 2,3217 pulgadas en un tiempo de 0,301056 segundos, y el espacio de 115,678 pulgadas en un tiempo de 15 segundos. Sustráigase el espacio 1,3862944F, ó 1,609 pulgadas, y quedará un espacio de 114,069 pulgadas que, en consecuencia, el globo debería describir en su caída en el mismo tiempo si el recipiente fuera muy ancho. Pero como nuestro recipiente era estrecho, el espacio debe disminuirse aproximadamente en 0,895 pulgadas. De esta forma, el espacio que un globo, cayendo en este recipiente, debería aproximadamente describir en 15 segundos, será 113,174 pulgadas. Pero en el experimento describió 112 pulgadas. La diferencia no es apreciable.

EXPERIMENTO 3. Tres globos iguales, cada uno de un peso de 121 granos en el aire y 1 grano en el agua, fueron liberados sucesivamente; cayeron por el agua en 46 segundos, 47 segundos y 50 segundos, describiendo una altura de 112 pulgadas.

En teoría, estos globos deberían haber caído en aproximadamente 40 segundos, y no sé con certeza si la mayor lentitud de su caída se debió a que, tratándose de movimientos lentos, la resistencia debida a la fuerza de la inactividad es en realidad proporcionalmente menor que la resistencia debida a otras causas, o a pequeñas burbujas que pudieran haberse adherido a los globos, o a la rarefacción de la cera por la temperatura ambiente o el calor de la mano que dejó caer los globos o, finalmente, a errores inapreciables cometidos al pesar los globos en el agua. En consecuencia, para que el experimento sea seguro

y digno de confianza, el globo debe pesar varios granos en el agua.

EXPERIMENTO 4. Inicié los anteriores experimentos para investigar las resistencias de los fluidos antes de completar la teoría expuesta en las Proposiciones inmediatamente precedentes. Después, con el fin de examinar la teoría tras su descubrimiento, me hice con un recipiente de madera cuya anchura interior era de $8\frac{2}{3}$ pulgadas y su profundidad de $15\frac{1}{2}$ pies. Después construí cuatro globos de cera rellenos de plomo, cada uno de ellos de un peso de $139\frac{1}{4}$ granos en el aire y $7\frac{1}{8}$ granos en el agua. Los dejé caer, midiendo sus tiempos de caída en el agua con un péndulo que oscilaba cada medio segundo. Los globos estaban fríos, y llevaban así algún tiempo, tanto cuando los pesé como cuando los dejé caer, porque el calor enrarece la cera y, enrareciéndola, disminuye el peso del globo en el agua; además, la cera, una vez enrarecida, no es inmediatamente reducida a su anterior densidad por acción del frío. Antes de liberarlos los mantuve completamente sumergidos en el agua, para evitar que su descenso fuera acelerado al principio por el peso de cualquier parte que pudiera encontrarse sobre el agua. Después, cuando tras su inmersión se encontraban en perfecto reposo, los dejé caer con el mayor de los cuidados para evitar que recibieran algún impulso de la mano que los liberaba. Y cayeron, respectivamente, en tiempos de $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 y 51 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas. Pero la temperatura era entonces algo más fría que cuando se pesaron los globos, por lo que repetí el experimento otro día. En esa ocasión los globos cayeron en tiempos de 49, $49\frac{1}{2}$, 50 y 53 oscilaciones. Al tercer intento cayeron en tiempos de $49\frac{1}{2}$, 50, 51 y 53 oscilaciones. Repitiendo varias veces el experimento observé que los globos caían generalmente en los tiempos de $49\frac{1}{2}$ y 50 oscilaciones. Sospecho que cuando caían más despacio eran retardados por sus choques contra las paredes del recipiente.

Ahora, calculando según la teoría, el peso del globo en el vacío es de $139\frac{2}{5}$ granos, el exceso de este peso sobre el peso del globo en el agua, $132\frac{11}{40}$ granos, el diámetro del globo, 0,99868 pulgadas, $\frac{8}{3}$ partes del diámetro, 2,66315 pulgadas, el espacio 2F, 2,8066 pulgadas, el espacio que un globo de un peso de $7\frac{1}{8}$ granos describe cayendo sin resistencia en un segundo de tiempo, 9,88164 pulgadas, y el tiempo G, 0,376843 segundos. En consecuencia, el globo, con la velocidad máxima con que es capaz de descender por el agua debido a la fuerza de un peso de

$7\frac{1}{8}$ granos, describirá un espacio de 2,8066 pulgadas en un tiempo de 0,376843 segundos, un espacio de 7,44766 pulgadas en un tiempo de un segundo, y un espacio de 186,1915 pulgadas en un tiempo de 25 segundos, ó 50 oscilaciones. Sustráigase el espacio 1,386294F, ó 1,9454 pulgadas, y quedará un espacio de 184,2461 pulgadas, que el globo describirá en ese tiempo en un recipiente muy ancho. Como nuestro recipiente era estrecho, disminúyase este espacio en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón del orificio del recipiente al exceso de dicho orificio sobre la mitad del círculo máximo del globo y la razón simple del mismo orificio a su exceso sobre un círculo máximo del globo, y nos quedará un espacio de 181,86 pulgadas que, según la teoría, el globo debería describir en este recipiente en un tiempo de 50 oscilaciones, aproximadamente. Pero en el experimento describió un espacio de 182 pulgadas en $49\frac{1}{2}$ ó 50 oscilaciones.

EXPERIMENTO 5. Cuatro globos, cada uno de un peso de $154\frac{3}{8}$ granos en el aire y $21\frac{1}{2}$ granos en el agua, liberados varias veces, cayeron en tiempos de $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ y 30, y a veces 31, 32 y 33 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas.

Según la teoría, deberían haber caído en un tiempo de 29 oscilaciones, aproximadamente.

EXPERIMENTO 6. Cinco globos, cada uno de un peso de $212\frac{3}{8}$ granos en el aire y $79\frac{1}{2}$ en el agua, liberados varias veces, cayeron en tiempos de 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 y 18 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas.

Según la teoría deberían haber caído en un tiempo de 15 oscilaciones, aproximadamente.

EXPERIMENTO 7. Cuatro globos, cada uno de un peso de $293\frac{3}{8}$ granos en el aire y $35\frac{7}{8}$ granos en el agua, liberados varias veces, cayeron en tiempos de $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 y 33 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y $1\frac{1}{2}$ pulgadas.

Según la teoría deberían haber caído en un tiempo de 28 oscilaciones, aproximadamente.

Buscando la causa de que estos globos del mismo peso y volumen cayeran más deprisa o más despacio, descubrí lo siguiente: que los globos, cuando eran liberados y empezaban a caer, oscilaban en torno a sus centros, y que el lado más pesado se situaba debajo, produciendo un movimiento oscilante. Ahora bien, el globo, al oscilar de esta forma, comunica al agua más movimiento que si descendiera sin oscilación alguna, y con esta comunicación pierde parte de su propio movimiento de descen-

so; en consecuencia, será más o menos retardado en la medida en que la oscilación sea mayor o menor. Además, el globo siempre se aparta de aquel de sus lados que desciende en la oscilación, y al apartarse se acerca a las paredes del recipiente, hasta el punto de que a veces choca con ellas. Y cuanto más pesados sean los globos, mayor es la oscilación, y cuanto mayores sean, más agua se agita. En consecuencia, para disminuir la oscilación de los globos, construí otros nuevos, de cera y plomo, pegando el plomo en un lado del globo, muy cerca de la superficie, y liberé el globo procurando, en la medida de lo posible, que el lado más pesado estuviera debajo al iniciarse el descenso. De esta forma, las oscilaciones se hicieron mucho menores, y los tiempos de caída de los globos menos desiguales, como en los siguientes Experimentos.

EXPERIMENTO 8. Cuatro globos, cada uno de un peso de 139 granos en el aire y $6\frac{1}{2}$ en el agua, liberados varias veces, cayeron generalmente en un tiempo de 51 oscilaciones, nunca en más de 52 ni en menos de 50, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Según la teoría deberían haber caído en un tiempo de 52 oscilaciones, aproximadamente.

EXPERIMENTO 9. Cuatro globos, cada uno de un peso de $273\frac{1}{4}$ granos en el aire y $140\frac{3}{4}$ en el agua, liberados varias veces, cayeron en nunca menos de 12 y nunca más de 13 oscilaciones, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Según la teoría, estos globos deberían haber caído en un tiempo de $11\frac{1}{3}$ oscilaciones, aproximadamente.

EXPERIMENTO 10. Cuatro globos, cada uno de un peso de 384 granos en el aire y $119\frac{1}{2}$ en el agua, liberados varias veces, cayeron en tiempos de $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ y 19 oscilaciones, describiendo una altura de $181\frac{1}{2}$ pulgadas. Y cuando cayeron en un tiempo de 19 oscilaciones, algunas veces oí que chocaban contra las paredes del recipiente antes de llegar al fondo.

Según la teoría deberían haber caído en un tiempo de $15\frac{5}{9}$ oscilaciones, aproximadamente.

EXPERIMENTO 11. Tres globos iguales, cada uno de un peso de 48 granos en el aire y $3\frac{29}{32}$ en el agua, liberados varias veces, cayeron en tiempos de $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 y 46 oscilaciones, en su mayor parte en 44 y 45, describiendo una altura de $182\frac{1}{2}$ pulgadas, aproximadamente.

Según la teoría deberían haber caído en un tiempo de $46\frac{5}{9}$ oscilaciones, aproximadamente.

EXPERIMENTO 12. Tres globos iguales, cada uno de un peso

de 141 granos en el aire y $4\frac{3}{8}$ en el agua, liberados varias veces, cayeron en tiempos de 61, 62, 63, 64 y 65 oscilaciones, aproximadamente, describiendo un espacio de 182 pulgadas.

Y según la teoría deberían haber caído en un tiempo de $64\frac{1}{2}$ oscilaciones, aproximadamente.

Estos experimentos ponen de manifiesto que cuando los globos caen despacio, como en los Experimentos dos, cuatro, cinco, ocho, once y doce, los tiempos de caída son correctamente expuestos por la teoría, pero que cuando los globos caen más velozmente, como en los Experimentos seis, nueve y diez, la resistencia es algo mayor que el cuadrado de la velocidad. Pues los globos, al caer, oscilan un poco, y esta oscilación, cuando los globos son ligeros y caen despacio, cesa pronto, por la debilidad del movimiento; pero cuando los globos son mayores y más pesados, el movimiento, al ser fuerte, dura más tiempo, y no es controlado por el agua ambiente hasta después de varias oscilaciones. Además, cuanto más velozmente se mueven los globos, menos presionados son por el fluido en sus partes posteriores, y si la velocidad es continuamente incrementada, terminarán por dejar un espacio vacío detrás, salvo que al mismo tiempo se incremente la compresión del fluido. Pues la compresión del fluido debe incrementarse (por las Proposiciones XXXII y XXXIII) como el cuadrado de la velocidad, con el fin de mantener la resistencia en la misma razón al cuadrado. Pero como esto no se ha hecho, los globos que se mueven velozmente no están tan presionados en sus partes posteriores como los otros, y al faltar esta presión ocurre que su resistencia es algo mayor que el cuadrado de su velocidad.

Por tanto, la teoría concuerda con los experimentos sobre cuerpos que caen en el agua. Nos resta examinar las observaciones de cuerpos que caen por el aire.

EXPERIMENTO 13. En junio de 1710, desde la cima de la Iglesia de *San Pablo* en *Londres*, se dejaron caer juntos dos globos de vidrio, uno lleno de mercurio y el otro de aire; describieron en su caída una altura de 220 pies *ingleses*. Se dispuso una tabla de madera sujeta por un lado a unos goznes de hierro y por el otro a una clavija de madera. Los dos globos que reposaban sobre la tabla fueron liberados juntos sacando la clavija por medio de un alambre de hierro que llegaba hasta el suelo, de forma que al sacar la clavija, la tabla, sin más apoyo que los goznes de hierro, cayó hacia abajo y, girando sobre los goznes, permitió la caída de los globos. En el mismo momento,

con el mismo tirón del alambre de hierro que sacó la clavija, se liberó un péndulo que oscilaba al segundo y que así inició sus oscilaciones. Los diámetros y pesos de los globos, así como sus tiempos de caída, se exponen en la tabla adjunta.

Pero los tiempos observados deben corregirse, pues los globos de mercurio (según la teoría de *Galileo*) describirán 257 pies *ingleses* en un tiempo de 4 segundos, y 220 pies en sólo 3 segundos 42 terceros. Así que la tabla de madera no giró sobre sus goznes al sacarse al clavija con la presteza debida, y la lentitud del giro perturbó el comienzo del descenso de los globos. Pues los globos estaban situados aproximadamente en la mitad de la tabla y, de hecho, más cercanos al eje de giro que a la clavija. De ahí que los tiempos se prolongaran aproximadamente 18 terceros, por lo que deben ser corregidos sustrayendo el exceso, especialmente en el caso de los globos mayores, que, debido a sus mayores diámetros, permanecieron sobre la tabla giratoria más tiempo que los demás. Hecho esto, los tiempos en que cayeron los seis globos mayores resultan ser 8 segundos 12 terceros, 7 segundos 42 terceros, 7 segundos 42 terceros, 7 segundos 57 terceros, 8 segundos 12 terceros y 7 segundos 42 terceros.

Los globos llenos de mercurio			Los globos llenos de aire		
Pesos	Diámetros	Tiempos de caída	Pesos	Diámetros	Tiempos de caída
granos	*pulgadas*	*segundos*	*granos*	*pulgadas*	*segundos*
908	0,8	4	510	5,1	$8\frac{1}{2}$
983	0,8	4 –	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4 +	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4 +	641	5,2	8

En consecuencia, el quinto de los globos llenos de aire, de 5 pulgadas de diámetro y 483 granos de peso, cayó en 8 segundos 12 terceros, describiendo un espacio de 220 pies. El peso de un volumen de agua igual a este globo es de 16600 granos, y el peso de un volumen igual de aire es de $\frac{16600}{860}$ granos, o $19\frac{3}{6}$ granos,

por lo que el peso del globo en el vacío es de $502\frac{3}{10}$ granos, peso que es al de un volumen de aire igual al globo como $502\frac{3}{10}$ a $19\frac{3}{10}$, y como 2F a $\frac{8}{3}$ del diámetro del globo, es decir, a $13\frac{1}{3}$ pulgadas. Por tanto, 2F será 28 pies 11 pulgadas. Un globo que caiga en el vacío con todo su peso de $502\frac{3}{10}$ granos describirá en un segundo $193\frac{1}{3}$ pulgadas, como más arriba, y con un peso de 483 granos describirá 185,905 pulgadas, y con el mismo peso de 483 granos describirá en el vacío el espacio F, ó 14 pies $5\frac{1}{2}$ pulgadas, en un tiempo de 57 terceros y 58 cuartos, adquiriendo la velocidad máxima que es capaz de alcanzar descendiendo en el aire. Con esta velocidad, el globo describirá 245 pies y $5\frac{1}{3}$ pulgadas en un tiempo de 8 segundos 12 terceros. Sustráigase $1{,}3863 \times F$, ó 20 pies y $\frac{1}{2}$ pulgada, y quedarán 225 pies 5 pulgadas. En consecuencia, según la teoría, el globo debería describir este espacio en 8 segundos 12 terceros. Pero en el experimento describió un espacio de 220 pies. La diferencia es inapreciable.

Mediante cálculos análogos aplicados a los otros globos llenos de aire, compuso la siguiente tabla.

Pesos de los globos	Los diámetros	Tiempos de caída desde una altura de 220 pies		Espacios que deberían describirse según la teoría		Los excesos	
granos	*pulgadas*	*segundos*	*tercios*	*pies*	*pulgadas*	*pies*	*pulgadas*
510	5,1	8	12	226	11	6	11
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	0
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

EXPERIMENTO 14. En el mes de julio del año 1719, el doctor *Desaguliers* realizó de nuevo varios experimentos de esta índole, dando forma de orbes esféricos a vejigas de puerco. Esto se hacía por medio de esferas cóncavas de madera, donde las vejigas, previamente empapadas, eran introducidas e infladas hasta llenar la cavidad esférica, de la que se sacaban una vez secas. Las vejigas se soltaron desde una lámpara situada en la parte superior de la cúpula de la misma iglesia, lo que supone una

altura de 272 pies. Simultáneamente se soltó un globo de plomo de unas dos libras *troy* de peso. Mientras tanto, varias personas situadas en la parte superior de la iglesia, donde se soltaron los globos, observaron los tiempos totales de caída, y otras, situadas en el suelo, observaron las diferencias entre la caída del peso de plomo y la caída de la vejiga. Los tiempos se midieron con péndulos oscilando al medio segundo. Una de las personas situadas en el suelo tenía una máquina que vibraba cuatro veces por segundo, y otra tenía una máquina hecha con precisión con un péndulo que vibraba también cuatro veces por segundo. También uno de los que se encontraban en la parte superior de la iglesia tenía una máquina análoga, y estos instrumentos estaban concebidos de forma que sus movimientos pudieran detenerse o renovarse a voluntad. Pues bien, el globo de plomo cayó en un tiempo aproximado de $4\frac{1}{4}$ segundos; añadiendo este tiempo a la diferencia de tiempo antes mencionada se obtuvo el tiempo total de caída de la vejiga. Los tiempos de caída de las cinco vejigas, tras haber llegado al suelo el globo de plomo, fueron la primera vez $14\frac{3}{4}$ segundos, $12\frac{3}{4}$ segundos, $14\frac{5}{8}$ segundos, $17\frac{3}{4}$ segundos y $16\frac{7}{8}$ segundos, y la segunda vez $14\frac{1}{2}$ segundos, $14\frac{1}{4}$ segundos, 14 segundos, 19 segundos y $16\frac{3}{4}$ segundos. Añádanse $4\frac{1}{4}$ segundos, tiempo empleado por el globo en caer, y los tiempos totales de caída de las cinco vejigas fueron la primera vez 19 segundos, 17 segundos, $18\frac{7}{8}$ segundos, 22 segundos y $21\frac{1}{8}$ segundos, y la segunda vez $18\frac{3}{4}$ segundos, $18\frac{1}{2}$ segundos, $18\frac{1}{4}$ segundos, $23\frac{1}{4}$ segundos y 21 segundos. Los tiempos observados en la parte superior de la iglesia fueron la primera vez $19\frac{3}{8}$ segundos, $17\frac{1}{4}$ segundos, $18\frac{3}{4}$ segundos, $22\frac{1}{8}$ segundos y $21\frac{5}{8}$ segundos, y la segunda vez 19 segundos, $18\frac{5}{8}$ segundos, $18\frac{3}{8}$ segundos, 24 segundos y $21\frac{1}{4}$ segundos. Pero las vejigas no caían siempre directamente hacia abajo, sino que a veces revoloteaban un poco por el aire, oscilando en su descenso. Estos movimientos prolongaron sus tiempos de caída, incrementándolo unas veces en medio segundo y otras en todo un segundo. Las vejigas segunda y cuarta fueron las que cayeron más directamente la primera vez, y las vejigas primera y tercera la segunda vez. La quinta vejiga estaba arrugada, y sus arrugas la retardaron un poco. Determiné sus diámetros por medio de sus circunferencias, medidas con un hilo muy fino que les daba dos vueltas. En la tabla siguiente he comparado los experimentos con la teoría, suponiendo que la densidad del aire es a la densidad del agua de lluvia como 1 a 860 y calculando los

espacios que los globos deberían describir en su caída de acuerdo con la teoría.

Pesos de las vejigas	Diámetros	Tiempos de caída desde una altura de 272 pies	Espacios que según la teoría deberían haber descrito en dichos tiempos		Diferencia entre la teoría y los experimentos	
granos	*pulgadas*	*segundos*	*pies*	*pulgadas*	*pies*	*pulgadas*
128	5,28	19	271	11	− 0	1
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	18	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{7}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+10	0

Nuestra teoría, en consecuencia, expone certera y muy aproximadamente toda la resistencia con que tropiezan los globos que se mueven tanto en el agua como en el aire, y que parece ser proporcional a las densidades de los fluidos en globos de igual velocidad y volumen.

En el Escolio adjunto a la sexta Sección mostramos mediante experimentos con péndulos que las resistencias de globos igualmente veloces que se mueven en el aire, el agua y el mercurio son como las densidades de los fluidos. Aquí probamos lo mismo con mayor precisión mediante experimentos con cuerpos que caen en el aire y el agua. Pues los péndulos excitan en cada oscilación un movimiento del fluido que siempre es contrario al movimiento de vuelta del péndulo, y la resistencia debida a este movimiento, así como la resistencia del hilo del que cuelga el péndulo, hacen que la resistencia total del péndulo sea mayor que la resistencia deducida de los experimentos con cuerpos que caen. Pues, a tenor de los experimentos con péndulos descritos en el mencionado Escolio, un globo de la misma densidad que el agua perdería $\frac{1}{3342}$ parte de su movimiento al describir en el aire la longitud de su semidiámetro. Pero a tenor de la teoría expuesta en esta Sección séptima y confirmada por los experimentos con cuerpos que caen, el mismo globo sólo perdería una parte de su movimiento igual a $\frac{1}{4586}$ al describir la misma longitud, suponiendo que la densidad

del agua sea a la densidad del aire como 860 a 1. En consecuencia, las resistencias determinadas por los experimentos con péndulos fueron (por las razones recién mencionadas) mayores que las determinadas por los experimentos con globos que caen, y ello en una razón de 4 a 3, aproximadamente. Sin embargo, como las resistencias de los péndulos que oscilan en el aire, el agua y el mercurio son igualmente incrementadas por causas análogas, la proporción de las resistencias en estos medios quedará suficientemente bien determinada tanto por los experimentos con péndulos como por los experimentos con cuerpos que caen. Y de todo ello puede concluirse que las resistencias de los cuerpos que se mueven en cualquier fluido, aun de la más extremada fluidez, son, en igualdad de las restantes condiciones, como las densidades de los fluidos.

Una vez establecido lo precedente, podemos ahora determinar qué parte de su movimiento perdería aproximadamente, en un tiempo dado, un globo proyectado en un fluido cualquiera. Sea D el diámetro del globo, V su velocidad al iniciarse el movimiento, T el tiempo en que un globo, con la velocidad V, puede describir en el vacío un espacio que es al espacio $\frac{8}{3}$D como la densidad del globo a la densidad del fluido, y el globo proyectado en dicho fluido perderá en cualquier otro tiempo t la parte $\frac{tV}{T+t}$, quedándole la parte $\frac{TV}{T+t}$, y describirá un espacio que será al descrito en el mismo tiempo en el vacío con la velocidad uniforme V como el logaritmo del número $\frac{T+t}{T}$, multiplicado por el número 2,302585093, es al número $\frac{t}{T}$, según el Corolario VII, Proposición XXV. Cuando los movimientos son lentos, la resistencia puede ser algo menor, porque la figura del globo se adapta mejor al movimiento que la figura de un cilindro descrito con el mismo diámetro. En movimientos veloces la resistencia puede ser algo mayor, porque la elasticidad y compresión del fluido no aumentan como el cuadrado de la velocidad. Pero no presto atención a estos pequeños detalles.

Y por muy sutiles que pudieran llegar a ser el aire, el agua, el mercurio y tales fluidos, convirtiéndose, por división *in infinitum* de sus partes, en medios infinitamente fluidos, la resistencia que opondrían a globos proyectados en ellos sería siempre la misma. Pues la resistencia considerada en las Proposiciones precedentes

es la debida a la inactividad de la materia, y la inactividad de la materia es esencial a los cuerpos y siempre proporcional a la cantidad de materia. La resistencia debida a la tenacidad y fricción de las partes puede, desde luego, disminuir por la división de las partes del fluido, pero esta división no disminuirá en absoluto la cantidad de materia, y si la cantidad de materia es la misma, su fuerza de inactividad será la misma y, en consecuencia, la resistencia de que aquí se habla será también la misma, al ser siempre proporcional a dicha fuerza. Para disminuir esta resistencia es necesario disminuir la cantidad de materia en los espacios por los que el cuerpo se mueve; en consecuencia, los espacios celestes, donde los globos de los planetas y cometas pasan continuamente en todas direcciones, con la mayor libertad y sin la menor disminución perceptible de su movimiento, deben estar completamente desprovistos de cualquier fluido corpóreo, con la posible excepción de algunos vapores extremadamente raros y de los rayos de luz.

Los proyectiles excitan movimiento en los fluidos al pasar por ellos, y este movimiento obedece al exceso de la presión del fluido en las partes anteriores del proyectil sobre la presión del mismo en las partes posteriores, y en medios infinitamente fluidos no puede ser menor que en el aire, el agua o el mercurio, en proporción a la densidad de la materia en cada uno de ellos. Ahora bien, este exceso de presión no se limita a excitar, en proporción a su cantidad, un movimiento en el fluido, sino que también actúa sobre el proyectil, retardando su movimiento. En consecuencia, la resistencia de todo fluido es como el movimiento excitado por el proyectil en el fluido, y en el éter más sutil, en proporción a la densidad de tal éter, no puede ser menor que en el aire, el agua y el mercurio, en proporción a la densidad de estos fluidos.

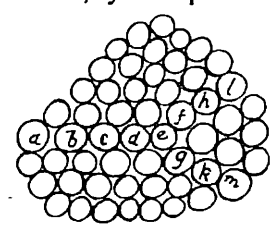
SECCION VIII

La propagación del movimiento por los fluidos.

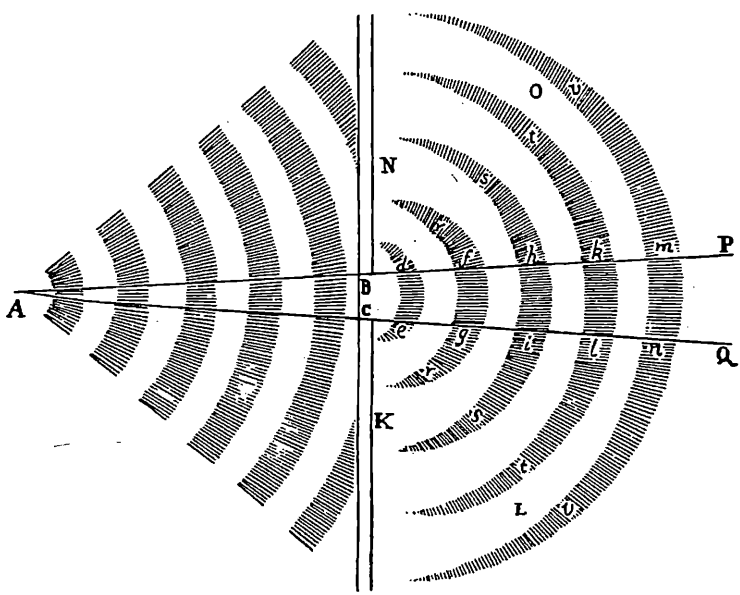
PROPOSICIÓN XLI. TEOREMA XXXII

La presión no se propaga por un fluido en direcciones rectilíneas excepto cuando las partículas del fluido están dispuestas en línea recta.

Si las partículas *a*, *b*, *c*, *d* están en línea recta, la presión puede, en verdad, propagarse directamente de *a* a *e*, pero entonces la partícula *e* impulsará oblicuamente a las partículas *f* y *g*, dispuestas oblicuamente, y estas partículas *f* y *g* no soportarán su presión si no están sostenidas por las partículas *h* y *k* que se encuentran más allá. Pero las partículas que las sostienen son también presionadas por ellas, y no pueden soportar esta presión sin ser a su vez sostenidas por las partículas que se encuentran aún más lejos, como *l* y *m*, a las que también presionan, y así *in infinitum*. En consecuencia, la presión, tan pronto es propagada a partículas separadas de la línea recta, comienza a desviarse hacia uno y otro lado, y se propagará oblicuamente *in infinitum*. Y una vez que ha comenzado a propagarse oblicuamente, si llega a partículas más distantes separadas de la línea recta, se desviará de nuevo hacia uno y otro lado, cosa que hará cada vez que se encuentra con partículas no exactamente dispuestas en línea recta. Q.E.D.



COROLARIO. Si cualquier parte de una presión propagada por un fluido desde un punto dado es interceptada por cualquier obstáculo, la parte restante, no interceptada, se desviará hacia los espacios situados detrás del obstáculo. Esto puede también demostrarse de la siguiente forma. Supongamos que la presión se propaga desde el punto A hacia cualquier parte y, cuando sea posible, en direcciones rectilíneas. Perforando el obstáculo NBCK en BC, permítase que toda la presión, salvo la parte coniforme APQ que pasa por el orificio circular BC, sea interceptada. Divídase el cono APQ en troncos mediante los planos transversales *de*, *fg*, *hi*. Entonces, mientras el cono ABC, propagando la presión, impulsa al tronco cónico *degf*, situado más allá, en la superficie *de*, y este tronco impulsa al siguiente tronco *fgih* en la superficie *fg*, y este tronco impulsa a un tercer tronco, y así *in infinitum*, es evidente (por la tercera Ley) que el primer tronco *defg* es tan impulsado y presionado en la superficie *fg* por la reacción del segundo tronco *fghi* como él mismo impulsa y presiona a dicho segundo tronco. En consecuencia, el tronco *degf* es comprimido por ambos lados, es decir, entre el cono A*de* y el tronco *fhig*, por lo que (por el Caso 6, Proposición XIX) no puede preservar su figura salvo si es

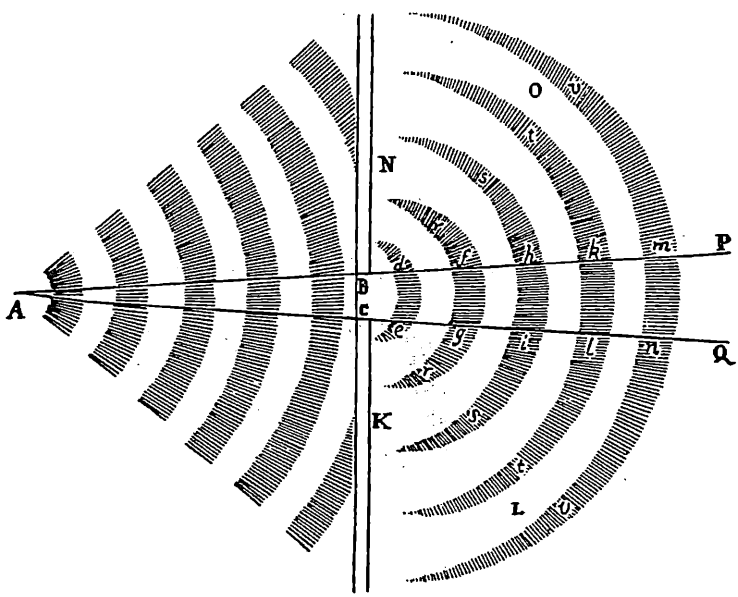


comprimido con la misma fuerza por todas partes. En consecuencia, pugnará con una fuerza igual a aquella que le presiona en las superficies *de*, *fg*, para abrirse camino por los lados *df*, *eg*, por donde saldrá (al no ser en absoluto tenaz o duro, sino perfectamente fluido), expandiéndose, salvo que tropiece con un fluido ambiente que se oponga a sus esfuerzos. En consecuencia, al esforzarse por salir, presionará al fluido ambiente en sus lados *df*, *eg* con la misma fuerza que presiona al tronco *fghi*, por lo que la presión se propagará desde los lados *df*, *eg* hacia los espacios NO, KL, a ambos lados, tanto como se propaga desde la superficie *fg* hacia PQ. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XLII. TEOREMA XXXIII

Todo movimiento propagado por un fluido diverge de un progreso rectilíneo en los espacios inmóviles.

CASO 1. Supóngase que el movimiento se propaga desde el punto A por el orificio BC y, en la medida de lo posible,



supóngase que penetra en el espacio cónico BCQP por líneas rectas divergentes desde el punto A. Supongamos en primer lugar que este movimiento es el de las olas sobre la superficie de un agua en reposo. Sean *de*, *fg*, *hi*, *kl*, etc. las cúspides de las diversas olas, separadas unas de otras por otros tantos valles o huecos intermedios. Entonces, como el agua está más alta en los lomos de las olas que en las partes inmóviles del fluido KL, NO, bajará desde las partes superiores de dichos lomos, *e*, *g*, *i*, *l*, etc., *d*, *f*, *h*, *k*, etc., por todas partes, hacia KL y NO. Y como el agua está más baja en los huecos de las olas que en las partes inmóviles del fluido KL, NO, bajará hacia dichos huecos desde las partes inmóviles. Con el primer flujo, los lomos de las olas se dilatarán hacia todas partes, propagándose hacia KL y NO. Y como el movimiento de las olas desde A hacia PQ prosigue en un flujo continuo desde los lomos de las olas hacia los huecos contiguos, por lo que no puede ser más veloz más que en proporción a la celeridad del descenso, y el descenso del agua por cada lado hacia KL y NO debe realizarse con la misma velocidad, se sigue que la dilatación de las olas en ambos lados hacia KL y NO se propagará con la misma velocidad que el avance directo de las olas desde A hasta PQ. En consecuencia, todo el espacio, de un lado y otro, hacia KL y NO será llenado por las olas dilatadas *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, etc. Q.E.D. Esto puede comprobarlo cualquiera haciendo el experimento en agua en reposo.

CASO 2. Supongamos que *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* representan pulsaciones sucesivamente propagadas desde el punto A por un medio elástico. Imaginemos que las pulsaciones son propagadas por sucesivas condensaciones y rarefacciones del medio, de modo que la parte más densa de cada pulsación ocupe una superficie esférica descrita con centro A, y que entre las pulsaciones sucesivas hay intervalos iguales. Representen las líneas *de*, *fg*, *hi*, *kl*, etc. las partes más densas de las pulsaciones propagadas a través del orificio BC y, como el medio es más denso allí que en los espacios a ambos lados hacia KL y NO, se dilatará tanto hacia dichos espacios KL, NO, a ambos lados, como hacia los intervalos raros entre pulsaciones, por lo que el medio, cada vez más raro tras los intervalos y más denso tras las pulsaciones, compartirá su movimiento. Y puesto que el movimiento progresivo de las pulsaciones obedece a la continua relajación de las partes más densas hacia los intervalos raros precedentes, y las pulsaciones se relajarán a ambos lados hacia

las partes en reposo del medio KL, NO, con muy aproximadamente la misma celeridad, las pulsaciones se dilatarán por todos lados hacia las partes inmóviles KL, NO con prácticamente la misma celeridad con que se propagan directamente desde el centro A. En consecuencia, llenarán todo el espacio KLON. Q.E.D. Y la experiencia nos muestra que lo mismo ocurre con los sonidos que se escuchan cuando hay un monte interpuesto; y si entran en una habitación por la ventana, se dilatan hacia todas las partes del cuarto y se oyen en todas las esquinas, no reflejados por las paredes opuestas sino propagados directamente desde la ventana, en la medida en que nuestros sentidos pueden percibirlos.

CASO 3. Supongamos, finalmente, que un movimiento de cualquier tipo se propaga desde A por el orificio BC. Entonces, como esta propagación se debe a que las partes del medio que se encuentran cerca del centro A perturban y agitan a las que están más lejos, y como las partes impulsadas son fluidas, por lo que retroceden en todas direcciones hacia los espacios donde son menos presionadas, dichas partes retrocederán hacia todas las partes del medio en reposo, tanto las que se encuentran a ambos lados, como KL y NO, como las que están inmediatamente delante, como PQ. De esta forma, todo el movimiento empezará a dilatarse tan pronto haya pasado por el orificio BC, desde el cual, como principio y centro, se propagará directamente en todas direcciones.

PROPOSICION XLIII. TEOREMA XXXIV

Todo cuerpo vibrante situado en un medio elástico propaga el movimiento de las pulsaciones hacia adelante, en todas direcciones, pero en un medio no elástico excita un movimiento circular.

CASO 1. Las partes del cuerpo vibrante, que van y vuelven alternativamente, impulsan y empujan al avanzar a las partes del medio que se encuentran más cerca, comprimiéndolas y condensándolas con dicho impulso, y al volver motivan que dichas partes retrocedan y se expandan. En consecuencia, las partes del medio que se encuentran más cerca del cuerpo vibrante se mueven hacia adelante y hacia atrás alternativamente, como hacen las partes de cuerpo vibrante y, por la misma razón que

las partes de dicho cuerpo agitan las del medio, estas últimas, agitadas por parecidos temblores, agitarán a su vez las que se encuentran más allá, y así *in infinitum*. E igual que las primeras partes del medio se condensan en el avance y se relajan en el retroceso, también las otras partes se condensarán cada vez que avancen y se expandirán cada vez que retrocedan. En consecuencia, no todas avanzan y retroceden en el mismo instante (pues en ese caso mantendrían siempre distancias determinadas entre sí, y no podría haber condensación y rarefacción alternativa), sino que unas avanzan mientras las otras retroceden, *in infinitum*, puesto que en los puntos de condensación se acercan unas a otras y en los puntos de rarefacción se alejan unas de otras.

Las partes que avanzan y al avanzar se condensan son pulsaciones, por razón del movimiento progresivo con que chocan contra los obstáculos que se interponen en su camino. En consecuencia, las pulsaciones sucesivas producidas por un cuerpo vibrante se propagarán en direcciones rectilíneas, y a distancias casi iguales unas de otras, debido a los intervalos iguales de tiempo con que el cuerpo, al temblar sucesivamente, produce sucesivas pulsaciones. Y aunque las partes del cuerpo vibrante avanzan y retroceden en una dirección determinada y cierta, las pulsaciones desde allí propagadas hacia el medio se dilatarán, según la anterior Proposición, hacia los lados, propagándose por todas partes desde el cuerpo vibrante, como desde un centro común, en superficies casi esféricas y concéntricas, como las ondas que se excitan en el agua al introducir un dedo, que no sólo avanzan y retroceden siguiendo el movimiento del dedo sino que se dispersan en forma de círculos concéntricos a su alrededor, propagándose por todas partes. Pues la gravedad del agua ocupa el lugar de la fuerza elástica.

CASO 2. Si el medio no es elástico, como sus partes no pueden ser condensadas por la presión debida a las partes vibrantes del cuerpo vibrante, el movimiento se propagará instantáneamente hacia las partes donde el medio cede con mayor facilidad, es decir, hacia las partes que el cuerpo vibrante dejaría de otro modo vacías tras él. Lo mismo ocurre con un cuerpo proyectado en un medio cualquiera. El medio, al ceder ante el proyectil, no retrocede *in infinitum*, sino que, con un movimiento circular, acude a los espacios que el cuerpo deja atrás. En consecuencia, cada vez que un cuerpo vibrante tiende hacia alguna parte, el medio que cede ante él acude en círculo a

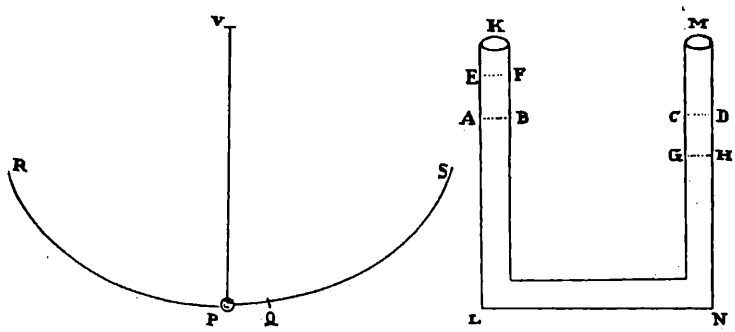
las partes que el cuerpo deja, y cada vez que el cuerpo vuelve a su lugar, el medio es desplazado del lugar al que acudió y retorna a su lugar de origen. El cuerpo vibrante, aunque no sea firme y duro, sino flexible en todos los sentidos, si conserva una magnitud dada no puede impulsar al medio con sus temblores hacia parte alguna sin a la vez ceder ante él en otra parte, por lo que el medio, retrocediendo ante las partes del cuerpo por las que es presionado, vuelve siempre en círculo a las partes que ceden ante él. Q.E.D.

COROLARIO. Por tanto, es un error pensar que la agitación de las partes de llama conduce a la propagación de una presión en direcciones rectilíneas por el medio ambiente. Esta presión no se debe a la sola agitación de las partes de llama, sino a la dilatación del todo.

PROPOSICIÓN XLIV. TEOREMA XXXV

Si el agua asciende y desciende alternativamente por los tubos alzados KL, MN *de un canal o tubería, y se construye un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea igual a la mitad de la longitud del agua que hay en el canal, afirmo que el agua ascenderá y descenderá tantas veces como oscile el péndulo.*

Mido la longitud del agua en los ejes y tubos alzados del canal y la hago igual a la suma de dichos ejes; y no presto atención alguna a la resistencia del agua debida a su rozamiento por los lados del canal. Representen, en consecuencia, AB, CD la altura media del agua en ambos tubos, y cuando el agua del tubo KL alcance la altura EF, el agua descenderá en el tubo MN hasta la altura GH. Sea P un cuerpo pendular, VP el hilo, V el punto de suspensión, RPQS la cicloide que el péndulo describe, P su punto más bajo, PQ un arco igual a la altura AE. La fuerza con que el movimiento del agua es alternativamente acelerado y retardado es el exceso del peso del agua de un tubo sobre el peso del agua en el otro. En consecuencia, cuando el agua asciende en el tubo KL hasta EF, mientras en el otro tubo desciende hasta GH, dicha fuerza es el doble del peso del agua EABF, por lo que es al peso de toda el agua como AE o PQ a VP o PR. También la fuerza con que el cuerpo P es acelerado o



retardado en cualquier punto, por ejemplo Q, de una cicloide (por el Corolario de la Proposición LI, Libro I), es a su peso total como su distancia PQ desde el punto más bajo P a la longitud PR de la cicloide. En consecuencia, las fuerzas motrices del agua y el péndulo, al describir los espacios iguales AE, PQ, son como los pesos a mover, por lo que si el agua y el péndulo están inicialmente en reposo, dichas fuerzas los moverán en tiempos iguales, haciendo que vayan y vuelvan juntos con un movimiento recíproco. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, las reciprocaciones del agua al ascender y descender se realizan todas en tiempos iguales, tanto si el movimiento es intenso como si es remiso.

COROLARIO II. Si la longitud total del agua del canal es de $6\frac{1}{9}$ pies, medida *francesa*, el agua descenderá en un segundo de tiempo, ascenderá en otro segundo, y así sucesivamente *in infinitum*, pues un péndulo de $3\frac{1}{18}$ piès de la misma medida oscila en un segundo de tiempo.

COROLARIO III. Pero si la longitud del agua aumenta o disminuye, el tiempo de reciprocación aumentará o disminuirá como la raíz cuadrada de la longitud.

PROPOSICIÓN XLV. TEOREMA XXXVI

La velocidad de las olas varía como la raíz cuadrada de las anchuras.

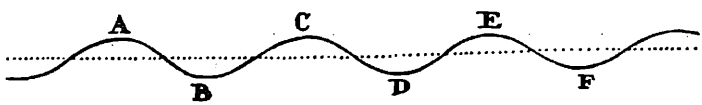
Esto se desprende de la construcción de la siguiente Proposición.

PROPOSICIÓN XLVI. PROBLEMA X

Determinar la velocidad de las olas.

Constrúyase un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea igual a la anchura de las olas, y en el tiempo empleado por el péndulo para una simple oscilación las olas avanzarán un espacio casi igual a su anchura.

Llamo anchura de las olas a la medida transversal entre la parte más profunda de sus huecos o las cimas de sus lomos. Represente ABCDEF la superficie de agua estancada que asciende y desciende en olas sucesivas; sean A, C, E, etc. las cimas de las olas, y B, D, F, etc. los huecos intermedios. Como el movimiento de las olas obedece al sucesivo ascenso y descenso



del agua, por lo que las partes de la misma, como A, C, E, etc., que están en un cierto momento en el punto más alto, se encuentran en el punto más bajo inmediatamente después, y puesto que la fuerza motriz que hace ascender a las partes más bajas y descender a las más altas es el peso del agua elevada, el ascenso y descenso alternativo será análogo al movimiento recíproco del agua en el canal y observará las mismas leyes sobre los tiempos de ascenso y descenso. En consecuencia (por la Proposición XLIV), si las distancias entre los puntos más altos de las olas A, C, E y los más bajos B, D, F son iguales a dos veces la longitud de un péndulo, las partes más altas A, C, E se convertirán en las más bajas en el tiempo de una oscilación, y en el tiempo de otra ascenderán de nuevo. En consecuencia, en cada paso de una ola transcurrirá el tiempo de dos oscilaciones, es decir, la ola describirá su anchura en el tiempo en que el péndulo oscila dos veces. Pero un péndulo de cuatro veces dicha longitud, igual, por tanto, a la anchura de las olas, sólo oscilará una vez en ese tiempo. Q.E.I.

COROLARIO I. En consecuencia, una ola cuya anchura sea igual a $3\frac{1}{18}$ pies *franceses* avanzará un espacio igual a su anchura en un segundo de tiempo, por lo que en un minuto recorrerá un

espacio de $183\frac{1}{3}$ pies, y en una hora un espacio de 11.000 pies, aproximadamente.

COROLARIO II. Y la velocidad de olas mayores o menores aumentará o disminuirá como la raíz cuadrada de su anchura.

Todo ello es cierto en el supuesto de que las partes del agua asciendan o desciendan en línea recta. La verdad, sin embargo, es que ese ascenso y descenso es más bien de carácter circular, por lo que el tiempo que expongo en esta Proposición es sólo aproximado.

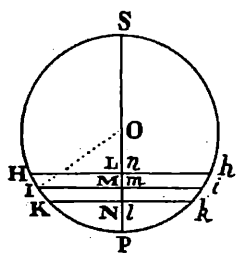
PROPOSICIÓN XLVII. TEOREMA XXXVII

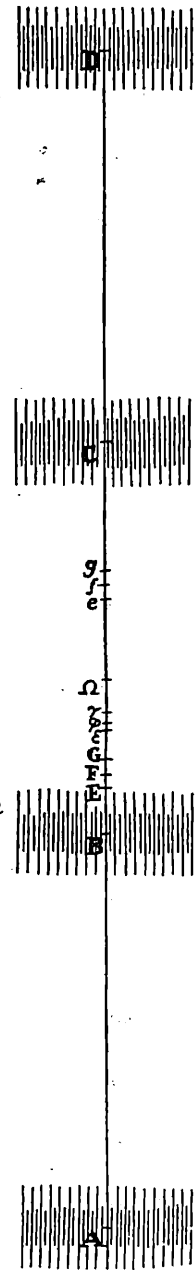
Si las pulsaciones se propagan por un fluido, las diversas partículas del fluido, yendo y viniendo con el movimiento recíproco más corto, se aceleran o retardan siempre conforme a la ley de la oscilación del péndulo.

Representen AB, BC, CD, distancias iguales de pulsaciones sucesivas, ABC la línea por la que se dirige el movimiento de las sucesivas pulsaciones propagadas desde A hasta B; sean E, F, G, tres puntos físicos del medio en reposo situados en la línea recta AC, a iguales distancias unos de otros, E*e*, F*f*, G*g*, espacios iguales de extremada brevedad por donde aquellos puntos van y vuelven con movimiento recíproco en cada vibración, ε, ϕ, γ, cualesquiera lugares intermedios de los mismos puntos, EF, FG, líneas físicas breves, o partes lineales del medio situadas entre los puntos y transferidos sucesivamente a los lugares $\varepsilon\phi$, $\phi\gamma$, y *ef*, *fg*. Trácese la línea recta PS igual a la línea recta E*e*. Biséctese dicha línea en O y descríbase, con centro O y radio OP, el círculo SIP*i*. Represéntese mediante toda la circunferencia de este círculo y sus partes el tiempo de una vibración completa, con sus partes proporcionales, de forma que, cuando cualquier tiempo PH o PHS*h* es completado, si se abate la perpendicular HL o *hn*, hasta PS y se toma Eε igual a PL o P*n*, el punto físico E pueda hallarse en ε. Un punto como E, moviéndose, conforme a esta ley, con un movimiento recíproco, y yendo desde E hasta *e* por ε y volviendo, de nuevo por ε, a E, completará sus vibraciones con los mismos grados de aceleración y retardación que un péndulo oscilante. Nos falta ahora probar que los diversos puntos físicos del medio se agitarán con este tipo de

movimiento. Supongamos, por tanto, que un medio ha sido excitado a moverse de esta forma por una causa cualquiera, y veamos qué ocurre entonces.

Tómense en la circunferencia PHS*h* los arcos iguales HI, IK, o *hi*, *ik*, en la misma razón a la circunferencia entera que las líneas rectas iguales EF, FG a BC, intervalo entero de las pulsaciones. Abátanse las perpendiculares IM, KN, o *im*, *kl*; entonces, como los puntos E, F, G, son agitados sucesivamente con movimientos análogos y realizan vibraciones completas de ida y vuelta mientras la pulsación es transferida de B a C, si PH o PHS*h* es el tiempo transcurrido desde el comienzo del movimiento del punto E, PI o PHS*i* será el tiempo transcurrido desde el comienzo del movimiento del punto F, y PK o PHS*k* el tiempo transcurrido desde el comienzo del movimiento del punto G. En consecuencia, Eε, Fϕ, Gγ, serán iguales, respectivamente, a PL, PM, PN, cuando los puntos van, y a P*n*, P*m*, P*l*, cuando los puntos vuelven. En consecuencia, cuando los puntos van, εγ o EG+Gγ−Eε, será igual a EG−LN, y cuando los puntos vuelven igual a EG+*ln*. Pero εγ es la anchura o expansión de la parte EG del medio en el lugar εγ, por lo que la expansión de dicha parte en su ida es a su expansión media como EG−LN a EG, y en su vuelta como EG+*ln* o EG+LN a EG. En consecuencia, puesto que LN es a KH como IM al radio OP, y KH a EG como la circunferencia PHS*h*P a BC, es decir, si llamamos V al radio de un círculo cuya circunferencia es igual al intervalo BC de las pulsaciones, como OP a V, y, multiplicando entre sí términos correspondientes de las proporciones, obte-





nemos LN a EG como IM a V, la expansión de la parte EG, o del punto físico F en el lugar $\varepsilon\gamma$ será a la expansión media de dicha parte en su primer lugar EG como V − IM es a V a la ida, y como V + *im* es a V a la vuelta. Por tanto, la fuerza elástica del punto F en el lugar $\varepsilon\gamma$ es a su fuerza elástica media en el lugar EG como $\frac{1}{V-IM}$ es a $\frac{1}{V}$ a la ida, y como $\frac{1}{V+im}$ es a $\frac{1}{V}$ a la vuelta. Y, según el mismo razonamiento, las fuerzas elásticas de los puntos físicos E y G son a la ida como $\frac{1}{V-HL}$ y $\frac{1}{V-KN}$ es a $\frac{1}{V}$, y la diferencia de las fuerzas es a la fuerza elástica del medio como $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ es a $\frac{1}{V}$, es decir, como $\frac{HL-KN}{VV}$ es a $\frac{1}{V}$, o como HL − KN es a V, en el supuesto de que (por razón de la cortísima extensión de las vibraciones) HL y KN sean infinitamente menores que la cantidad V. En consecuencia, como la cantidad V está dada, la diferencia de las fuerzas es como HL − KN, es decir (puesto que HL − KN es proporcional a HK, y OM a OI o OP, y puesto que HK y OP están dados), como OM, es decir, si F*f* es bisectado en Ω, como $\Omega\phi$. Por la misma razón, la diferencia de las fuerzas elásticas de los puntos físicos ε y γ, a la vuelta de la línea física breve $\varepsilon\gamma$, es como $\Omega\phi$. Pero esta diferencia (es decir, el exceso de la fuerza elástica del punto ε sobre la fuerza elástica del punto γ) es precisamente la fuerza por la que la línea física breve intermedia $\varepsilon\gamma$ del medio es acelerada a la ida y retardada a la vuelta. En consecuencia, la fuerza acelerativa de la línea breve $\varepsilon\gamma$ es como su distancia a Ω, punto medio de la vibración. En consecuencia (por la Proposición XXXVIII, Libro I), el tiempo es adecuadamente representado por el arco PI, y la parte lineal del medio $\varepsilon\gamma$ se mueve conforme a la ley arriba mencionada, es decir, conforme a la ley de la oscilación del péndulo. Y lo mismo ocurre con todas las partes lineales que componen el medio. Q.E.D.

COROLARIO. De ello se desprende que el número de pulsaciones propagadas es el mismo que el número de vibraciones del cuerpo vibrante, y no se multiplica con su progreso. Pues la línea física breve $\varepsilon\gamma$ estará en reposo tan pronto retorne a su

lugar de origen, y no volverá a moverse si no recibe nuevo movimiento, ya sea del impulso del cuerpo vibrante, ya sea de las pulsaciones propagadas desde dicho cuerpo. En consecuencia, tan pronto las pulsaciones dejen de propagarse desde el cuerpo vibrante, volverá a un estado de reposo y no se moverá más.

PROPOSICIÓN XLVIII. TEOREMA XXXVIII

Las velocidades de las pulsaciones propagadas en un fluido elástico están en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón directa de la fuerza elástica y la raíz cuadrada de la razón inversa de la densidad, en el supuesto de que la fuerza elástica del fluido sea proporcional a su condensación.

CASO 1. Si los medios son homogéneos y las distancias de las pulsaciones en dichos medios son iguales entre sí, pero el movimiento es en un medio más intenso que en el otro, las contracciones y dilataciones de las partes correspondientes serán como dichos movimientos, aunque esta proporción no es perfectamente precisa. No obstante, si las contracciones y dilataciones no son extremadamente intensas, el error será inapreciable, por lo que esta proposición puede considerarse como físicamente exacta. Pues bien, las fuerzas elásticas motrices son como las contracciones y dilataciones, y las velocidades generadas en el mismo tiempo en partes iguales son como las fuerzas. En consecuencia, las partes iguales y correspondientes de las pulsaciones correspondientes irán y volverán juntas por espacios proporcionales a sus contracciones y dilataciones, con velocidades que son como dichos espacios, por lo que las pulsaciones, que en el transcurso de una ida y una vuelta avanzan un espacio igual a su anchura y penetran siempre en los lugares de las pulsaciones inmediatamente precedentes, avanzarán, por razón de la igualdad de las distancias, con igual velocidad en ambos medios.

CASO 2. Si las distancias o las longitudes de las pulsaciones son mayores en un medio que en otro, supongamos que las partes correspondientes, en su ida y vuelta, describen espacios siempre proporcionales a las anchuras de las pulsaciones. En ese caso, sus contracciones y dilataciones serán iguales; en consecuencia, si los medios son homogéneos, las fuerzas elásticas

motrices, que los agitan con un movimiento recíproco, serán también iguales. Ahora bien, la materia a mover por dichas fuerzas es como la anchura de las pulsaciones, y el espacio por el que se mueven cada vez que van y vuelven está en la misma razón. Por lo demás, el tiempo de una ida y vuelta está en razón compuesta de la raíz cuadrada de la materia y la raíz cuadrada del espacio, por lo que es como el espacio. Pero las pulsaciones avanzan un espacio igual a sus anchuras en el tiempo de una ida y una vuelta, es decir, recorren espacios proporcionales a los tiempos y son, en consecuencia, igualmente veloces.

CASO 3. En consecuencia, en medios de igual densidad y fuerza elástica, las pulsaciones son igualmente veloces. Ahora bien, si la densidad o la fuerza elástica del medio aumentan, entonces, dado que la fuerza motriz aumenta en razón de la fuerza elástica, y que la materia a mover aumenta en razón de la densidad, el tiempo necesario para producir el mismo movimiento que antes aumentará como la raíz cuadrada de la razón de la densidad y disminuirá como la raíz cuadrada de la razón de la fuerza elástica. En consecuencia, la velocidad de las pulsaciones estará en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón inversa de la densidad del medio y la raíz cuadrada de la razón directa de la fuerza elástica. Q.E.D.

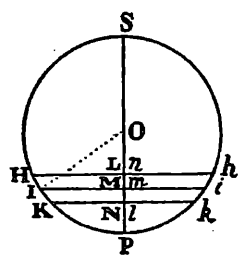
Esta Proposición quedará mejor aclarada tras la construcción del siguiente problema.

PROPOSICIÓN XLIX. PROBLEMA XI

Dadas la densidad y fuerza elástica de un medio, determinar la velocidad de las pulsaciones.

Supóngase que el medio está presionado por un peso que reposa sobre él a la manera de nuestro aire. Sea A la altura de un medio homogéneo cuyo peso es igual al que reposa sobre él y cuya densidad es la misma que la del medio comprimido donde se propagan las pulsaciones. Supóngase que se construye un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación es A, y en el tiempo en que dicho péndulo complete una oscilación de ida y vuelta, la pulsación se propagará hacia adelante por un espacio igual a la circunferencia de un círculo descrito con radio A.

Pues, respetando la construcción de la Proposición XLVII, si cualquier línea física que, como EF, describe el espacio PS en cada vibración sufre en los extremos P y S de cada ida y vuelta la acción de una fuerza elástica igual a su peso, completará sus diversas vibraciones en el tiempo en que oscilaría en un cicloide cuyo perímetro sea igual a la longitud PS, porque fuerzas iguales impulsan a corpúsculos iguales por espacios iguales en tiempos iguales. En consecuencia, puesto que los tiempos de las oscilaciones son como la raíz cuadrada de las longitudes de los péndulos, y la longitud del péndulo igual a la mitad del arco de la cicloide completa, el tiempo de una vibración será al tiempo de oscilación de un péndulo cuya longitud sea A como la raíz cuadrada de la longitud $\frac{1}{2}$PS o PO a la longitud A. Pero la fuerza elástica que impulsa a la línea física breve EG cuando se encuentra en sus puntos extremos P, S era (en la demostración de la Proposición XLVII) a toda su fuerza elástica como HL − KN es a V, es decir (puesto que el punto K cae ahora sobre P), como HK a V, y toda esa fuerza, o, lo que es lo mismo, el peso que reposa sobre la línea breve EG y la comprime, es al peso de la línea breve como la altitud del peso en cuestión es a EG, longitud de la línea breve. En consecuencia, tomando el producto de términos correspondientes, la fuerza con que la línea breve EG es impulsada en los puntos P y S es al peso de dicha línea breve como HK × A es a V × EG, o como PO × A es a VV, pues HK era a EG como PO a V. En consecuencia, dado que los tiempos en que cuerpos iguales son impulsados por espacios iguales son inversamente propor-



cionales a la raíz cuadrada de las fuerzas, el tiempo de una vibración producida por la acción de dicha fuerza elástica será al tiempo de la vibración producida por el impulso del peso como la raíz cuadrada de la razón de VV a PO × A, y, en consecuencia, al tiempo de oscilación de un péndulo cuya longitud sea A como la raíz cuadrada de la razón de VV a PO × A y como la raíz cuadrada de la razón de PO a A juntamente, es decir, estarán en la razón entera de V a A. Pero el pulso se propagará directamente hacia adelante por un espacio igual a su anchura BC en el tiempo de una vibración compuesta por la ida y vuelta del péndulo. En consecuencia, el tiempo en que una pulsación recorre el espacio BC es al tiempo de una oscilación compuesta por la ida y vuelta del péndulo como V es a A, es decir, como BC es a la circunferencia de un círculo cuyo radio es A. Pero el tiempo en que la pulsación recorre el espacio BC está en la misma razón al tiempo en que recorrería una longitud igual a dicha circunferencia y, en consecuencia, la pulsación recorrerá una longitud igual a dicha circunferencia en el tiempo de la mencionada oscilación. Q.E.D.

COROLARIO I. La velocidad de las pulsaciones es igual a la que los cuerpos pesados adquieren cayendo con un movimiento igualmente acelerado y describiendo en su caída la mitad de la altura A. Pues la pulsación, en el supuesto de que se mueva con la velocidad adquirida por esa caída, recorrerá en el tiempo de la caída un espacio igual a toda la altura A. En consecuencia, en el tiempo de una oscilación compuesta por una ida y una vuelta, recorrerá un espacio igual a la circunferencia de un círculo descrito con radio A, pues el tiempo de caída es al tiempo de oscilación como el radio de un círculo a su circunferencia.

COROLARIO II. En consecuencia, puesto que la altura A es directamente proporcional a la fuerza elástica del fluido e inversamente proporcional a la densidad del mismo, la velocidad de las pulsaciones estará en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón inversa de la densidad y la raíz cuadrada de la razón directa de la fuerza elástica.

PROPOSICIÓN L. PROBLEMA XII

Determinar las distancias de las pulsaciones.

Determínese el número de vibraciones del cuerpo cuyo temblor produce las pulsaciones para un tiempo dado. Divídase

por ese número el espacio que la pulsación puede recorrer en el mismo tiempo y se determinará la anchura de una pulsación. Q.E.I.

ESCOLIO

Las últimas Proposiciones atañen al movimiento de la luz y los sonidos. Dado que la luz se propaga en línea recta, es evidente que no puede consistir sólo en acción (según las Proposiciones XLI y XLII). En lo que toca a los sonidos, dado que provienen de cuerpos vibrantes, no pueden ser más que pulsaciones del aire propagadas por él (por la Proposición XLIII), como confirman los temblores que los sonidos fuertes y profundos excitan en los cuerpos cercanos, como ocurre con el sonido del tambor, pues los temblores rápidos y cortos no se excitan con tanta facilidad. Pero es bien sabido que cualquier sonido que caiga sobre cuerdas unidas a los cuerpos sonoros excita temblores en dichas cuerdas. Ello es también confirmado por la velocidad de los sonidos, pues dado que las gravedades específicas del agua de lluvia y el mercurio son entre sí aproximadamente como 1 a $13\frac{2}{3}$, y dado que las gravedades específicas del aire y el agua de lluvia son entre sí aproximadamente como 1 a 870 cuando el mercurio del barómetro alcanza una altura de 30 pulgadas de nuestra medida, las gravedades específicas del aire y el mercurio son entre sí como 1 a 11890. En consecuencia, cuando el mercurio alcanza una altura de 30 pulgadas, una altura de aire uniforme con peso suficiente para comprimir nuestro aire hasta su densidad conocida deberá ser igual a 356700 pulgadas, ó 29725 pies de nuestra medida, que es precisamente la altura del medio que he llamado A en la anterior Proposición. Un círculo de 29725 pies de radio tiene una circunferencia de 186768 pies. Y dado que un péndulo de $39\frac{1}{2}$ pulgadas de longitud completa una oscilación de ida y vuelta en dos segundos de tiempo, como es bien sabido, se sigue que un péndulo de 29725 pies, ó 186768 pulgadas de longitud completará una oscilación análoga en $190\frac{3}{4}$ segundos. En consecuencia, un sonido avanzará en ese tiempo 186768 pies, y en un segundo 979 pies.

Pero en este cálculo no hemos tomado en cuenta el espesor de las partículas sólidas del aire por el que el sonido se propaga instantáneamente. Dado que el peso del aire es al peso del agua

como 1 a 870, y dado que las sales son casi dos veces más densas que el agua, si las partículas de aire son de aproximadamente la misma densidad que las de agua o sal y la rareza del aire se debe a los intervalos de las partículas, el diámetro de una partícula de aire será al intervalo entre los centros de las partículas como 1 a aproximadamente 9 ó 10, y al intervalo entre las partículas mismas como 1 a 8 ó 9. En consecuencia, a los 979 pies que, de acuerdo con los anteriores cálculos, siempre avanzará un sonido en un segundo de tiempo, podemos añadir $\frac{979}{9}$, o aproximadamente 109 pies, para compensar el espesor de las partículas del aire, por lo que un sonido avanzará unos 1088 pies en un segundo de tiempo.

Por lo demás, como los vapores que flotan en el aire son de distinta fuente, dichos vapores participarán poco o nada del movimiento del verdadero aire donde se propagan los sonidos. Ahora bien, si estos vapores permanecen inmóviles, el movimiento se propagará más velozmente por el verdadero aire, y ello como la raíz cuadrada del defecto de materia. En consecuencia, si la atmósfera consiste en diez partes de verdadero aire y una parte de vapores, el movimiento de los sonidos será más veloz, como la raíz cuadrada de la razón de 11 a 10, o muy aproximadamente en la razón entera de 20 a 21, que si se propagara por once partes de verdadero aire. En consecuencia, el movimiento de los sonidos arriba descubierto debe aumentarse en dicha razón. Por este medio el sonido recorrerá 1142 pies en un segundo de tiempo.

Ello será cierto en primavera y otoño, cuando el aire está enrarecido por el suave calor de estas estaciones, por lo que su fuerza elástica se hace algo más intensa. Pero en invierno, cuando el aire es condensado por el frío y su fuerza elástica es algo menor, el movimiento de los sonidos será más lento como la raíz cuadrada de la densidad. En verano, sin embargo, será más rápido.

Pues bien, los experimentos demuestran que los sonidos avanzan realmente unos 1142 pies de medida *inglesa*, ó 1070 pies de medida *francesa*, en un segundo de tiempo.

Conocida la velocidad de los sonidos también se conocen los intervalos de las pulsaciones. M. *Sauveur*, por medio de experimentos, determinó que una flauta abierta de unos cinco pies de *París* produce un sonido del mismo tono que una cuerda de viola que vibra cien veces por segundo. En consecuencia, en el espacio de 1070 pies de *París*, que un sonido recorre en un

segundo de tiempo, hay cerca de 100 pulsaciones, por lo que una pulsación llena un espacio aproximado de $10\frac{7}{10}$ pies de *París*, es decir, aproximadamente dos veces la longitud de la flauta. En consecuencia, es probable que las anchuras de las pulsaciones de los sonidos de flautas abiertas sean iguales a dos veces la longitud de las flautas.

Por lo demás, del Corolario de la Proposición XLVII se desprende la razón de que los sonidos cesen al mismo tiempo que el movimiento del cuerpo sonoro y de que no se oigan tanto si estamos a gran distancia del cuerpo sonoro como si estamos muy cerca de él. Por otra parte, de los anteriores principios se desprende claramente por qué razón aumentan tan poderosamente los sonidos en las trompetillas: todo movimiento recíproco tiende a aumentar por acción de la causa generadora en cada retorno. Y en los tubos que perturban la dilatación de los sonidos el movimiento decae más lentamente y se repite con mayor fuerza, siendo, en consecuencia, incrementado por el nuevo movimiento imprimido a cada retorno. Y éstos son los principales fenómenos en lo que toca a los sonidos.

SECCION IX

El movimiento circular de los fluidos.

HIPÓTESIS

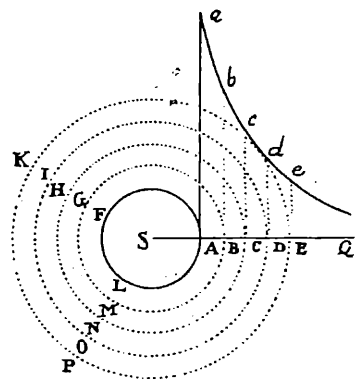
La resistencia debida a la falta de lubricidad de las partes de un fluido es, en igualdad de las demás condiciones, proporcional a la velocidad con que las partes del fluido se separan unas de otras.

PROPOSICIÓN LI. TEOREMA XXXIX

Si un cilindro sólido infinitamente largo gira en un fluido uniforme e infinito con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada, y el fluido es obligado a girar únicamente por este impulso del cilindro, y todas las partes del fluido persisten en su movimiento uniforme, afirmo que los tiempos periódicos de las partes del fluido son como sus distancias al eje del cilindro.

Sea AFL un cilindro que gira uniformemente en torno al eje S, y supóngase que los círculos concéntricos BGM, CHN, DIO, EKP, etc., dividen el fluido en innumerables orbes sólidos cilíndricos del mismo grosor. Entonces, como el fluido es homogéneo, las impresiones que los orbes contiguos producen unos en otros serán (según la Hipótesis) como sus traslaciones mutuas y como las superficies contiguas donde se producen las impresiones. Si la impresión producida en un orbe cualquiera es mayor o menor en su lado cóncavo que en el convexo, la impresión más fuerte prevalecerá, acelerando o retardando el

movimiento del orbe en la medida en que sea conforme o contraria al movimiento del mismo. En consecuencia, para que todos los orbes persistan uniformemente en su movimiento, las impresiones producidas en ambos lados deben ser iguales, y sus direcciones opuestas. En consecuencia, puesto que las impresiones son como las superficies contiguas y como sus mutuas traslaciones, las traslaciones serán inversamente proporcionales a las superficies, es decir, inversamente proporcionales a las distancias entre las superficies y el eje. Pero las diferencias de los movimientos angulares en torno al eje son como dichas traslaciones aplicadas a las distancias, o directamente proporcionales a las traslaciones e inversamente proporcionales a las distancias, es decir, uniendo estas razones, inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias. En consecuencia, si se levantan las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., perpendiculares a las diversas partes de la línea recta infinita SABCDEQ e inversamente proporcionales a los cuadrados de SA, SB, SC, SD, SE, etc., y se supone que por los extremos de dichas perpendiculares pasa una curva hiperbólica, las sumas de las diferencias, es decir, los movimientos angulares completos, serán como las correspondientes sumas de las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, es decir (si para constituir un medio uniformemente fluido se aumenta y disminuye *in infinitum* el número de orbes y su anchura, respectivamente), como las áreas hiperbólicas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, etc., análogas a las sumas; y los tiempos, inversamente proporcionales a los movimientos angulares, serán también inversamente proporcionales a dichas áreas. En consecuencia, el tiempo periódico de una partícula cualquiera, como D, es inversamente proporcional al área D*d*Q, es decir (como se desprende de los métodos conocidos de cuadratura de curvas), directamente proporcional a la distancia SD. Q.E.D.



COROLARIO I. Por tanto, los movimientos angulares de las partículas del fluido son inversamente proporcionales a sus distancias al eje del cilindro, y las velocidades absolutas son iguales.

COROLARIO II. Si un fluido está contenido en un recipiente cilíndrico de longitud infinita y contiene a su vez otro cilindro, y ambos cilindros giran en torno a un eje común, y los tiempos de sus revoluciones son como sus semidiámetros y todas las partes del fluido persisten en su movimiento, los tiempos periódicos de las diversas partes serán como las distancias a los ejes de los cilindros.

COROLARIO III. Si se añade o se resta cualquier cantidad común de movimiento angular al cilindro y fluido que se mueven de esta forma, dado que el nuevo movimiento no alterará la mutua resistencia de las partes del fluido, el movimiento de las partes con respecto a las demás no cambiará, pues las traslaciones de las partes dependen de la resistencia. Cada una de las partes persistirá en el movimiento que no sea más acelerado que retardado por la resistencia sufrida en ambos lados y direcciones opuestas.

COROLARIO IV. En consecuencia, si en este sistema completo de cilindros y fluido se suprime todo el movimiento angular del cilindro exterior, tendremos el movimiento del fluido en un cilindro en reposo.

COROLARIO V. En consecuencia, si el fluido y el cilindro exterior están en reposo y el cilindro interior gira uniformemente, se comunicará al fluido un movimiento circular que se propagará gradualmente por todo el fluido y crecerá continuamente hasta que las diversas partes del fluido adquieran el movimiento determinado en el Corolario IV.

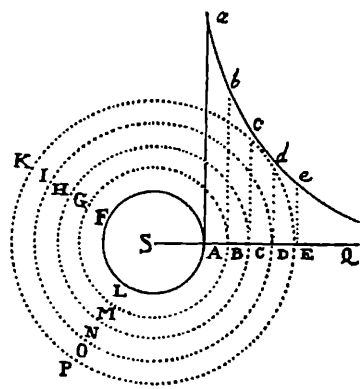
COROLARIO VI. Y como el fluido se esfuerza en propagar su movimiento aún más lejos, su impulso hará también girar al cilindro exterior, salvo que el cilindro sea sujetado por la fuerza, y acelerará su movimiento hasta que los tiempos periódicos de ambos cilindros sean iguales entre sí. Pero si el cilindro exterior es sujetado por la fuerza, se esforzará en retardar el movimiento del fluido y, salvo que el cilindro interior mantenga este movimiento por medio de alguna fuerza externa imprimida sobre él, lo hará cesar gradualmente.

Todo ello puede probarse haciendo el experimento en agua profunda y estancada.

PROPOSICIÓN LII. TEOREMA XL

Si una esfera sólida gira con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada en un fluido uniforme e infinito y el fluido sólo es obligado a girar por el impulso de esta esfera, y cada parte del fluido persiste en su movimiento uniforme, afirmo que los tiempos periódicos de las partes del fluido son como los cuadrados de sus distancias al centro de la esfera.

CASO 1. Sea AFL una esfera que gira uniformemente en torno al eje S, y supóngase que los círculos concéntricos BGM, CHN, DIO, EKP, etc., dividen el fluido en innumerables orbes concéntricos del mismo grosor. Supóngase que estos orbes son sólidos y, como el fluido es homogéneo, las impresiones que los orbes contiguos producen unos en otros serán (según la suposición) como sus traslaciones mutuas y las superficies contiguas donde se producen las impresiones. Si la impresión producida en un orbe cualquiera es mayor o menor en su lado cóncavo que en el convexo, la impresión más poderosa prevalecerá, acelerando o retardando el movimiento del orbe en la medida en que su movimiento sea conforme o contrario al movimiento del mismo. En consecuencia, para que todos los orbes persistan uniformemente en su movimiento, las impresiones producidas en ambos lados del orbe deberán ser iguales, y sus direcciones opuestas. En consecuencia, puesto que las impresiones son como las superficies contiguas y como sus mutuas traslaciones, las traslaciones serán inversamente proporcionales a las superficies, es decir, inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias entre las superficies y el centro. Pero las diferencias de los movimientos angulares en torno al eje son como dichas traslaciones aplicadas a las distancias, o directamente proporcionales a las traslaciones e inversamente proporcionales a las distancias, es decir, combinando estas razones, inversamente proporcionales a los cubos de las distancias. En consecuencia, si se levantan las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*,



E*e*, etc., perpendiculares a las diversas partes de la línea recta infinita SABCDEQ e inversamente proporcionales a los cubos de SA, SB, SC, SD, SE, etc., las sumas de las diferencias, es decir, los movimientos angulares completos, serán como las correspondientes sumas de las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., es decir (si para constituir un medio uniformemente fluido se aumenta y disminuye *in infinitum* el número de orbes y su grosor, respectivamente), como las áreas hiperbólicas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, etc., análogas a las sumas; y los tiempos, inversamente proporcionales a los movimientos angulares, serán también inversamente proporcionales a dichas áreas. En consecuencia, el tiempo periódico de un orbe cualquiera DIO es inversamente proporcional al área D*d*Q, es decir (según los métodos conocidos de cuadratura), directamente proporcional al cuadrado de la distancia SD. Lo que había que demostrar en primer lugar.

CASO 2. Trácese desde el centro de la esfera un gran número de líneas rectas indefinidas formando ángulos dados con el eje superándose mutuamente por diferencias iguales. Imagínese que, al girar estas líneas en torno al eje, los orbes son cortados en innumerables anillos; entonces cada anillo tendrá cuatro anillos contiguos, uno por dentro, uno por fuera y dos a los lados. Ahora bien, ninguno de estos anillos puede ser impulsado igualmente y en direcciones contrarias por la resistencia de los anillos interior y exterior, salvo que el movimiento sea comunicado conforme a la ley que demostramos en el Caso 1. Esto se desprende de aquella demostración. En consecuencia, una serie cualquiera de anillos, tomada en cualquier línea recta que se extienda *in infinitum* desde el globo, se moverá conforme a la ley del Caso 1, salvo que la supongamos perturbada por la resistencia de los anillos que tiene a ambos lados. Sin embargo, en un movimiento conforme a esta ley no hay tal resistencia, por lo que no puede ser obstáculo alguno a la persistencia de los movimientos conforme a la ley. Si anillos situados a igual distancia del centro giran más velozmente o más lentamente cerca de los polos que cerca de la eclíptica, su mutua resistencia los acelerará si son lentos y los retardará si son veloces, por lo que los tiempos periódicos se aproximarán continuamente a la igualdad, conforme a la ley del Caso 1. En consecuencia, esta resistencia no impedirá en absoluto que el movimiento se realice conforme a la ley del Caso 1, por lo que la ley se cumplirá y los tiempos periódicos de los diversos anillos serán como los cuadrados de

sus distancias al centro del globo. Lo que había que demostrar en segundo lugar.

CASO 3. Supóngase ahora que cada uno de los anillos es dividido por secciones transversales en innumerables partículas, constituyendo una substancia absoluta y uniformemente fluida. Como estas secciones no tienen relación con la ley del movimiento circular, sino que sólo sirven para producir una substancia fluida, la ley del movimiento circular seguirá igual que antes, y los pequeñísimos anillos no modificarán su asperidad y fuerza de resistencia mutua por razón de estas secciones o, de hacerlo, la modificarán igualmente. En consecuencia, al ser la misma la proporción de las causas, la proporción de los efectos, es decir, la proporción de los movimientos y los tiempos periódicos, será también la misma. Q.E.D. Ahora bien, como el movimiento circular y la fuerza centrífuga que del mismo se deriva son mayores en la eclíptica que en los polos, tiene que haber alguna causa que opere para retener a las diversas partículas en sus círculos, pues de lo contrario la materia que se encuentra en la eclíptica se apartará siempre del centro y dará un rodeo hacia los polos por el exterior del vértice, para volver desde allí a la eclíptica por el eje, en continua circulación.

COROLARIO I. Por tanto, los movimientos angulares de las partes del fluido en torno al eje del globo son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias al centro del globo, y la velocidades absolutas son inversamente proporcionales a los mismos cuadrados aplicados a las distancias al eje.

COROLARIO II. Si un globo gira con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada en un fluido semejante e infinito en reposo, comunicará al fluido un movimiento como el de un vórtice, y este movimiento se propagará gradualmente hacia adelante *in infinitum*. Y este movimiento aumentará continuamente en todas las partes del fluido hasta que los tiempos periódicos de las diversas partes sean como los cuadrados de las distancias al centro del globo.

COROLARIO III. Como las partes interiores del vórtice, debido a su mayor velocidad, presionan y empujan continuamente hacia adelante a las partes exteriores, comunicándoles continuamente movimiento con esta acción, y como las partes exteriores comunican al mismo tiempo la misma cantidad de movimiento a las que están más allá, y con esta acción conservan inalterable la cantidad de su movimiento, es evidente que el movimiento se transfiere continuamente desde el centro

hacia la circunferencia del vórtice, hasta ser devorado y perderse en la ilimitada extensión de dicha circunferencia. La materia situada entre dos superficies esféricas concéntricas al vórtice jamás será acelerada, porque dicha materia siempre transferirá el movimiento que recibe de la materia más cercana al centro a la materia situada más cerca de la circunferencia.

COROLARIO IV. En consecuencia, para que un vórtice continúe en el mismo estado de movimiento hace falta algún principio activo del que el globo pueda recibir continuamente la misma cantidad de movimiento que siempre está comunicando a la materia del vórtice. Sin un principio de esta índole es indudable que el globo y las partes interiores del vórtice, al propagar siempre su movimiento a las partes exteriores sin recibir nuevo movimiento, se moverán gradualmente más despacio, hasta dejar de girar por completo.

COROLARIO V. Si en el mismo vórtice, a una determinada distancia de su centro, hubiera otro globo que debido a alguna fuerza girara constantemente en torno a un eje de una inclinación dada, el movimiento de este globo haría girar al fluido como lo hace un vórtice. Al principio, este nuevo y pequeño vórtice girará con su globo en torno al centro del más grande, mientras su movimiento avanza más y más, propagándose gradualmente *in infinitum* en la misma forma que el primer vórtice. Y, por la misma razón que el globo del nuevo vórtice era afectado antes por el movimiento del otro vórtice, el globo de este último será afectado por el movimiento del nuevo, de forma que los dos globos girarán en torno a algún punto intermedio, alejándose uno del otro, debido a su movimiento circular, salvo que alguna fuerza se lo impida. Después, si cesan las fuerzas constantemente imprimidas por las que los globos persisten en su movimiento, y todo queda en manos de las leyes de la mecánica, el movimiento de los globos languidecerá gradualmente (por la razón expuesta en los Corolarios III y IV) hasta que los vórtices, finalmente, se detengan por completo.

COROLARIO VI. Si varios globos giraran constantemente en lugares dados y con velocidades determinadas en torno a ejes de posición dada, de ellos surgirían otros tantos vórtices prosiguiendo *in infinitum*. Pues, por la misma razón que cualquier globo propaga su movimiento *in infinitum*, todo otro globo propagará también el suyo *in infinitum*, por lo que todas las partes del fluido infinito se agitarán con un movimiento debido a las acciones de los globos. En consecuencia, los vórtices no

estarán confinados a límites determinados, sino que tropezarán gradualmente unos con otros, por lo que, debido a la acción mutua de los vórtices, los globos serán continuamente desplazados de sus lugares, como se mostró en el último Corolario. Y tampoco podrán conservar una posición determinada unos respecto de otros, salvo que alguna fuerza los restrinja. Pero si las fuerzas constantemente imprimidas sobre los globos para continuar estos movimientos cesaran, la materia (por la razón expuesta en los Corolarios III y IV) se detendrá gradualmente, dejando de moverse en vórtices.

COROLARIO VII. Si un fluido semejante está encerrado en un recipiente esférico y, debido a la rotación uniforme de un globo en su centro, es impulsado a girar como un vórtice, y el globo y el recipiente giran en el mismo sentido en torno al mismo eje, y sus tiempos periódicos son como los cuadrados de los semidiámetros, las partes del fluido no persistirán en sus movimientos sin aceleración o retardación hasta que sus tiempos periódicos sean como los cuadrados de sus distancias al centro del vórtice. Sólo esta constitución de un vórtice puede ser permanente.

COROLARIO VIII. Si el recipiente, el fluido encerrado y el globo conservan este movimiento, y además giran con un movimiento angular común en torno a cualquier eje dado, como la resistencia mutua de las partes del fluido no cambia con este movimiento, los movimientos de unas partes con respecto a otras no cambiarán, pues las traslaciones de unas partes con respecto a otras dependen de esta resistencia. Todas las partes persistirán en un movimiento donde su resistencia por un lado las retarda precisamente tanto como su resistencia por el otro lado las acelera.

COROLARIO IX. En consecuencia, si el recipiente está en reposo y el movimiento del globo está dado, el movimiento del fluido estará dado. Imagínese, en efecto, que un plano pasa por el eje del globo y gira con movimiento opuesto, supóngase que la suma del tiempo de esta revolución y el de la revolución del globo son al tiempo de la revolución del globo como el cuadrado del semidiámetro del recipiente al cuadrado del semidiámetro del globo, y los tiempos periódicos de las partes del fluido con respecto al plano serán como el cuadrado de sus distancias al centro del globo.

COROLARIO X. En consecuencia, si el recipiente gira en torno al mismo eje que el globo o, con velocidad dada, en torno a uno distinto, el movimiento del fluido estará dado. Pues si

restamos al sistema completo el movimiento angular del recipiente, todos los movimientos, según el Corolario VIII, seguirán en la misma relación y, según el Corolario IX, estarán dados.

COROLARIO XI. Si el recipiente y el fluido están en reposo y el globo gira con movimiento uniforme, este movimiento se propagará gradualmente por el fluido hasta el recipiente, y el recipiente será obligado a girar con él, salvo que fuera sujetado por una fuerza, y el fluido y el recipiente serán continuamente acelerados hasta que sus tiempos periódicos sean iguales a los tiempos periódicos del globo. Si el recipiente es restringido por alguna fuerza o gira con cualquier movimiento constante y uniforme, el medio alcanzará poco a poco el estado de movimiento definido en los Corolarios VIII, IX, X, y jamás persistirá en otro estado. Pero si entonces cesan las fuerzas por las que el globo y el recipiente giran con movimientos determinados, y todo el sistema se abandona al imperio de las leyes mecánicas, el recipiente y el globo actuarán uno sobre el otro por intermedio del fluido hasta que sus tiempos periódicos sean iguales entre sí y todo el sistema gire unido como un cuerpo sólido.

ESCOLIO

En todo este razonamiento doy por supuesto que el fluido está compuesto por materia de densidad y fluidez uniforme. Quiero decir que el fluido deberá ser de tal naturaleza que un globo situado en cualquier parte del mismo pueda propagar en el fluido, con su propio movimiento, a distancias continuamente iguales de sí, movimientos semejantes e iguales en el mismo intervalo de tiempo. La materia, por su movimiento circular, pugna por separarse del eje del vórtice, por lo que presiona a toda la materia que se encuentra más allá. Esta presión incrementa la resistencia y hace más difícil la separacion de las partes, disminuyendo, en consecuencia, la fluidez de la materia. Por lo demás, si las partes del fluido son en algún lugar mayores o más densas que en otros, la fluidez será menor en aquel lugar, porque hay menos superficies donde las partes puedan separarse unas de otras. En estos casos doy por supuesto que el defecto de fluidez es compensado por la tersura o suavidad de las partes, o por alguna otra condición, pues de lo contrario la materia se cohesionará más, haciéndose más inactiva, por lo que recibirá el

movimiento con mayor lentitud y lo propagará más lejos de lo que corresponde a la razón arriba expuesta. Si el recipiente no es esférico, las partículas se moverán por líneas no circulares, sino adaptadas a la figura del recipiente, y los tiempos periódicos serán aproximadamente como los cuadrados de las distancias medias desde el centro. En las partes situadas entre el centro y la circunferencia, los movimientos serán más lentos donde los espacios sean anchos y más veloces donde sean estrechos. Sin embargo, las partículas no tenderán más hacia la circunferencia debido a su mayor velocidad, pues entonces describen arcos menos curvos, y la tendencia a apartarse del centro es tan disminuida por la disminución de esta curvatura como aumentada por el incremento de velocidad. Al pasar de espacios estrechos a espacios anchos, se separan algo más del centro, pero al hacerlo son retardadas; y cuando pasan de espacios anchos a espacios estrechos son de nuevo aceleradas, por lo que cada una de las partículas es sucesivamente retardada y acelerada sin fin. Esto ocurrirá en un recipiente rígido, pues el estado de los vórtices en un fluido infinito es conocido por el Corolario VI de esta Proposición.

En esta Proposición he intentado investigar las propiedades de los vórtices con el fin de determinar si los fenómenos celestes pueden explicarse recurriendo a ellos. Pues el hecho es que los tiempos periódicos de los planetas que giran en torno a Júpiter son como la $\frac{3}{2}$ava potencia de sus distancias al centro de Júpiter, y la misma regla se aplica también a los planetas que giran en torno al Sol. Y estas reglas prevalecen con la mayor exactitud en lo hasta ahora descubierto por la observación astronómica. En consecuencia, si los mencionados planetas se desplazan en vórtices que giran en torno a Júpiter y el Sol, los vórtices deberán girar conforme a aquella ley. Pero aquí hemos determinado que los tiempos periódicos de las partes del vórtice son como el cuadrado de las distancias al centro de movimiento, y esta razón no puede ser disminuida y reducida a la $\frac{3}{2}$ava potencia salvo que la materia del vórtice sea más fluida a medida que se aleja del centro o que la resistencia debida a la falta de lubricidad de las partes del fluido sea, a medida que la velocidad con que las partes del fluido se separan va aumentando, incrementada con ella en una razón mayor que aquella con que la velocidad aumenta. Pero ninguna de estas suposiciones parece razonable. Las partes más gruesas y menos fluidas tenderán hacia la circunferencia, salvo que pesen hacia el centro.

Y aunque, para facilitar la demostración, al principio de esta Sección propuse la Hipótesis de que la resistencia es proporcional a la velocidad, en verdad es probable que la resistencia esté en razón menor que la velocidad. Aceptado esto, los tiempos periódicos de las partes del vórtice estarán en una razón mayor que el cuadrado de las distancias a su centro. Si, como algunos creen, los vórtices se mueven más velozmente cerca del centro y después más lentamente, hasta un cierto límite, y de nuevo más velozmente cerca de la circunferencia, no cabe duda de que ni la $\frac{3}{2}$ava potencia ni ninguna otra potencia cierta y determinada puede prevalecer en ellos. Determinen entonces los filósofos cómo el fenómeno de la $\frac{3}{2}$ava potencia puede ser explicado por vórtices.

PROPOSICIÓN LIII. TEOREMA XLI

Los cuerpos que, arrastrados por un vórtice, giran en la misma órbita, tienen la misma densidad que el vórtice y se mueven obedeciendo a la misma ley que las partes del vórtice en lo que toca a la velocidad y la dirección del movimiento.

Pues si suponemos que cualquier parte pequeña del vórtice, cuyas partículas o puntos físicos persisten en una situación dada unos con respecto a otros, está congelada, esta partícula se moverá obedeciendo a la misma ley que antes, puesto que ni su densidad, ni su inercia ni su forma cambian. Por lo demás, si una parte sólida o congelada del vórtice es de la misma densidad que el resto del vórtice y se resuelve en un fluido, se moverá obedeciendo a la misma ley que antes, excepto en la medida en que sus partículas, ahora fluidas, puedan moverse unas con respecto de otras. En consecuencia, si se ignora el movimiento de las partículas unas con respecto de otras por no afectar al movimiento progresivo del todo, el movimiento del todo será el mismo que antes. Pero este movimiento será igual que el movimiento de otras partes del vórtice situadas a igual distancia del centro, pues el sólido, ahora convertido en fluido, es ya exactamente igual que las demás partes del vórtice. En consecuencia, todo sólido de la misma densidad que la materia del vórtice se moverá con el mismo movimiento que las partes del mismo, en reposo relativo con respecto a la materia que lo

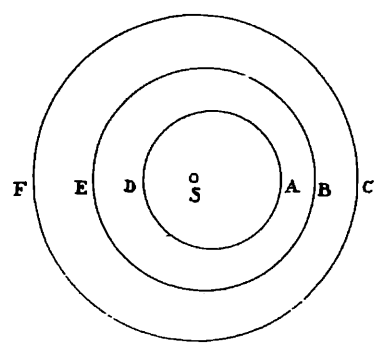
rodea. Si fuera más denso, pugnará más que antes por apartarse del centro, por lo que, sobreponiéndose a la fuerza del vórtice que, por así decirlo, lo mantenía en equilibrio y lo retenía en su órbita, se apartará del centro, describirá una espiral en su revolución y no volverá a la misma órbita. Y, por las mismas razones, si fuera más raro se acercaría al centro. En consecuencia, sólo puede persistir continuamente en la misma órbita cuando es de la misma densidad que el fluido. Pero ya hemos demostrado que en ese caso giraría obedeciendo a la misma ley que las partes del fluido que se encuentran a igual distancia del centro del vórtice.

COROLARIO I. En consecuencia, un sólido que gira en un vórtice siempre en la misma órbita está en reposo relativo en el fluido que lo transporta.

COROLARIO II. Y si el vórtice es de densidad uniforme, el mismo cuerpo puede girar a cualquier distancia del centro del vórtice.

ESCOLIO

Por tanto, es evidente que los planetas no son transportados en vórtices corpóreos. En efecto, según la hipótesis de *Copérnico*, los planetas que se mueven alrededor del Sol giran en elipses, con el Sol como foco común, y describen áreas proporcionales a los tiempos con radios trazados hasta el Sol. Pero las partes de un vórtice jamás pueden girar con semejante movimiento. Representen AD, BE, CF, tres órbitas descritas en torno al sol S, de las que el círculo exterior CF es concéntrico al Sol; sean A, B, los afelios de los dos círculos interiores, y D, E, sus perihelios. De esta forma, un cuerpo que gire en el orbe CF, describiendo con un radio trazado hasta el Sol áreas proporcionales a los tiempos, se moverá con movimiento uniforme. Y, de acuerdo con las leyes de la astronomía, el cuerpo que gira en la órbita BE se moverá



más lentamente en su afelio B y más velozmente en su perihelio E, mientras que, de acuerdo con las leyes de la mecánica, la materia del vórtice debería moverse más velozmente en el espacio estrecho entre A y C que en el espacio ancho entre D y F, es decir, más velozmente en el afelio que en el perihelio.

Ahora bien, estas dos conclusiones son contradictorias. Al comienzo del signo Virgo, donde actualmente se encuentra el planeta Marte, la distancia entre las órbitas de Marte y Venus es a la distancia entre las mismas órbitas al comienzo del signo de Piscis como 3 a 2, aproximadamente, por lo que la materia del vórtice entre dichas órbitas debería ser más veloz al comienzo de Piscis que al comienzo de Virgo, en una razón de 3 a 2, pues cuanto más estrecho sea el espacio que la misma cantidad de materia recorre en el mismo tiempo de una revolución, mayor será la velocidad con que lo recorre. En consecuencia, si la Tierra, en reposo relativo en esta materia celeste, fuera trasladada por ésta y girara con ella en torno al Sol, la velocidad de la Tierra al comienzo de Piscis estaría en una razón de 3 a 2 a su velocidad al comienzo de Virgo. En consecuencia, el movimiento diurno aparente del Sol al comienzo de Virgo tendría que ser superior a los 70 minutos, y al comienzo de Piscis inferior a los 48 minutos, mientras que, por el contrario, el movimiento aparente del Sol es en realidad mayor al comienzo de Piscis que al comienzo de Virgo, como atestigua la experiencia. En consecuencia, la Tierra es más veloz al comienzo de Virgo que al comienzo de Piscis, por lo que la hipótesis de los vórtices es completamente irreconciliable con los fenómenos astronómicos, y confunde más que aclara los movimientos celestes. El primer Libro ayuda a comprender cómo tienen lugar estos movimientos en espacios libres sin vórtices, y ahora lo explicaré de forma más completa en el Libro siguiente.

LIBRO TERCERO

SISTEMA DEL MUNDO
(Matemáticamente tratado)

En los Libros precedentes he expuesto principios de filosofía, no tanto filosóficos como matemáticos, sobre los cuales resulta posible fundamentar nuestros razonamientos en asuntos filosóficos. Estos principios son las leyes y condiciones de ciertos movimientos y fuerzas, que conciernen especialísimamente a la filosofía. Pero para que no pareciesen estériles, los he ilustrado aquí y allá con algunos Escolios filosóficos, proporcionando una descripción de aquellas cosas que tienen una naturaleza más general y sobre las que parece apoyarse principalmente la filosofía, como la densidad y resistencia de los cuerpos, los espacios vacíos de cuerpos y el movimiento de luz y sonidos. Es preciso aún demostrar a partir de esos mismos principios la constitución del sistema del mundo. En realidad, había confeccionado sobre este tema el tercer Libro siguiendo un método popular, con el fin de que pudiese ser leído por muchos. Pero después, considerando que quienes no hubiesen profundizado bastante en los principios no podrían captar fácilmente la fuerza de sus consecuencias, ni descartar prejuicios a los que llevaban acostumbrados muchos años, y para evitar las controversias que podrían suscitarse a causa de ello, decidí traducir la suma de materias de ese Libro a la forma de proposiciones usuales en matemáticas, que sólo deberían ser leídas por quienes de antemano se hubieran familiarizado con los principios precedentes. No significa esto que aconseje a nadie el estudio previo de cada proposición de esos Libros, pues abundan algunas que

pueden costar demasiado tiempo incluso a los lectores doctos en matemáticas. Bastará con que se lean cuidadosamente las Definiciones, las Leyes del Movimiento y las tres primeras secciones del Libro primero, para pasar luego a este Libro sobre el sistema del mundo, consultando las demás Proposiciones de los otros dos según lo requieran su arbitrio y las referencias del texto.

REGLAS PARA FILOSOFAR

REGLA PRIMERA

No debemos para las cosas naturales admitir más causas que las verdaderas y suficientes para explicar sus fenómenos.

Dicen sobre ello los filósofos: la Naturaleza no hace nada en vano, y es vano mucho cuando basta con poco. Pues la Naturaleza es simple, y no se complace en causas superfluas para las cosas.

REGLA II

Por consiguiente, debemos asignar tanto como sea posible a los mismos efectos las mismas causas.

Como acontece con la respiración en un hombre y un animal; la caída de piedras en *Europa* y en *América*; la luz del fuego de la cocina y la del Sol; la reflexión de luz en la Tierra y en los planetas.

REGLA III

Las cualidades de los cuerpos que no admiten intensificación ni reducción, y que resultan pertenecer a todos los cuerpos dentro del

campo de nuestros experimentos, deben considerarse cualidades universales de cualesquiera tipos de cuerpos.

Pues como las cualidades de los cuerpos sólo nos son conocidas por experimentos, debemos considerar universal todo cuanto concuerda universalmente con ellos, y aquellas que no son susceptibles de disminución no pueden ser suprimidas. Ciertamente, no debemos abandonar la evidencia de los experimentos por sueños y ficciones vanas, ni tampoco alejarnos de la analogía de la naturaleza, que es acostumbradamente simple y siempre consonante consigo misma. Sólo conocemos la extensión de los cuerpos por nuestros sentidos, y no en todos ellos. Pero como percibimos extensión en todos los captados por los sentidos atribuimos esa cualidad universalmente a todos los otros también. Por experiencia sabemos que muchos cuerpos son duros; y como la dureza del todo surge de la dureza de las partes, con justicia inferimos la dureza de las partículas indivisas no sólo de los cuerpos que palpamos, sino de todos los otros. No de la razón sino de la sensación colegimos la impenetrabilidad de todos los cuerpos. Los cuerpos con los que tratamos resultan ser impenetrables, y de ello deducimos que la impenetrabilidad es una propiedad universal de todo tipo de cuerpos. Sólo por propiedades semejantes observadas en los cuerpos inferimos que todos los cuerpos son móviles y dotados de ciertas fuerzas (que llamamos de inercia) para perseverar en su movimiento o en su reposo. La extensión, dureza, impenetrabilidad, movilidad e inercia del todo resultan de la extensión, dureza, impenetrabilidad, movilidad e inercia de las partes; y de ello deducimos que las partículas mínimas de los cuerpos son también extensas, duras, impenetrables, móviles y dotadas de inercia. Y éste es el fundamento de toda filosofía. Por otra parte, que las partículas divididas pero contiguas de los cuerpos puedan separarse unas de otras es asunto de observación, y en las partículas que permanecen indivisas nuestras mentes son capaces de distinguir partes aún menores, como se demuestra matemáticamente. Pero no podemos determinar con certeza si las partes así distinguidas y no divididas aún pueden ser efectivamente divididas y separadas unas de otras por las fuerzas naturales. Con todo, si tuviésemos la prueba de un solo experimento siquiera en el sentido de que cualquier partícula indivisa sufría una división al romper un cuerpo duro y sólido, podríamos en virtud de esa regla concluir que tanto las

partículas indivisas como las divididas pueden dividirse y separarse efectivamente hasta lo infinito.

Por último, si consta universalmente por experimentos y observaciones astronómicas que todos los cuerpos situados en torno a la Tierra gravitan hacia ella, y esto en proporción a la cantidad de materia por ellos contenida; que del mismo modo la Luna, con arreglo a su cantidad de materia, gravita hacia la Tierra y que, por otra parte, nuestro mar gravita hacia la Luna, como todos los planetas los unos respecto de los otros, y que los cometas gravitan hacia el Sol, debemos como consecuencia de esta regla admitir universalmente que todos los cuerpos sin excepción están dotados de un principio de gravitación mutua. Pues el argumento a partir de los fenómenos demuestra con mucha mayor fuerza la gravitación universal que la impenetrabilidad de los cuerpos, sobre la cual carecemos de experimentos y medios de observación para los cuerpos situados en las regiones celestes. Para nada afirmo que la gravedad sea esencial a los cuerpos. Por la *fuerza insita* sólo entiendo su fuerza inercial, que es inmutable. Su gravedad disminuye a medida que se alejan de la Tierra.

REGLA IV

En filosofía experimental debemos recoger proposiciones verdaderas o muy aproximadas inferidas por inducción general a partir de fenómenos, prescindiendo de cualesquiera hipótesis contrarias, hasta que se produzcan otros fenómenos capaces de hacer más precisas esas proposiciones o sujetas a excepciones.

Hemos de seguir esta regla para que el argumento por inducción no pueda ser eludido por hipótesis.

FENOMENOS

FENÓMENO PRIMERO

Que los planetas circunjovianos, mediante radios trazados al centro de Júpiter, describen áreas proporcionales a los tiempos de descripción, y que sus tiempos periódicos, con las estrellas fijas en reposo, son como la $\frac{3}{2}$ava potencia de sus distancias a su centro.

Esto lo sabemos por observaciones astronómicas. Pues las órbitas de estos planetas no difieren sensiblemente de círculos concéntricos a Júpiter, y se sabe que sus movimientos en dichos círculos son uniformes. Y todos los astrónomos concuerdan en que sus tiempos periódicos son como la $\frac{3}{2}$ava potencia de los semidiámetros de sus órbitas como evidencia la siguiente tabla.

Los tiempos periódicos de los satélites de Júpiter

$1^d18^h27^m34^s$, $3^d13^h13^m42^s$, $7^d3^h42^m36^s$, $16^d16^h32^m9^s$

Las distancias de los satélites al centro de Júpiter

	1	2	3	4	
De las observaciones de:					
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	*Semi-*
Townly, *con micrómetro*	5,52	8,78	13,47	24,72	*diámetros*
Cassini, *con telescopio*	5	8	13	23	*de*
Cassini, *por el eclipse de los satélites*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	*Júpiter*
De los tiempos periódicos	5,667	9,017	14,384	25,299	

Mr. *Pound*, con ayuda de excelentes micrómetros, ha determinado el diámetro de Júpiter y la elongación de sus satélites de la siguiente forma. La elongación heliocéntrica máxima del cuarto satélite al centro de Júpiter se tomó con un micrómetro en un telescopio de 15 pies, y resultó ser aproximadamente 8'16", a la distancia media entre Júpiter y la Tierra. La elongación del tercer satélite se tomó con un micrómetro en un telescopio de 123 pies, y resulto ser 4'42" a la misma distancia entre Júpiter y la Tierra. Las elongaciones máximas de los otros satélites, a la misma distancia entre Júpiter y la Tierra son, de acuerdo con los tiempos periódicos, 2'56"47"' y 1'51"6"'.

El diámetro de Júpiter, tomado varias veces con el micrómetro en un telescopio de 123 pies y reducido a la distancia media entre Júpiter y la Tierra, resultó ser siempre menor de 40", nunca menor de 38", generalmente 39". Este diámetro, en telescopios más cortos, es 40" ó 41", pues la luz de Júpiter es ligeramente dilatada por la desigual refrangibilidad de los rayos, y en los telescopios más largos y perfeccionados esta dilatación está en razón menor al diámetro de Júpiter que en los telescopios más cortos y menos perfeccionados. Los tiempos en que dos satélites, el primero y el tercero, pasaron sobre el cuerpo de Júpiter fueron observados con el telescopio largo desde el comienzo de la entrada hasta el comienzo de la salida y desde que se completó la entrada hasta que se completó la salida. En base al tránsito del primer satélite, el diámetro de Júpiter a su distancia media desde la Tierra resultó ser $37\frac{1}{8}$", y $37\frac{3}{8}$" en base al tránsito del tercero. También se observó el tiempo en que la sombra del primer satélite pasó sobre el cuerpo de Júpiter, en base al cual el diámetro de Júpiter a su distancia media desde la Tierra resultó ser aproximadamente 37". Supongamos que su diámetro es, muy aproximadamente, $37\frac{1}{4}$", y las elongaciones máximas de los satélites primero, segundo, tercero y cuarto serán, respectivamente, iguales a 5,965, 9,494, 15,141 y 26,63 semidiámetros de Júpiter.

FENÓMENO II

Que los planetas que circundan Saturno describen, mediante radios trazados al centro de Saturno, áreas proporcionales a los tiempos

de descripción, y que sus tiempos periódicos, con las estrellas fijas en reposo, son como la $\frac{3}{2}$ava potencia de sus distancias a su centro.

Pues, como ha determinado *Cassini* a partir de sus propias observaciones, sus distancias al centro de Saturno y sus tiempos periódicos son los siguientes:

Los tiempos periódicos de los satélites de Saturno

$1^d21^h18^m27^s$, $2^d17^h41^m22^s$, $4^d12^h25^m12^s$, $15^d22^h41^m14^s$, $79^d7^h48^m00^s$

Las distancias de los satélites al centro de Saturno, en semidiámetros de su anillo

De observaciones	$1\frac{19}{20}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	8	24
De los tiempos periódicos. . . .	1,93	2,47	3,45	8	23.35

En general, las observaciones han determinado que la elongación máxima del cuarto satélite al centro de Saturno es, muy aproximadamente, ocho de los mencionados semidiámetros. Pero cuando la elongación máxima de este satélite al centro de Saturno se tomó con un excelente micrómetro en el telescopio de 123 pies de Mr. *Huygens*, resultó ser ocho semidiámetros y $\frac{7}{10}$ de semidiámetro. Y según esta observación y los tiempos periódicos, las distancias de los satélites al centro de Saturno, en semidiámetros del anillo, son 2,1, 2,69, 3,75, 8,7 y 25,35. El diámetro de Saturno, observado con el mismo telescopio, resultó ser al diámetro del anillo como 3 es a 7, y el 28-29 de mayo el diámetro del anillo resultó ser 43″, por lo que el diámetro del anillo cuando Saturno está a su distancia media de la Tierra es 42″, y el diámetro de Saturno 18″. Todo esto aparece de tal forma en muy largos y excelentes telescopios, porque en dichos telescopios las magnitudes aparentes de los cuerpos celestes están en mayor proporción a la dilatación de la luz en los extremos de dichos cuerpos que en telescopios más cortos. Si, en consecuencia, rechazamos toda la luz espúrea, el diámetro de Saturno no superará los 16″.

FENÓMENO III

Que los cinco planetas primarios, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, giran en sus diversas órbitas alrededor del Sol.

El aspecto lunar de Mercurio y Venus evidencia que giran en torno al Sol. Cuando brillan llenos se encuentran, con respecto a nosotros, más allá o encima del Sol; cuando están medio llenos se encuentran aproximadamente a la misma altura a uno u otro lado del Sol; cuando muestran cuernos se encuentran debajo o entre nosotros y el Sol; y a veces, *cuando están precisamente debajo*, se ven como puntos que atraviesan el disco solar. La faz llena de Marte cuando se acerca a su conjunción con el Sol y la forma gibosa que muestra en sus cuadraturas evidencian que gira en torno al Sol. Lo mismo puede demostrarse en lo que toca a Júpiter y Saturno porque están siempre llenos, y las sombras de sus satélites, que a veces aparecen sobre sus discos, evidencian que la luz que despide no es propia, sino tomada del Sol.

FENÓMENO IV

Que, con las estrellas fijas en reposo, los tiempos periódicos de los cinco planetas primarios y (tanto del Sol en torno a la Tierra como) de la Tierra en torno al Sol son como la $\frac{3}{2}$ava potencia de sus distancias medias al Sol.

Esta proporción, que *Kepler* fue el primero en observar, es actualmente aceptada por todos los astrónomos, pues los tiempos periódicos son los mismos, y las dimensiones de las órbitas las mismas, tanto si el Sol gira en torno a la Tierra como si la Tierra lo hace en torno al Sol. Y todos los astrónomos están de acuerdo en lo que toca a las medidas de los tiempos periódicos. Pero en lo que toca a las dimensiones de las órbitas, son *Kepler* y *Boulliau*, quienes, por encima de todos los demás, las han determinado con la mayor exactitud en base a observaciones, y las distancias medias correspondientes a los tiempos periódicos no difieren sensiblemente de las que ellos han determinado, y en su mayor parte son intermedias, como puede verse en la siguiente tabla.

Los tiempos periódicos con respecto a las estrellas fijas de los planetas y la Tierra que giran en torno al Sol, en días y décimas de día.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692

Las distancias medias de los planetas y la Tierra al Sol

	♄	♃	♂
Según *Kepler*	951000	519650	152350
Según *Boulliau*	954198	522520	152350
Según los tiempos periódicos	954006	520096	152369
	♁	♀	☿
Según *Kepler*	100000	72400	38806
Según *Boulliau*	100000	72398	38585
Según los tiempos periódicos	100000	72333	38710

En lo que toca a Mercurio y Venus, su distancia al Sol no ofrece duda, pues está determinada por las elongaciones de dichos planetas al Sol. En cuanto a las distancias de los planetas superiores, los eclipses de los satélites de Júpiter eliminan toda discusión, pues por medio de dichos eclipses se determina la posición de la sombra que Júpiter proyecta, por la que conocemos la longitud heliocéntrica de Júpiter. Y comparando entre sí sus longitudes heliocéntrica y geocéntrica, determinamos su distancia.

FENÓMENO V

Que los planetas primarios no describen mediante radios trazados a la Tierra áreas en absoluto proporcionales a los tiempos, pero las áreas que describen mediante radios trazados al Sol son proporcionales al tiempo de descripción.

Pues desde la Tierra a veces parecen directos, a veces estacionarios y a veces retrógrados. Pero vistos desde el Sol son siempre directos, y avanzan con un movimiento casi uniforme, es

decir, algo más veloz en el perihelio y algo más lento en el afelio, de forma que se mantiene una igualdad en la descripción de las áreas. Esta es una proposición conocida entre los astrónomos, y es especialmente demostrable en Júpiter por los eclipses de sus satélites. Con ayuda de estos eclipses, como ya hemos dicho, se determinan las longitudes heliocéntricas de dicho planeta, y sus distancias al Sol.

FENÓMENO VI

Que la Luna, mediante un radio trazado al centro de la Tierra, describe un área proporcional al tiempo de descripción.

Esto se determina comparando el movimiento aparente de la Luna con su diámetro aparente. Ciertamente, la acción del Sol perturba ligeramente el movimiento de la Luna, pero al exponer estos fenómenos ignoro estos pequeños e insignificantes errores.

PROPOSICIONES

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I

Que las fuerzas por las que los planetas circunjovianos son continuamente apartados de un movimiento rectilíneo y retenidos en sus órbitas adecuadas tienden hacia el centro de Júpiter y son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias de los lugares de dichos planetas a aquel centro.

La primera parte de la Proposición se desprende del Fenómeno I y las Proposiciones II o III, Libro I; la última del Fenómeno I y el Corolario VI, Proposición IV, del mismo Libro.

Esto se aplica igualmente, a tenor del Fenómeno II, a los planetas que giran alrededor de Saturno.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Que las fuerzas por las que los planetas primarios son continuamente apartados del movimiento rectilíneo y retenidos en sus órbitas adecuadas tienden hacia el Sol y son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias de los lugares de dichos planetas al centro del Sol.

La primera parte de la Proposición se desprende manifiestamente del Fenómeno V y la Proposición II, Libro I; la última del Fenómeno IV y el Corolario VI, Proposición IV del mismo

Libro. Pero esta parte de la Proposición es demostrable con gran exactitud a partir de la inmovilidad de los puntos de afelio, pues hasta una aberración muy pequeña de la proporción acorde al cuadrado inverso de las distancias produciría (por el Corolario I, Proposición XLV, Libro I) un movimiento de los ápsides apreciable en cada revolución y enormemente grande en un gran número de ellas.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA III

Que la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita tiende hacia la Tierra y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de su lugar al centro de la Tierra.

La primera parte de la Proposición se desprende manifiestamente del Fenómeno VI y las Proposiciones II o III, Libro I; la última del lentísimo movimiento del apogeo de la Luna, que, al no avanzar en cada evolución más que 3° 3', puede ser ignorado. Pues del Corolario I, Proposición XLV, Libro I, se desprende que si la distancia de la Luna al centro de la Tierra es al semidiámetro de la Tierra como D a 1, la fuerza de la que resultará dicho movimiento es inversamente proporcional a $D^{2\frac{4}{243}}$, es decir, inversamente proporcional a la potencia de D cuyo exponente es $2\frac{4}{243}$, es decir, en la proporción de la distancia, algo mayor que el cuadrado inverso, pero $59\frac{3}{4}$ veces más cerca de la proporción acorde al cuadrado que al cubo. Pero como este incremento se debe a la acción del Sol (como más adelante expondremos), aquí puede ser ignorado. La acción de atracción del Sol sobre la Luna que tiende a alejarla de la Tierra es aproximadamente como la distancia de la Luna a la Tierra y, en consecuencia (según se ha expuesto en el Corolario II, Proposición XLV, Libro I) es a la fuerza centrípeta de la Luna como 2 a 357,45, o aproximadamente tal, es decir, como 1 a $178\frac{29}{40}$. Y si ignoramos esta fuerza tan imperceptible del Sol, la fuerza restante, que retiene a la Luna en su orbe, será inversamente proporcional a D^2. Esto se comprenderá con mayor claridad aún al comparar esta fuerza con la fuerza de la gravedad, como se hará en la siguiente Proposición.

COROLARIO. Si aumentamos la fuerza centrípeta media por la que la Luna es retenida en su orbe, primero en la proporción

de $177\frac{29}{40}$ a $178\frac{29}{40}$ y después en la proporción del cuadrado del semidiámetro de la Tierra a la distancia media entre los centros de la Luna y la Tierra, obtendremos la fuerza centrípeta de la Luna en la superficie de la Tierra, en el supuesto de que dicha fuerza aumente continuamente en proporción inversa al cuadrado de la altura al descender hacia la superficie de la Tierra.

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA IV

Que la Luna gravita hacia la Tierra y es continuamente apartada de un movimiento rectilíneo y retenida en su órbita por la fuerza de la gravedad.

La distancia media de la Luna a la Tierra en las sicigias, en semidiámetros de la Tierra, es, según *Ptolomeo* y la mayor parte de los astrónomos, 59 semidiámetros; según *Vendelin* y *Huygens*, 60; según *Copérnico*, 60; según *Street*, 60; y según *Tycho*, $56\frac{1}{2}$. Pero *Tycho* y cuantos siguen sus tablas de refracción, al hacer que las refracciones del Sol y la Luna excedan (contradiciendo por completo la naturaleza de la luz) las refracciones de las estrellas fijas, y ello en unos cuatro o cinco minutos *cerca del horizonte*, aumentaron la paralaje *horizontal* de la Luna en el mismo número de minutos, es decir, en una doceava o quinceava parte de la paralaje total. Corríjase este error y la distancia será de unos $60\frac{1}{2}$ semidiámetros de la Tierra, aproximadamente la misma que otros han establecido. Supongamos que la distancia media en las sicigias es de 60 semidiámetros, y supongamos que una revolución de la Luna, con respecto a las estrellas fijas, se completa en $27^d 7^h 43^m$, como han determinado los astrónomos, y que la circunferencia de la Tierra es de 123249600 pies de *París*, como han determinado los *franceses* mediante mediciones. Y si ahora imaginamos que la Luna, privada de todo movimiento, es liberada de forma que descienda hacia la Tierra con el impulso de toda la fuerza por la que (por el Corolario de la Proposición III) era retenida en su orbe, en el transcurso de un minuto de tiempo describirá en su caída $15\frac{1}{12}$ pies de *París*. Esto se determina mediante cálculos fundados en la Proposición XXXVI. Libro I o (lo que es la misma cosa) en el Corolario IX. Proposición IV del mismo Libro. Pues el seno verso del arco que la Luna describiría por su movimiento medio a una

distancia de 60 semidiámetros de la Tierra en el transcurso de un minuto de tiempo es aproximadamente $15\frac{1}{12}$ pies de *París*, o más exactamente 15 pies, 1 pulgada y 1 línea $\frac{4}{9}$. En consecuencia, dado que aquella fuerza, al acercarse a la Tierra, aumenta en la proporción del cuadrado inverso de la distancia, por lo que en la superficie de la Tierra es 60×60 veces mayor que en la Luna, un cuerpo que cayera con dicha fuerza en nuestras regiones debería describir $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ pies de *París* en el transcurso de un minuto de tiempo, y $15\frac{1}{12}$ de dichos pies o, más exactamente, 15 pies, 1 pulgada y 1 línea $\frac{4}{9}$ en el transcurso de un segundo de tiempo. Y, de hecho, podemos comprobar que los cuerpos descienden realmente en la Tierra con esta misma fuerza, pues un péndulo que oscile al segundo en la latitud de *París* tendrá una longitud de 3 pies de *París* y 8 líneas $\frac{1}{2}$, como ha observado Mr. *Huygens*. Y el espacio que un cuerpo pesado describe cayendo durante un segundo de tiempo es a la mitad de la longitud de este péndulo como el cuadrado de la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro (como también ha expuesto Mr. *Huygens*) y, en consecuencia, 15 pies de *París*, 1 pulgada, 1 línea $\frac{7}{9}$. En consecuencia, la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita es, en la misma superficie de la Tierra, igual a la fuerza de la gravedad que observamos aquí en los cuerpos pesados. En consecuencia (por las Reglas I y II), la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita es precisamente la misma fuerza que comúnmente llamamos gravedad, pues si la gravedad fuera una fuerza distinta, los cuerpos que descendieran hacia la Tierra con el impulso combinado de ambas fuerzas caerían con doble velocidad, describiendo $30\frac{1}{6}$ pies de *París* en el transcurso de un segundo de tiempo, lo que contradice enteramente la experiencia.

Este cálculo se basa en la hipótesis de que la Tierra está inmóvil, pues si tanto la Tierra como la Luna se mueven en torno al Sol, y al mismo tiempo en torno a su centro común de gravedad, la distancia entre los centros de la Luna y la Tierra será de $60\frac{1}{2}$ semidiámetros de la Tierra, como puede determinarse mediante cálculos a tenor de la Proposición LX, Libro I.

ESCOLIO

La demostración de esta Proposición puede explicarse más extensamente de la siguiente manera. Suponiendo que en torno

a la Tierra giraran varias Lunas, como en el sistema de Saturno o Júpiter, los tiempos periódicos de estas Lunas observarían (por el argumento de inducción) la misma ley que *Kepler* observó prevalecía entre los planetas; en consecuencia, sus fuerzas centrípetas serían inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias al centro de la Tierra, según la Proposición I de este Libro. Pues bien, si la Luna más baja fuera muy pequeña y estuviera muy cerca de la Tierra, hasta el punto de casi tocar las cúspides de las montañas más altas, la fuerza centrípeta que la retendría en su órbita sería casi igual a los pesos de cualesquiera cuerpos terrestres que se encontraran en las cimas de las mencionadas montañas (como muestran los cálculos precedentes). En consecuencia, si la fuerza centrífuga que transporta por su órbita a la pequeña Luna la abandonase, impidiéndole seguir su camino, la Luna descendería sobre la Tierra con la misma velocidad con que los cuerpos pesados caen de hecho sobre las cimas de las mismas montañas, debido a la igualdad de las fuerzas que obligan a todos ellos a descender. Y si la fuerza por la que la pequeña Luna descendería fuera distinta de la gravedad y dicha Luna gravitara hacia la Tierra como sabemos gravitan los cuerpos pesados en las cimas de las montañas, descendería con doble velocidad, como impelida por la combinación de ambas fuerzas. En consecuencia, puesto que ambas fuerzas, es decir, la gravedad de los cuerpos pesados y las fuerzas centrípetas de las lunas, se dirigen hacia el centro de la Tierra y son semejantes e iguales entre sí, ambas tendrán (por las Reglas I y II) una y la misma causa. Y, en consecuencia, la fuerza que retiene a la Luna en su órbita es precisamente la misma fuerza que llamamos gravedad, pues de lo contrario la pequeña Luna de la cima de la montaña carecerá de gravedad o caerá dos veces más rápido que lo que acostumbran los cuerpos pesados.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA V

Que los planetas circunjovianos gravitan hacia Júpiter, los que circundan Saturno hacia Saturno, los que circundan el Sol hacia el Sol, siendo apartados del movimiento rectilíneo y retenidos en órbitas curvilíneas por las fuerzas de su gravedad.

Pues las revoluciones de los planetas circunjovianos en torno a Júpiter, de los planetas que circundan Saturno en torno a

Saturno y de Mercurio y Venus y los otros planetas que circundan el Sol en torno al Sol presentan el mismo aspecto que la revolución de la Luna en torno a la Tierra y, en consecuencia, por la Regla 2, tienen que obedecer a la misma especie de causas, especialmente puesto que se ha demostrado que las fuerzas de que dependen dichas revoluciones tienden hacia los centros de Júpiter, Saturno y el Sol, y que dichas fuerzas, al alejarse de Júpiter, Saturno y el Sol, decrecen en la misma proporción y obedeciendo a la misma ley que la fuerza de la gravedad al alejarse de la Tierra.

COROLARIO I. Existe, en consecuencia, un poder de gravedad que tiende hacia todos los planetas, pues es indudable que Venus, Mercurio y los demás son cuerpos de la misma especie que Júpiter y Saturno. Y puesto que toda atracción (por la Ley III) es mutua, Júpiter gravitará, en consecuencia, hacia todos sus satélites, Saturno hacia los suyos, la Tierra hacia la Luna y el Sol hacia todos los planetas primarios.

COROLARIO II. La fuerza de la gravedad que tiende hacia cualquier planeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro de dicho planeta.

COROLARIO III. Todos los planetas gravitan unos hacia otros, por los Corolarios I y II. A ello se debe que Júpiter y Saturno, al acercarse a su conjunción, perturben sensiblemente sus movimientos con su atracción mutua. Igualmente perturba el Sol los movimientos de la Luna, y tanto el Sol como la Luna perturban nuestro mar, como más adelante explicaremos.

ESCOLIO

La fuerza que retiene a los cuerpos celestes en sus órbitas ha sido hasta ahora denominada fuerza centrípeta. Sin embargo, tras haber demostrado que no puede ser sino una fuerza gravitatoria, desde este momento la llamaremos gravedad. Pues la causa de la fuerza centrípeta que retiene a la Luna en su órbita se extenderá a todos los planetas, según las Reglas 1, 2 y 4.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA VI

Que todos los cuerpos gravitan hacia todos los planetas, y que los pesos de los cuerpos hacia cualquier planeta, a distancias iguales del centro del planeta, son proporcionales a las cantidades de materia que respectivamente contienen.

Hace ya mucho tiempo que se observa que cuerpos pesados de toda índole (tomando en cuenta la desigualdad de la retardación que sufren por un pequeño poder de resistencia del aire) descienden hacia la Tierra, *desde iguales alturas*, en tiempos iguales, igualdad que podemos determinar con gran exactitud con ayuda de péndulos. He hecho experimentos con oro, plata, plomo, vidrio, sal común, madera, agua y trigo. Obtuve dos cajas de madera, redondas e iguales. Llené una de madera y colgué un peso igual de oro (lo más exactamente que pude) en el centro de oscilación de la otra. Las cajas, suspendidas de hilos iguales de 11 pies, constituían dos péndulos perfectamente iguales en peso y forma y recibían igualmente la resistencia del aire. Colocándolos juntos, los observé desplazarse hacia adelante y hacia atrás, con iguales vibraciones, durante mucho tiempo. En consecuencia, la cantidad de materia en el oro (por los Corolarios I y VI, Proposición XXIV, Libro II) era a la cantidad de materia en la madera como la acción de la fuerza motriz sobre todo el oro a la acción de la misma sobre toda la madera, es decir, como el peso de uno al peso de la otra; y lo mismo ocurrió con los demás cuerpos. Mediante estos experimentos con cuerpos del mismo peso podía haber descubierto fácilmente una diferencia de materia inferior a una milésima parte del todo, de haber existido. Pero la naturaleza de la gravedad hacia los planetas es, sin duda alguna, la misma que hacia la Tierra. Pues, suponiendo que nuestros cuerpos terrestres fueran llevados a la órbita de la Luna, y una vez allí, privados con la Luna de todo movimiento, fueran liberados y cayeran con ella hacia la Tierra, es seguro, por lo anteriormente demostrado, que describirían iguales espacios que la Luna; en consecuencia, son a la Luna, en lo que toca a cantidad de materia, como sus pesos a su peso. Por lo demás, puesto que los satélites de Júpiter completan sus revoluciones en tiempos que observan la $\frac{3}{2}$ava potencia de la proporción de sus distancias al centro de Júpiter, sus gravedades aceleratívas hacia Júpiter serán inversamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias al centro de Júpiter, es decir, a

iguales distancias iguales. En consecuencia, en el supuesto de que estos satélites cayeran *hacia Júpiter* desde alturas iguales, describirían espacios iguales en tiempos iguales, como hacen en nuestra tierra los cuerpos pesados. Y, por la misma argumentación, si los planetas que circundan el Sol cayeran desde iguales distancias al mismo, describirían en su descenso hacia el Sol espacios iguales en tiempos iguales. Pero las fuerzas que aceleran por igual cuerpos desiguales tienen que ser como dichos cuerpos, por lo que los pesos de los planetas *hacia el Sol* tendrán que ser como sus cantidades de materia. Además, la extraordinaria regularidad del movimiento de los satélites demuestra (por el Corolario III, Proposición LXV, Libro I) que los pesos de Júpiter y sus satélites hacia el Sol son proporcionales a sus diversas cantidades de materia. Pues si algunos de estos cuerpos fueran atraídos hacia el Sol, en proporción a sus cantidades de materia, más que otros, los movimientos de los satélites serían perturbados por dicha desigualdad de atracción (por el Corolario II, Proposición LXV, Libro I). Si, a iguales distancias del Sol, cualquier satélite gravitara hacia él con una fuerza superior, en proporción a su cantidad de materia, a la de Júpiter en proporción a la suya, según una proporción dada, por ejemplo de *d* a *e*, la distancia entre los centros del Sol y la órbita del satélite sería siempre mayor que la distancia entre los centros del Sol y Júpiter, aproximadamente como la raíz cuadrada de la citada proporción, como he podido comprobar mediante ciertos cálculos. Y si el satélite gravitara hacia el Sol con una fuerza menor en la proporción de *e* a *d*, la distancia del centro de la órbita del satélite al Sol sería menor que la distancia del centro de Júpiter al Sol, como la raíz cuadrada de la misma proporción. En consecuencia, si, a iguales distancias del Sol, la gravedad acelerativa de cualquier satélite hacia el Sol fuera mayor que la gravedad acelerativa de Júpiter hacia el Sol en una simple $\frac{1}{1000}$ parte de la gravedad total, la distancia entre el centro de la órbita del satélite y el Sol sería mayor o menor que la distancia de Júpiter al Sol en una $\frac{1}{2000}$ parte de la distancia total, es decir, en una quinta parte de la distancia del satélite más exterior al centro de Júpiter, excentricidad de la órbita que sería muy sensible. Pero las órbitas de los satélites son concéntricas a Júpiter, por lo que las gravedades acelerativas de Júpiter y todos sus satélites hacia el Sol son iguales entre sí. Y, a tenor de la misma argumentación, los pesos de Saturno y sus satélites hacia el Sol son, a iguales distancias al Sol, como sus diversas

cantidades de materia, y los pesos de la Luna y la Tierra hacia el Sol serán nulos o exactamente proporcionales a las masas de materia que contienen. Pero algún peso tienen, según los Corolarios I y III, Proposición V.

Pero aún hay más: los pesos de todas las partes de cada planeta hacia cualquier otro planeta son unos con respecto a otros como la materia de las diversas partes, pues si algunas partes gravitaran más y otras menos que lo correspondiente a su cantidad de materia, el planeta entero, según la índole de las partes que más abundan en él, gravitaría más o menos que en proporción a la cantidad de materia del todo. Tampoco tiene importancia que estas partes sean exteriores o interiores, pues suponiendo, por ejemplo, que eleváramos los cuerpos terrestres hasta la órbita de la Luna para allí compararlos con su cuerpo, si los pesos de dichos cuerpos fueran a los pesos de las partes exteriores de la Luna como las cantidades de materia de unos y otra, respectivamente, pero estuvieran en proporción mayor o menor a los pesos de las partes interiores, los pesos de dichos cuerpos estarían en proporción mayor o menor al peso de toda la Luna, contradiciendo lo que más arriba hemos demostrado.

COROLARIO I. Por tanto, los pesos de los cuerpos no dependen de sus formas y texturas, pues si los pesos pudieran alterarse con las formas, serían mayores o menores, según la variedad de formas, en igual materia, lo que contradice enteramente la experiencia.

COROLARIO II. Todos los cuerpos situados en torno a la Tierra, sin excepción, gravitan hacia la Tierra, y los pesos de todos ellos son, a distancias iguales al centro de la Tierra, como las cantidades de materia que respectivamente contienen. Esta es cualidad de todos los cuerpos accesibles a nuestros experimentos y, en consecuencia (por la Regla III), puede afirmarse de todo cuerpo. Si el éter, o cualquier otro cuerpo, careciera por completo de gravedad o gravitara menos que en proporción a su cantidad de materia, entonces, puesto que (según *Aristóteles*, *Descartes* y otros) no hay entre ese cuerpo y otros más diferencia que de *mera* forma de la materia, mediante sucesivos cambios de forma a forma podría finalmente transformarse en un cuerpo de la misma condición que aquellos que gravitan más que en proporción a su cantidad de materia, y los cuerpos más pesados, adquiriendo por su parte la primera forma de aquel cuerpo, podrían perder gradualmente toda su gravedad. En consecuencia, los pesos dependerían de las formas de los cuerpos, y

podrían cambiar con dichas formas, lo que contradice lo probado en el anterior Corolario.

COROLARIO III. No todos los espacios están igualmente llenos, pues si todos los espacios estuvieran igualmente llenos, la gravedad específica del fluido que llena la región del aire no sería en absoluto menor que la gravedad específica del mercurio, el oro o el más denso de los cuerpos, debido a la extrema densidad de la materia, y ni el oro ni el mercurio ni ningún otro cuerpo podrían descender en el aire, pues los cuerpos no descienden en los fluidos si no son específicamente más pesados que los fluidos. Y si la cantidad de materia en un espacio dado puede, por alguna rarefacción, disminuir, ¿qué podría impedir una disminución hasta el infinito?

COROLARIO IV. Si todas las partículas sólidas de todo cuerpo son de la misma densidad y no pueden enrarecerse a no ser por sus poros, hay que aceptar un espacio o vacío. Al decir cuerpos de la misma densidad me refiero a aquellos cuyas inercias son proporcionales a sus volúmenes.

COROLARIO V. El poder de la gravedad es de naturaleza diferente a la del poder magnético, pues la atracción magnética no es como la materia atraída. Algunos cuerpos son más atraídos por el imán, otros menos, la mayor parte de los cuerpos en absoluto. El poder magnético sobre un cuerpo puede aumentar y disminuir, y es a veces mucho más fuerte, en relación con la cantidad de materia, que el poder de la gravedad, y al apartarse el cuerpo del imán no decrece como el cuadrado, sino casi como el cubo de la distancia, como he podido comprobar aproximadamente mediante toscas observaciones.

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA VII

Que el poder de la gravedad pertenece a todo cuerpo en proporción a la cantidad de materia que cada uno contiene.

Ya hemos probado antes que todos los planetas gravitan unos hacia otros, y también que la fuerza de la gravedad hacia cada uno de ellos, considerada particularmente, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro del planeta. De donde se sigue (por la Proposición LXIX, Libro I, y sus Corolarios) que la gravedad que tiende hacia todos los planetas es proporcional a la materia que éstos contienen.

Por lo demás, puesto que todas las partes de un planeta A gravitan hacia otro planeta B, y la gravedad de cada una de las partes es a la gravedad del todo como la materia de la parte a la materia del todo, y puesto que (por la Ley III) a cada acción corresponde una reacción igual, el planeta B, por su parte, gravitará hacia todas las partes del planeta A; y su gravedad hacia una parte cualquiera será a la gravedad hacia el todo como la materia de la parte a la materia del todo. Q.E.D.

COROLARIO I. En consecuencia, la fuerza de la gravedad hacia cualquier planeta en su totalidad obedece a las fuerzas de la gravedad hacia todas sus partes y está compuesta por ellas. Las atracciones magnéticas y eléctricas nos ofrecen ejemplos de lo mismo, pues toda atracción hacia el todo obedece a las atracciones hacia las diversas partes. La cosa puede entenderse fácilmente en lo que toca a la gravedad si consideramos un planeta mayor como formado por un cierto número de planetas menores que se reúnen en un globo, pues *así se vería* que la fuerza del todo tiene que obedecer a la fuerza de las partes componentes. Si a esto se objeta que, de acuerdo con esta ley, todos los cuerpos que nos rodean gravitarán unos hacia otros y que esta gravitación no se manifiesta en forma alguna, responderé que, puesto que la gravitación hacia estos cuerpos es a la gravitación hacia toda la Tierra como estos cuerpos son a toda la Tierra, la gravitación hacia ellos tiene que ser muy inferior a lo que nuestros sentidos pueden observar.

COROLARIO II. La fuerza de la gravedad hacia las diversas partículas iguales de todo cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares a las partículas, como se desprende del Corolario III, Proposición LXXIV, Libro I.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA VIII

Si en dos esferas que gravitan la una hacia la otra la materia es semejante en todos los lugares circundantes y equidistantes de los centros, el peso de cada una de las esferas hacia la otra será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.

Tras determinar que la fuerza de la gravedad hacia todo un planeta obedece a las fuerzas de la gravedad hacia todas sus partes y está compuesta de ellas, y que hacia cada una de las

partes se encuentra en proporción inversa a los cuadrados de las distancias a la parte, me quedaba todavía la duda de si dicha proporción inversa al cuadrado de las distancias era exacta o muy aproximadamente aplicable a la fuerza total compuesta de tantas fuerzas parciales, pues podía ocurrir que la proporción exactamente aplicable a grandes distancias no lo fuera cerca de la superficie del planeta, donde las distancias de las partículas son desiguales y su situación distinta. Pero con ayuda de las Proposiciones LXXV y LXXVI del Libro I y sus Corolarios, terminé por convencerme de la verdad de la Proposición expuesta en su actual forma.

COROLARIO I. Así podemos determinar y comparar entre sí los pesos de los cuerpos hacia diversos planetas, pues los pesos de los cuerpos que giran en círculo en torno a los planetas son (por el Corolario II, Proposición IV, Libro I) directamente proporcionales a los diámetros de los círculos e inversamente proporcionales a los cuadrados de sus tiempos periódicos, y sus pesos en la superficie de los planetas, o a cualquier otra distancia de sus centros, son (por esta Proposición) mayores o menores en proporción inversa al cuadrado de las distancias. De esta forma, y a partir de los tiempos periódicos de Venus, que gira en torno al Sol en 224^d, $16\frac{3}{4}{}^h$, los del satélite circunjoviano exterior que gira en torno a Júpiter en 16^d, $16\frac{8}{15}{}^h$, los del satélite de *Huygens* que gira en torno a Saturno en 15^d, $22\frac{2}{3}{}^h$, y los de la Luna, que gira en torno a la Tierra en 27^d, 7^h, 43^m, comparados con la distancia media de Venus al Sol, y con la elongación heliocéntrica máxima al centro de Júpiter del satélite circunjoviano exterior, 8'16", la del satélite de *Huygens* al centro de Saturno, 3'4", y la de la Luna a la Tierra, 10'33", determiné mediante cálculos que los pesos de cuerpos iguales, a distancias iguales de los centros del Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra, hacia el Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra eran unos con respecto a otros como $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}$, y $\frac{1}{169282}$, respectivamente. Entonces, puesto que los pesos disminuyen o aumentan en razón cuadrada a medida que las distancias disminuyen o aumentan, los pesos de cuerpos iguales hacia el Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra, a distancias de 10000, 997, 791 y 109 de sus centros, es decir, precisamente en su superficie, serán como 10000, 943, 529 y 435, respectivamente. Posteriormente se mostrarán los pesos de los cuerpos en la superficie de la Luna.

COROLARIO II. De la misma forma descubrimos la cantidad de materia en los diversos planetas, pues sus cantidades de materia son como las fuerzas de la gravedad a distancias iguales de sus centros; es decir, en el Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra, como 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, y $\frac{1}{169282}$, respectivamente. Si la paralaje del Sol se toma mayor o menor que 10″30‴, la cantidad de materia en la Tierra deberá aumentarse o disminuirse como el cubo de esa proporción.

COROLARIO III. Así determinamos también las densidades de los planetas, pues (por la Proposición LXXII, Libro I) los pesos de cuerpos iguales y semejantes hacia esferas semejantes son, en la superficie de dichas esferas, como los diámetros de las esferas, por lo que las densidades de esferas no semejantes son como esos pesos aplicados a los diámetros de las esferas. Pero los verdaderos diámetros del Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra eran unos con respecto a otros como 10000, 997, 791 y 109, y los pesos hacia los mismos como 10000, 943, 529 y 435, respectivamente, por lo que sus densidades son como 100, $94\frac{1}{2}$, 67 y 400. La densidad de la Tierra que resulta de estos cálculos no depende de la paralaje del Sol, sino que es determinada por la paralaje de la Luna, por lo que está ciertamente bien definida. El Sol, en consecuencia, es algo más denso que Júpiter, Júpiter más que Saturno, y la Tierra cuatro veces más densa que el Sol, pues el Sol, debido a su gran calor, se mantiene en una especie de estado enrarecido. La Luna es más densa que la Tierra, como después se mostrará.

COROLARIO IV. En igualdad de las restantes condiciones, cuanto más pequeños sean los planetas, mayor será su densidad, pues de esta forma los poderes de la gravedad en sus respectivas superficies se acercan más a la igualdad. Igualmente, en igualdad de las restantes condiciones, su densidad es mayor cuando están más cerca del Sol. De esta forma, Júpiter es más denso que Saturno, y la Tierra más densa que Júpiter, pues los planetas fueron situados a diferentes distancias del Sol para que, de acuerdo con su grado de densidad, pudieran gozar de una proporción mayor o menor del calor del Sol. Nuestra agua, de ser desplazada hasta la órbita de Saturno, se convertiría en hielo, y en la de Mercurio se evaporaría rápidamente, pues la luz del Sol, a la que es proporcional su calor, es siete veces más densa en el orbe de Mercurio que entre nosotros, y he determi-

nado con el termómetro que un calor siete veces mayor que el de nuestro verano hace hervir el agua. Y tampoco cabe duda de que la materia de Mercurio está adaptada a su calor, siendo, en consecuencia, más densa que la materia de nuestra Tierra, pues en una materia más densa las operaciones de la Naturaleza exigen mayor calor.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA IX

Que la fuerza de la gravedad, considerada hacia abajo desde la superficie de los planetas, decrece aproximadamente en proporción a las distancias al centro de los planetas.

Si la materia del planeta fuera de una densidad uniforme, esta Proposición sería exactamente cierta (por la Proposición LXXIII, Libro I). El error, en consecuencia, no puede ser mayor que el debido a la desigualdad de la densidad.

PROPOSICIÓN X. TEOREMA X

Que los movimientos de los planetas en los cielos pueden subsistir durante un tiempo desmesurado.

En el Escolio de la Proposición XL, Libro II, he demostrado que un globo de agua helada que se mueva libremente por nuestro aire perderá por la resistencia del aire $\frac{1}{4586}$ parte de su movimiento en el tiempo en que describe la longitud de su semidiámetro, y la misma proporción se aplica a prácticamente cualquier globo, sean cuales fueren su tamaño y la velocidad a la que se mueven. Ahora bien, he determinado que la densidad de nuestro globo de tierra es mayor que la que le correspondería si estuviera solamente compuesto de agua, y ello de la siguiente forma. Si todo el globo estuviera compuesto únicamente de agua, todo aquello cuya densidad fuera inferior a la del agua emergería y flotaría, debido a su menor gravedad específica. En consecuencia, si un globo de materia terrestre, cubierta por todas partes de agua, fuera menos denso que el agua, emergería en algún lado, y el agua, retrocediendo, se acumularía en el lado

opuesto. Y tal es la condición de nuestra tierra, en gran parte cubierta por los mares. De no ser por su mayor densidad, la tierra emergería de los mares y, conforme a su grado de ligereza, se elevaría más o menos sobre su superficie, mientras el agua de los mares caía hacia el lado opuesto. A tenor de la misma argumentación, las manchas del Sol, que flotan sobre la materia lúcida del mismo, son más ligeras que dicha materia, y en los planetas, fuera cual fuera su modo de formación cuando aún eran masas fluidas, toda la materia más pesada se hundió hacia el centro. En consecuencia, puesto que la materia común de nuestra tierra es en la superficie de la misma unas dos veces más pesada que el agua, y un poco más abajo, en las minas, llega a ser unas tres, cuatro, o a veces cinco veces más pesada, es probable que la cantidad total de materia de la Tierra sea cinco o seis veces más pesada que si consistiera toda de agua, especialmente cuando, como antes he demostrado, la Tierra es unas cuatro veces más densa que Júpiter. En consecuencia, si Júpiter es un poco más denso que el agua, en el transcurso de los treinta días en que dicho planeta describe la longitud de 459 de sus semidiámetros, perdería, en un medio de la misma densidad que nuestro aire, casi una décima parte de su movimiento. Pero como la resistencia de los medios decrece en proporción a su peso o densidad, de forma que el agua, $13\frac{3}{5}$ veces más ligera que el mercurio, resiste menos en esa proporción, y el aire, 860 veces más ligero que el agua, resiste menos en la misma proporción, en los cielos, donde el peso del medio en que los planetas se mueven disminuye enormemente, la resistencia prácticamente desaparecerá.

En el Escolio de la Proposición XXII, Libro II, se muestra que, a una altura de 200 millas sobre la Tierra, el aire es más raro que en la superficie de la Tierra en una razón de 30 a 0,00000000000003998, ó como 75000000000000 a 1, aproximadamente. En consecuencia, el planeta Júpiter, que gira en un medio de la misma densidad que este aire superior, no perdería por la resistencia del medio ni una 1000000sima parte de su movimiento en 1000000 de años. En los espacios cercanos a la Tierra la resistencia obedece sólo al aire, las exhalaciones y los vapores. Cuando éstos son cuidadosamente extraídos por la bomba de aire bajo el recipiente, los cuerpos pesados caen en el interior del recipiente con perfecta libertad y sin que pueda percibirse la mínima resistencia; el mismo oro y el más ligero plumón, liberados al mismo tiempo, descenderán con igual velocidad y,

aunque caigan por un espacio de cuatro, seis u ocho pies, tocarán fondo al mismo tiempo, como demuestran los experimentos. En consecuencia, estando las regiones celestes perfectamente libres de aire y exhalaciones, los planetas y cometas, al no encontrar resistencia sensible en dichos espacios, continuarán su movimiento a través de ellos por un período inmenso de tiempo.

HIPÓTESIS PRIMERA

Que el centro del sistema del mundo está inmóvil.

Esto lo reconocen todos, aunque algunos sostienen que la Tierra, y otros que el Sol, ocupa una posición fija en dicho centro. Veamos qué se sigue de ello.

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA XI

Que el centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y todos los planetas está inmóvil.

Pues (por el Corolario IV de las Leyes) ese centro está en reposo o avanza uniformemente por una línea recta; pero si ese centro se moviera, el centro del mundo se movería también, lo que contradice la Hipótesis.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA XII

Que el Sol es agitado por un movimiento continuo, pero nunca se aleja mucho del centro común de gravedad de todos los planetas.

Pues dado que (por el Corolario II, Proposición VIII) la cantidad de materia en el Sol es a la cantidad de materia en Júpiter como 1067 a 1, y que la distancia de Júpiter al Sol está en una proporción sólo algo mayor al semidiámetro del Sol, el centro común de gravedad de Júpiter y el Sol caerá en un punto ligeramente exterior a la superficie del Sol. A tenor de la misma

argumentación, puesto que la cantidad de materia en el Sol es a la cantidad de materia en Saturno como 3021 a 1, y puesto que la distancia de Saturno al Sol está en una proporción sólo algo menor al semidiámetro del Sol, el centro común de gravedad del Sol y Saturno caerá en un punto situado ligeramente bajo la superficie del Sol. Y, continuando con los principios de estos cálculos, encontraríamos que aunque la Tierra y todos los planetas estuvieran situados a un lado del Sol, la distancia al centro del Sol del centro común de gravedad de todos apenas llegaría a un diámetro del Sol. En otros casos, las distancias de dichos centros son siempre menores. En consecuencia, puesto que ese centro de gravedad está continuamente en reposo, el Sol, de acuerdo con las diversas posiciones de los planetas, tiene que moverse continuamente en todas direcciones, pero nunca se alejará mucho de ese centro.

COROLARIO. Por tanto, el centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y todos los planetas debe ser considerado como el centro del mundo, pues, dado que la Tierra, el Sol y todos los planetas gravitan unos hacia otros, y están, por ello, conforme a sus poderes de gravedad, en continua agitación, como exigen las Leyes del Movimiento, es evidente que sus centros móviles no pueden ser tomados por el centro inmóvil del mundo. Si hubiera que colocar en el centro el cuerpo hacia el que más gravitan los demás (de acuerdo con la opinión general), este privilegio recaería sobre el Sol. Sin embargo, como el Sol mismo se mueve, hay que escoger el punto fijo del que menos se aleje el centro del Sol, y del que se alejaría aún menos si el cuerpo del Sol fuera más denso, mayor y, en consecuencia, menos propenso a ser movido.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA XIII

Que los planetas se mueven por elipses que tienen su foco común en el centro del Sol, y que, mediante radios trazados a dicho centro, describen áreas proporcionales a los tiempos de descripción.

Más arriba hemos hablado sobre estos movimientos de los Fenómenos. Ahora que conocemos los principios de que dependen, de dichos principios deduciremos los movimientos celestes

a priori. Puesto que los pesos de los planetas hacia el Sol son inversamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias al centro del Sol, si el Sol estuviera en reposo y los otros planetas no actuaran unos sobre otros, sus órbitas serían elipses, con el Sol cómo foco común, y describirían áreas proporcionales a los tiempos *de descripción*, por las Proposiciones I y XI y el Corolario I de la Proposición XIII, Libro I. Pero las acciones de unos planetas sobre otros son tan reducidísimas que pueden ignorarse; según la Proposición LXVI, Libro I, perturban los movimientos de los planetas en torno al Sol en movimiento menos que si dichos movimientos tuvieran lugar en torno al Sol en reposo.

Cierto que la acción de Júpiter sobre Saturno no puede ignorarse, pues la fuerza de la gravedad hacia Júpiter es a la fuerza de la gravedad hacia el Sol (a iguales distancias, Corolario II, Proposición VIII) como 1 a 1067. En consecuencia, en la conjunción de Júpiter y Saturno, dado que la distancia de Saturno a Júpiter es a la distancia de Saturno al Sol casi como 4 a 9, la gravedad de Saturno hacia Júpiter será a la gravedad de Saturno hacia el Sol como 81 a 16×1067, ó como 1 a aproximadamente 211. La consecuencia de ello es una perturbación de la órbita de Saturno en cada conjunción de este planeta con Júpiter, perturbación tan sensible que intriga a los astrónomos. Como el planeta se encuentra en posiciones distintas en estas conjunciones, su excentricidad a veces aumenta y a veces disminuye, su afelio a veces avanza y a veces retrocede, y su movimiento medio es sucesivamente acelerado y retardado. Sin embargo, todo el error en su movimiento en torno al Sol, a pesar de obedecer a una fuerza tan grande, puede casi evitarse (excepto en lo que toca al movimiento medio) situando el foco inferior de su órbita en el centro común de gravedad de Júpiter y el Sol (de acuerdo con la Proposición LXVII, Libro I), por lo que ese error, cuando es el máximo, apenas sobrepasa los dos minutos. Y el error máximo en el movimiento medio apenas sobrepasa los dos minutos al año. Pero en la conjunción de Júpiter y Saturno, las fuerzas aceleratívas de la gravedad del Sol hacia Saturno, de Júpiter hacia Saturno y de Júpiter hacia el Sol son casi como 16, 81 y $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$, ó 156609, por lo que la diferencia de las fuerzas de la gravedad del Sol hacia Saturno y de Júpiter hacia Saturno es a la fuerza de la gravedad de Júpiter

hacia el Sol como 65 a 156609, o como 1 a 2409. Pero el poder máximo de Saturno para perturbar el movimiento de Júpiter es proporcional a esta diferencia, por lo que la perturbación de la órbita de Júpiter es mucho menor que la de la órbita de Saturno. Las perturbaciones de las restantes órbitas son aún mucho menores, con la excepción de la órbita de la Tierra, que es sensiblemente perturbada por la Luna. El centro común de gravedad de la Tierra y la Luna se mueve por una elipse en torno al Sol en el foco de ésta y, mediante un radio trazado al Sol, describe áreas proporcionales a los tiempos de descripción. Pero la Tierra gira al mismo tiempo con un movimiento mensual en torno a este centro común.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA XIV

Los afelios y nodos de las órbitas de los planetas son fijos.

Los afelios están inmóviles, según la Proposición XI, Libro I, y lo mismo ocurre con los planos de las órbitas, por la Proposición I del mismo Libro. Y si los planos son fijos, los nodos tendrán que serlo también. Cierto que puede surgir alguna irregularidad debida a las mutuas acciones de los planetas y cometas en sus revoluciones, pero son tan pequeñas que aquí podemos ignorarlas.

COROLARIO I. Las estrellas fijas están inmóviles, puesto que mantienen la misma posición con respecto a los afelios y nodos de los planetas.

COROLARIO II. Y puesto que estas estrellas no tienen paralaje perceptible al movimiento anual de la Tierra, carecen de fuerza alguna, debido a su inmensa distancia, para producir efectos perceptibles en nuestro sistema. Por no mencionar el hecho de que las estrellas fijas, dispersas en cualquier orden por todo el cielo, destruyen sus acciones mutuas con sus atracciones opuestas, según la Proposición LXX, Libro I.

ESCOLIO

Como los planetas cercanos al Sol (es decir, Mercurio, Venus, la Tierra y Marte) son tan pequeños que sólo pueden actuar unos sobre otros con fuerza ínfima, sus afelios y nodos

tienen que ser fijos, excepto en la medida en que puedan ser perturbados por la acción de Júpiter, Saturno y otros cuerpos más altos. Por tanto, mediante la teoría de la gravedad podemos determinar que sus afelios avanzan ligeramente con respecto a las estrellas fijas, y ello como la $\frac{3}{2}$ava potencia de sus diversas distancias al Sol. De forma que si el afelio de Marte avanza 33'20" con respecto a las estrellas fijas en el transcurso de cien años, los de la Tierra, Venus y Mercurio avanzarán respectivamente 17'40", 10'53" y 4'16" en cien años. Pero estos movimientos son tan poco considerables que los hemos ignorado en esta Proposición.

PROPOSICIÓN XV. PROBLEMA I

Determinar los principales diámetros de las órbitas de los planetas.

Deben tomarse como la $\frac{2}{3}$ava potencia de los tiempos periódicos, por la Proposición XV, Libro I, y después aumentarse, respectivamente, en la proporción de la suma de las masas de materia en el Sol y cada uno de los planetas a la primera de dos medias proporcionales entre dicha suma y la cantidad de materia en el Sol, por la Proposición LX, Libro I.

PROPOSICIÓN XVI. PROBLEMA II

Determinar las excentricidades y afelios de los planetas.

Este problema se resuelve mediante la Proposición XVIII, Libro I.

PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA XV

Que los movimientos diurnos de los planetas son uniformes, y que la libración de la Luna se debe a su movimiento diurno.

La Proposición es probada por la primera Ley del Movimiento y el Corolario XXII, Proposición LXVI, Libro I. Júpiter, en relación con las estrellas fijas, gira en 9^h56^m, Marte en

$24^h 39^m$, Venus en unas 23^h, la Tierra en $23^h 56^m$, el Sol en $25\frac{1}{2}{}^d$ y la Luna en $27^d 7^h 43^m$. Esto se desprende de los Fenómenos. Las manchas del cuerpo solar vuelven a la misma situación sobre el disco solar, con respecto a la Tierra, en $27\frac{1}{2}$ días, por lo que el Sol gira, con respecto a las estrellas fijas, en unos $25\frac{1}{2}$ días. Pero como el día lunar, que obedece a su revolución uniforme en torno a su eje, es mensual, *es decir, igual al tiempo de su revolución periódica por su órbita,* la misma cara de la Luna estará siempre vuelta aproximadamente hacia el foco superior de su órbita, pero, como la situación de dicho foco exige, se desviará un poco hacia uno y otro lado, vista desde la Tierra, en el foco inferior. Esta es la libración en longitud, pues la libración en latitud obedece a la latitud de la Luna, y a la inclinación de su eje hacia el plano de la eclíptica. Mr. *N. Mercator* publicó a principios del año 1676, en su *Astronomía*, esta teoría de la libración de la Luna, explicada más detalladamente en base a las cartas que le envié. El satélite exterior de Saturno parece girar en torno a su eje con un movimiento como el de la Luna, presentando siempre la misma cara a Saturno, pues en su revolución en torno a Saturno, cada vez que llega a la parte oriental de su órbita es apenas visible, y generalmente desaparece por completo. Es probable que ello se deba, como ha observado Mr. *Cassini*, a ciertas manchas de la parte del cuerpo que entonces presenta a la Tierra. También parece que el satélite exterior de Júpiter gira en torno a su eje con un movimiento parecido, pues tiene una mancha en la parte del cuerpo que no presenta a Júpiter y que siempre aparece como si estuviera en el cuerpo de Júpiter cuando el satélite pasa entre Júpiter y nuestros ojos.

PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA XVI

Que los ejes de los planetas son menores que los diámetros trazados perpendicularmente a los ejes.

La igual gravitación de las partes situadas en todos los lados de los planetas les daría una forma esférica si no fuera por su revolución diurna en círculo. Ese movimiento circular hace que las partes que se alejan del eje pugnen por ascender cerca del ecuador; como consecuencia de ello, si la materia está en estado

fluido, al ascender hacia el ecuador aumentará allí los diámetros, y al descender hacia los polos acortará el eje. Por tanto, el diámetro de Júpiter (por observaciones coincidentes de los astrónomos) resulta ser más corto entre polo y polo que de este a oeste. Y, a tenor de la misma argumentación, si nuestra Tierra no fuera más alta en el ecuador que en los polos, el mar se hundiría en las proximidades de los polos y, elevándose hacia el ecuador, anegaría cuanto allí hubiera.

PROPOSICIÓN XIX. PROBLEMA III

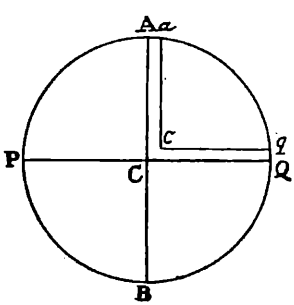
Determinar la proporción del eje de un planeta a los diámetros perpendiculares al mismo.

Nuestro compatriota Mr. *Norwood*, midiendo en 1635 una distancia de 905751 pies, medida de *Londres*, entre *Londres* y *York*, y observando que la diferencia de latitudes era de 2°28', determinó que la medida de un grado es 367196 pies, medida de *Londres*, es decir, 57300 toesas de *París*. M. *Picard*, midiendo un arco de un grado y 22'55" del meridiano entre *Amiens* y *Malvoisine*, determinó que un arco de un grado mide 57060 toesas de *París*. M. *Cassini*, padre, midió la distancia en el meridiano desde el pueblo de *Collioure*, en el *Rosellón*, hasta el Observatorio de *París*, y su hijo añadió la distancia desde el Observatorio hasta la Ciudadela de *Dunquerque*. La distancia total es de $486156\frac{1}{2}$ toesas, y la diferencia de latitudes entre *Collioure* y *Dunquerque* 8 grados y $31'11\frac{5}{6}''$. Por tanto, un arco de un grado resulta tener 57061 toesas de *París*. Y en base a estas mediciones llegamos a la conclusión de que la circunferencia de la Tierra es de 123249600 pies de *París*, y su semidiámetro 19615800 pies, en el supuesto que la Tierra tenga forma esférica.

En la latitud de *París*, un cuerpo pesado, cayendo durante un segundo de tiempo, describe 15 pies de Paris, 1 pulgada, $1\frac{7}{9}$ líneas, como más arriba, es decir, $2173\frac{7}{9}$ líneas. El peso del cuerpo es disminuido por el peso del aire ambiente. Supongamos que el peso de esta forma perdido sea $\frac{1}{11000}$ parte del peso total, y el mencionado cuerpo pesado, cayendo en el vacío, describirá una altura de 2174 líneas en un segundo de tiempo.

En un día sideral de $23^h 56^m 4^s$, un cuerpo que gira uniformemente en círculo a una distancia de 19615800 pies del centro describe en un segundo de tiempo un arco de 1433, 46 pies, cuyo seno verso es 0,05236561 pies, ó 7,54064 líneas. En consecuencia, la fuerza con que los cuerpos descienden en la latitud de *París* es a la fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador resultante del movimiento diurno de la Tierra como 2174 a 7,54064.

La fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador es a la fuerza centrífuga con que los cuerpos se alejan directamente de la Tierra en la latitud de *París*, 48° 50' 10", como el cuadrado de la razón del radio al coseno de la latitud, es decir, como 7,54064 a 3,267. Añádase a esta fuerza la fuerza con que los cuerpos descienden por su peso en la latitud de *París*, y un cuerpo que caiga en la latitud de *París* con toda su fuerza no disminuida de gravedad describirá, en un segundo de tiempo, 2177,267 líneas, ó 15 pies de *París*, 1 pulgada y 5,267 líneas. Y la fuerza total de la gravedad en esa latitud será a la fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador de la Tierra como 2177,267 a 7,54064, ó como 289 a 1.



En consecuencia, si APBQ representa la figura de la Tierra, ya no esférica, sino generada por la rotación de una elipse en torno a su eje menor PQ, y ACQ*qca* un canal lleno de agua que va desde el polo Q*q* hasta el centro C*c*, desde donde sube hasta el ecuador A*a*, el peso del agua en el lado AC*ca* del canal será al peso del agua en el otro lado QC*cq* como 289 a 288, porque la fuerza centrífuga debida al movimiento circular sostiene y elimina una de las 289 partes del peso (en un lado), y el peso de 288 en el otro sostiene el resto. Pero mediante cálculos (en base al Corolario II, Proposición XCI, Libro I) observo que si la materia de la Tierra fuera toda uniforme y no se moviera en absoluto, y su eje PQ fuera al diámetro AB como 100 a 101, la fuerza de la gravedad en el lugar Q hacia la Tierra sería a la fuerza de la gravedad en el mismo lugar Q hacia una esfera descrita en torno al centro C con radio PC o QC como 126 a 125. Y, a tenor de la misma argumentación, la fuerza de la gravedad en el lugar A hacia el esferoide generado por la rotación de la elipse APBQ alrededor del eje AB es a la fuerza de la gravedad en el mismo lugar A

hacia la esfera descrita en torno al centro C con radio AC como 125 a 126. Pero la fuerza de la gravedad en el lugar A hacia la Tierra es una media proporcional entre las fuerzas de la gravedad hacia el esferoide y esta esfera, porque la esfera, al disminuir su diámetro PQ en la proporción de 101 a 100, se transforma en la figura de la Tierra, y esta figura, al disminuir un tercer diámetro perpendicular a los dos diámetros AB y PQ en la misma proporción, se convierte en el mencionado esferoide, y la fuerza de la gravedad en A disminuye en ambos casos aproximadamente en la misma proporción. En consecuencia, la fuerza de la gravedad en A hacia la esfera descrita en torno al centro C con radio AC es a la fuerza de la gravedad en A hacia la Tierra como 126 es a $125\frac{1}{2}$. Y la fuerza de la gravedad en el lugar Q hacia la esfera descrita en torno al centro C con radio QC es a la fuerza de la gravedad en el lugar A hacia la esfera descrita en torno al centro C con radio AC en la proporción de los diámetros, es decir, es como 100 a 101 (por la Proposición LXII, Libro I). En consecuencia, si combinamos estas tres proporciones, 126 a 125, 126 a $125\frac{1}{2}$ y 100 a 101, formando una sola, la fuerza de la gravedad en el lugar Q hacia la Tierra será a la fuerza de la gravedad en el lugar A hacia la Tierra como $126 \times 126 \times 100$ a $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, ó como 501 a 500.

Entonces, puesto que (por el Corolario III, Proposición XCI, Libro I) la fuerza de la gravedad en cada uno de los lados del canal AC*ca* o QC*cq* es como la distancia de los lugares al centro de la Tierra, en el supuesto de que dichos lados sean divididos en partes proporcionales a los todos por superficies transversales, paralelas y equidistantes, los pesos de cualquier número de partes del lado AC*ca* serán a los pesos del mismo número de partes del otro lado como sus magnitudes y las fuerzas aceleratrivas de su gravedad juntamente, es decir, como 101 a 100 y 500 a 501, o como 505 a 501. En consecuencia, si la fuerza centrífuga de cada una de las partes del lado AC*ca* debida al movimiento diurno fuera al peso de la misma parte como 4 a 505, de forma que la fuerza centrífuga restara cuatro partes al peso de cada parte dividida en otras 505, los pesos permanecerían iguales en ambos lados, por lo que el fluido reposaría en equilibrio. Pero la fuerza centrífuga de cada una de las partes es al peso de la misma como 1 a 289, es decir, la fuerza centrífuga, que debería ser $\frac{4}{505}$ partes del peso, es solamente $\frac{1}{289}$ parte del mismo. En consecuencia, afirmo, por la regla de la proporción, que si la

fuerza centrífuga $\frac{4}{505}$ hace que la altura del agua en el lado ACc*a* exceda la altura del agua en el lado QC*cq* en $\frac{1}{100}$ parte de su peso total, la fuerza centrífuga $\frac{1}{289}$ hará que el exceso de altura en el lado ACc*a* sea sólo $\frac{1}{229}$ parte de la altura del agua en el otro lado, QC*cq*. En consecuencia, el diámetro de la Tierra en el ecuador es a su diámetro de polo a polo como 230 a 229. Y puesto que el semidiámetro medio de la Tierra, según las mediciones de *Picard*, es de 19615800 pies de *París*, ó 3923,16 millas (calculando 5000 pies por milla), la Tierra será en el ecuador 85472 pies, ó $17\frac{1}{10}$ millas, más alta que en los polos. Y su altura en el ecuador será aproximadamente 19658600 pies, y en los polos 19573000 pies.

Si, permaneciendo invariables la densidad y el tiempo periódico de la revolución diurna, el planeta fuera mayor o menor que la Tierra, la proporción de la fuerza centrífuga a la de la gravedad y, por tanto, también del diámetro entre los polos al diámetro en el ecuador, seguiría siendo la misma. Pero si el movimiento diurno fuera acelerado o retardado en cualquier proporción, la fuerza centrífuga aumentaría o disminuiría aproximadamente en la misma proporción al cuadrado, por lo que la diferencia de los diámetros aumentaría o disminuiría en la misma razón cuadrada, muy aproximadamente. Y si la densidad del planeta aumentara o disminuyera en cualquier proporción, la fuerza de la gravedad dirigida hacia él también aumentaría o disminuiría en la misma proporción, y la diferencia de los diámetros, por el contrario, disminuiría en la proporción en que aumentara la fuerza de la gravedad y aumentaría en la proporción en que disminuyera la fuerza de la gravedad. En consecuencia, puesto que la Tierra gira, con respecto a las estrellas fijas, en 23^h56^m, y Júpiter en 9^h56^m, y dado que los cuadrados de sus tiempos periódicos son como 29 a 5, y sus densidades como 400 a $94\frac{1}{2}$, la diferencia de los diámetros de Júpiter será a su diámetro menor como $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ a 1, ó como 1 a $9\frac{1}{3}$, aproximadamente. En consecuencia, el diámetro de Júpiter de este a oeste es a su diámetro de polo a polo aproximadamente

como $10\frac{1}{3}$ a $9\frac{1}{3}$. En consecuencia, puesto que su diámetro máximo es 37″, su diámetro mínimo, entre los polos, será 33″25‴. Añádanse a ello unos 3″ por la refracción irregular de la luz, y los diámetros aparentes de este planeta serán 40″ y 36″25‴, que son entre sí como $11\frac{1}{6}$ a $10\frac{1}{6}$, muy aproximadamente. Todo ello en el supuesto de que el cuerpo de Júpiter fuera uniformemente denso. Ahora bien, si su cuerpo es más denso hacia el plano del ecuador que hacia los polos, sus diámetros pueden ser entre sí como 12 a 11, ó 13 a 12, o quizá 14 a 13.

Y *Cassini* observó en el año de 1691 que el diámetro de Júpiter de este a oeste es aproximadamente una quinceava parte mayor que el otro diámetro. Mr. *Pound*, con su telescopio de 123 pies y un excelente micrómetro, midió en 1719 los diámetros de Júpiter, con los resultados siguientes:

Los tiempos			Diámetro máximo	Diámetro mínimo	Los diámetros entre sí
	Días	*Horas*	*Partes*	*Partes*	
Enero	28	6	13,40	12,28	Como 12 a 11
Febrero	6	7	13,12	12,20	Como $13\frac{3}{4}$ a $12\frac{3}{4}$
Marzo	9	7	13,12	12,08	Como $12\frac{2}{3}$ a $11\frac{2}{3}$
Abril	9	9	12,32	11,48	Como $14\frac{1}{2}$ a $13\frac{1}{2}$

Por lo que la teoría concuerda con los fenómenos, pues los planetas reciben algo más de calor de los rayos del Sol hacia sus ecuadores y, en consecuencia, allí están un poco más condensados, por razón de este calor, que cerca de los polos.

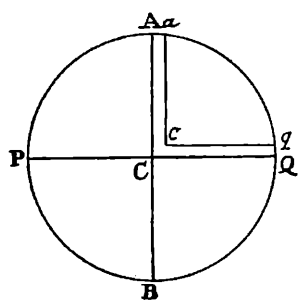
Por lo demás, los experimentos con péndulos que se exponen bajo la Proposición siguiente mostrarán que hay una disminución de gravedad debida a la rotación diurna de la Tierra, por lo que la Tierra (en el supuesto de que su materia sea de densidad uniforme) es más alta en el ecuador que en los polos.

PROPOSICIÓN XX. PROBLEMA IV

Determinar y comparar entre sí los pesos de los cuerpos en las diversas regiones de nuestra Tierra.

Puesto que los pesos de los lados desiguales del canal de agua ACQ*qca* son iguales, y dado que los pesos de las partes

proporcionales a los lados enteros e igualmente situadas en ellos son unos con respecto de otros como los pesos de los todos y, en consecuencia, iguales entre sí, los pesos de partes iguales e igualmente situadas en los lados serán inversamente proporcionales a los lados, es decir, inversamente como 230 a 229. Y lo mismo ocurre con todo cuerpo homogéneo igual en la misma situación en los lados del canal. Sus pesos son inversamente proporcionales a los lados, es decir, inversamente proporcionales a las distancias de los cuerpos al centro de la Tierra. En consecuencia, si los cuerpos están situados en las partes superiores de los canales, o sobre la superficie de la Tierra, sus pesos serán unos con respecto a otros inversamente proporcionales a sus distancias al centro. Y, a tenor de la misma argumentación, los pesos son en todo otro lugar alrededor de la superficie de la Tierra inversamente proporcionales a las distancias de los lugares al centro. En consecuencia, si se acepta la hipótesis de que la Tierra es un esferoide, su proporción está dada.



De aquí se deriva el teorema según el cual el incremento de peso al pasar del ecuador a los polos es aproximadamente como el seno verso del doble de la latitud, o, lo que viene a ser lo mismo, como el cuadrado del seno de la latitud. Y los arcos de los grados de latitud en el meridiano aumentan aproximadamente en la misma proporción. En consecuencia, como la latitud de *París* es 48° 50′, la de los lugares bajo el ecuador 00° 00′, y la de los lugares bajo los polos 90°, y dado que los senos versos del doble de estos arcos son 11334, 00000 y 20000, con radio 10000, y que la fuerza de la gravedad en el polo es a la fuerza de la gravedad en el ecuador como 230 a 229, y el exceso de la fuerza de la gravedad en el polo sobre la fuerza de la gravedad en el ecuador como 1 a 229, el exceso de la fuerza de la gravedad en la latitud de *París* será a la fuerza de la gravedad en el ecuador como $1 \times \frac{11334}{20000}$ a 229, o como 5667 a 2290000. En consecuencia, las fuerzas totales de la gravedad en esos lugares serán una con respecto a la otra como 2295667 a 2290000. En consecuencia, dado que las longitudes de los péndulos que vibran en

tiempos iguales son como las fuerzas de la gravedad, y dado que en la latitud de *París* la longitud de un péndulo que vibre al segundo es de 3 pies de *París* y $8\frac{1}{2}$ líneas, o más bien, debido al peso del aire, $8\frac{5}{9}$ líneas, la longitud de un péndulo que vibre en el mismo tiempo bajo el ecuador será 1,087 líneas más corta. Con cálculos semejantes se confecciona la siguiente tabla.

De esta tabla, en consecuencia, se desprende que la desigualdad de grados es tan pequeña que la figura de la Tierra, para cuestiones geográficas, puede considerarse esférica, especialmente si la Tierra es un poco más densa hacia el plano del ecuador que hacia los polos.

Latitud del lugar	Longitud del péndulo	Medida de un grado en el meridiano	Latitud del lugar	Longitud del péndulo	Medida de un grado en el meridiano
grados	*pies líneas*	*toesas*	*grados*	*pies líneas*	*toesas*
0	3·7,468	56637	6	3·8,461	57022
5	3·7,482	56642	7	3·8,494	57035
10	3·7,526	56659	8	3·8,528	57048
15	3·7,596	56687	9	3·8,561	57061
20	3·7,692	56724	50	3·8,594	57074
25	3·7,812	56769	55	3·8,756	57137
30	3·7,948	56823	60	3·8,907	57196
35	3·8,099	56882	65	3·?,044	57250
40	3·8,261	56945	70	3·9,162	57295
1	3·8,294	56958	75	3·9,258	57332
2	3·8,327	56971	80	3·9,329	57360
3	3·8,361	56984	85	3·9,372	57377
4	3·8,394	56997	90	3·9,387	57382
45	3·8,428	57010			

Pues bien, varios astrónomos, enviados a remotos países para realizar observaciones astronómicas, han observado que los relojes de péndulo se mueven, en efecto, más lentamente cerca del ecuador que en nuestros climas. M. *Richer* fue el primero en darse cuenta de ello, en agosto del año 1672, cuando se encontraba en la isla de *Cayenne* observando los tránsitos de las estrellas fijas sobre el meridiano y vio que su reloj marchaba más lento de lo debido con respecto al movimiento medio del Sol, a razón de 2^m28^s al día. Disponiendo un péndulo simple con vibración al segundo, medida con un excelente reloj, observó la longitud de dicho péndulo simple una vez por semana durante

: meses. Y cuando volvió a *Francia* y comparó la longitud de péndulo con la longitud del péndulo de *París* (que era de 3 de *París* y $8\frac{1}{5}$ líneas), vio que era $1\frac{1}{4}$ líneas más corto.

Después, nuestro amigo Mr. *Halley*, cuando llegó a la isla de *ta Helena*, aproximadamente en el año de 1677, observó que reloj de péndulo marchaba más lentamente allí que en *dres*. Aunque no marcó la diferencia, acortó la varilla de su j más de $\frac{1}{8}$ de pulgada, ó $1\frac{1}{2}$ líneas. Para poder hacerlo, como ongitud del tornillo de la parte inferior de la varilla no era ciente, insertó un anillo de madera entre la tuerca y la bola.

Después, en el año de 1682, M. *Varin* y M. *des Hayes* :rminaron que la longitud de un péndulo simple con vibra- ı al segundo era en el *Real Observatorio de París* 3 pies y $8\frac{5}{9}$ as. Utilizando el mismo método en la isla de *Gorée*, determi- on que la longitud de un péndulo isócrono es de 3 pies y $6\frac{5}{9}$ as, una diferencia de dos líneas con respecto al anterior. Y el mo año, trasladándose a las islas de *Guadalupe* y *Martinica*, :rminaron que la longitud de un péndulo isócrono en dichas s era de 3 pies y $6\frac{1}{2}$ líneas.

Más adelante, en el mes de julio de 1697, M. *Couplet*, hijo, ptó su reloj de péndulo en el *Real Observatorio de París* al vimiento medio del Sol, de forma que durante un tiempo siderable el reloj concordó con el movimiento del Sol. El mes noviembre del mismo año, al llegar a *Lisboa*, observó que su ɔj marchaba más lento, a razón de $2^m 13^s$ cada 24 horas. Y en rzo del año siguiente, encontrándose en *Paraiba*, observó que eloj marchaba más lento que en *París*, a razón de $4^m 12^s$ cada ıoras. Afirma que el péndulo con vibración al segundo era $2\frac{1}{2}$ as más corto en *Lisboa* y $3\frac{2}{3}$ líneas más corto en *Paraiba* que *París*. Hubiera estado más acertado fijando estas diferencias $1\frac{1}{3}$ y $2\frac{5}{6}$, pues estas últimas corresponden a las diferencias de npos de $2^m 13^s$ y $4^m 12^s$. Pero las observaciones de este allero son tan toscas que no podemos confiar en ellas.

En los años siguientes, 1699 y 1700, M. *des Hayes*, con sión de un nuevo viaje a *América*, determinó que en las islas *Cayenne* y *Granada* la longitud del péndulo con vibración al undo era muy poco menos que 3 pies y $6\frac{1}{2}$ líneas, que en la de *San Cristóbal* era de 3 pies y $6\frac{3}{4}$ líneas, y en la isla de ıto *Domingo* 3 pies y 7 líneas.

Y, en el año 1704, *Feuillé* determinó en *Puerto Bello*, en *érica*, que la longitud del péndulo con vibración al segundo 3 pies de *París* y sólo $5\frac{7}{12}$ líneas, es decir, casi tres líneas más

corta què en *París*. La observación, sin embargo, era defectuosa, pues después, trasladándose a la isla de *Martinica*, determinó que allí la longitud del péndulo isócrono era de 3 pies de *París* y $5\frac{10}{12}$ líneas.

Ahora bien, la latitud de *Paraiba* es 6° 38′ sur, la de *Puerto Bello*, 9° 33′ norte, y las latitudes de las islas de *Cayenne*, *Gorée*, *Guadalupe*, *Martinica*, *Granada*, *San Cristóbal*, y *Santo Domingo*, 4°55′, 14°40′, 15°00′, 14°44′, 12°06′, 17°19′ y 19°48′ norte, respectivamente. Y los excesos de la longitud del péndulo en *París* sobre las longitudes de los péndulos isócronos observados en dichas latitudes son un poco mayores que en la tabla de longitudes de péndulos antes calculada. En consecuencia, la Tierra es en el ecuador algo más alta que lo antes calculado, y un poco más densa en el centro que en minas cercanas a la superficie, aunque es posible que la temperatura de la zona tórrida haya extendido un poco la longitud de los péndulos.

En efecto, M. *Picard* ha observado que una varilla de hierro de un pie de longitud en el tiempo frío de la estación invernal se alargaba hasta un pie y $\frac{1}{4}$ de línea si se calentaba al fuego. Después, M. *de la Hire* observó que una varilla de hierro de 6 pies de longitud en la estación invernal se extendía hasta los 6 pies y $\frac{2}{3}$ de línea expuesta al sol del verano. En el primer caso, el calor era mayor que en el segundo, pero en el segundo era mayor que el calor de las partes exteriores del cuerpo humano, pues los metales expuestos al verano adquieren un considerable grado de calor. La varilla de un reloj de péndulo, sin embargo, jamás está expuesta al calor del sol de verano, ni llega nunca a adquirir una temperatura igual a la de las partes exteriores de un cuerpo humano. En consecuencia, aunque la varilla de 3 pies de un reloj de péndulo será, desde luego, un poco más larga en verano que en tiempo invernal, la diferencia difícilmente llegará a $\frac{1}{4}$ de línea. En consecuencia, la diferencia total de longitud de los péndulos isócronos en diferentes climas no puede atribuirse a la diferencia de calor, ni, desde luego, a los errores de los astrónomos *franceses*. En efecto, aunque no hay perfecto acuerdo entre sus observaciones, los errores son tan pequeños que pueden ser ignorados. Por lo demás, todos concuerdan en que los péndulos isócronos son más cortos en el ecuador que en el *Real Observatorio de París*, y que la diferencia no es inferior a $1\frac{1}{4}$ líneas, ni superior a $2\frac{2}{3}$ líneas. En las observaciones realizadas por M. *Richer* en la isla de *Cayenne*, la diferencia fue de $1\frac{1}{4}$ líneas. Esta diferencia, corregida por las observaciones de M. *des*

Hayes, se convierte en $1\frac{1}{2}$ líneas ó $1\frac{3}{4}$ líneas. Observaciones menos exactas realizadas por otros la fijaron en aproximadamente 2 líneas. Y este desacuerdo puede deberse en parte a los errores en las observaciones, en parte a la desemejanza de las partes internas de la Tierra y la altura de las montañas, y en parte a las diferentes temperaturas del aire.

En mi opinión, una varilla de hierro de 3 pies de longitud será en nuestra *Inglaterra* una sexta parte de líneas más corta en invierno que en verano. Teniendo en cuenta los grandes calores ecuatoriales, sustráigase esta cantidad a la diferencia de $1\frac{1}{4}$ líneas observada por M. *Richer* y quedarán $1\frac{1}{12}$ líneas, lo que concuerda muy bien con las $1\ \frac{87}{1000}$ líneas antes determinadas por la teoría. M. *Richer* repitió las observaciones realizadas en la isla de *Cayenne* una vez por semana durante un total de diez meses, y comparó las longitudes del péndulo allí anotadas en las varillas de hierro con las longitudes que observó en *Francia*. Los demás observadores no dieron muestra de tanta diligencia y cuidado. Si las observaciones de este caballero son de fiar, la Tierra es más alta en el ecuador que en los polos, por un exceso de unas 17 millas, como arriba mostró la teoría.

PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA XVII

Que los puntos equinocciales retroceden, y que el eje de la Tierra, por una nutación en cada revolución anual, vibra dos veces hacia la eclíptica y retorna las mismas veces a su anterior posición.

La Proposición se desprende del Corolario XX, Proposición LXVI, Libro I, pero tal movimiento de nutación debe ser muy pequeño y, en verdad, apenas perceptible.

PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA XVIII

Que todos los movimientos de la Luna y todas las desigualdades de dichos movimientos se siguen de los principios que hemos establecido.

De la Proposición LXV, Libro I, se desprende que los planetas mayores, mientras se desplazan en torno al Sol, pueden

al mismo tiempo trasladar otros planetas menores que giran en torno suyo, y que estos planetas menores tienen que moverse por elipses cuyos focos se encuentran en los centros de los mayores. Pero entonces sus movimientos serán perturbados en diversas formas por la acción del Sol, y sufrirán las desigualdades que observamos en nuestra Luna. En efecto, nuestra Luna (por los Corolarios II, III, IV y V, Proposición LXVI, Libro I) se mueve más deprisa y, mediante un radio trazado a la Tierra, describe un área mayor para el tiempo y tiene una órbita menos curva, acercándose, en consecuencia, más a la Tierra, en las sicigias que en las cuadraturas, excepto en la medida en que estos efectos sean perturbados por el movimiento de excentricidad, pues (por el Corolario IX, Proposición LXVI, Libro I) la excentricidad es mayor cuando la Luna está en las sicigias y menor cuando está en las cuadraturas, por lo que la Luna en perigeo es más veloz y se encuentra más cerca de nosotros, y en apogeo es más lenta y está más alejada, en las sicigias que en las cuadraturas. Por lo demás, el apogeo avanza y los nodos retroceden, y ello tiene lugar con movimiento desigual, no regular. Pues (por los Corolarios VII y VIII, Proposición LXVI, Libro I) el apogeo avanza más velozmente en sus sicigias y retrocede más lentamente en sus cuadraturas, avanzando anualmente por el exceso de su progreso sobre su regresión. Pero los nodos, por el contrario, están en reposo en sus sicigias y retroceden más deprisa en sus cuadraturas (por el Corolario X, Proposición LXVI, Libro I). Además, la latitud máxima de la Luna (por el Corolario X, Proposición LXVI, Libro I) es mayor en las cuadraturas de la Luna que en sus sicigias. Y (por el Corolario VI, Proposición LXVI, Libro I) el movimiento medio de la Luna es más lento en el perihelio de la Tierra que en su afelio. Estas son las principales desigualdades (de la Luna) observadas por los astrónomos.

Pero hay además otras desigualdades, no observadas hasta ahora por los astrónomos, que perturban tanto los movimientos de la Luna que hasta el momento no hemos podido someterlas a normas seguras. Pues las velocidades o movimientos horarios del apogeo y los nodos de la Luna, y sus ecuaciones, así como la diferencia entre la excentricidad máxima en las sicigias y la excentricidad mínima en las cuadraturas y esa desigualdad que llamamos variación aumentan y disminuyen en el curso del año (por el Corolario XIV, Proposición LXVI, Libro I) como el cubo del diámetro aparente del Sol. Y además (por los Corolarios I y

II, Lema X, y el Corolario XVI, Proposición LXVI, Libro I), la variación aumenta y disminuye aproximadamente como el cuadrado del tiempo entre las cuadraturas. Ahora bien, en los cálculos astronómicos, esta desigualdad es por lo común incorporada a la ecuación del centro lunar y combinada con ella.

PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA V

Derivar los movimientos desiguales de los satélites de Júpiter y Saturno de los movimientos de nuestra Luna.

De los movimientos de nuestra Luna deducimos los movimientos correspondientes de las lunas o satélites de Júpiter, a tenor del Corolario XVI, Proposición LXVI, Libro I, de la siguiente manera. El movimiento medio de los nodos del satélite exterior de Júpiter está al movimiento medio de los nodos de nuestra Luna en una proporción compuesta del cuadrado de la razón de los tiempos periódicos de la Tierra en torno al Sol a los tiempos periódicos de Júpiter en torno al Sol y la razón simple del tiempo periódico del satélite en torno a Júpiter al tiempo periódico de nuestra Luna en torno a la Tierra. En consecuencia, dichos nodos avanzan o retroceden 8° 24′ en el transcurso de cien años. Los movimientos medios de los nodos de los satélites interiores son al movimiento medio de los nodos del exterior como sus tiempos periódicos al tiempo periódico de éstos, por el mismo Corolario, y están, en consecuencia, dados. Y el movimiento hacia adelante del ápside de cada uno de los satélites es al movimiento de retroceso de sus nodos como el movimiento del apogeo de nuestra Luna al movimiento de sus nodos (por el mismo Corolario), por lo que está dado. Pero los movimientos de los ápsides así determinados deben disminuirse en una proporción de 5 a 9, o de aproximadamente 1 a 2, debido a una causa que no puedo aquí detenerme a explicar. Las ecuaciones máximas de los nodos y del ápside de cada uno de los satélites son a las ecuaciones máximas de los nodos y el apogeo de nuestra Luna, respectivamente, como los movimientos de los nodos y ápsides de los satélites, en el tiempo de una revolución de las primeras ecuaciones, a los movimientos de los nodos y apogeo de nuestra Luna en el tiempo de una revolución de las últimas ecuaciones. La variación de un satélite visto desde

Júpiter está a la variación de nuestra Luna en la misma proporción que los movimientos totales de sus nodos respectivos durante los tiempos en que el satélite y nuestra Luna (tras alejarse) giran (de nuevo) hacia el Sol, por el mismo Corolario. En consecuencia, la variación del satélite exterior no excede los 5^s12^{ter}.

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA XIX

Que el flujo y reflujo del mar obedecen a la acción del Sol y la Luna.

De los Corolarios XIX y XX, Proposición LXVI, Libro I, se desprende que las aguas del mar deben elevarse dos veces y bajar dos veces cada día, tanto lunar como solar, y que la altura máxima de las aguas en mar abierto y profundo debe seguir a la aproximación de estos astros al meridiano del lugar con un intervalo menor a las seis horas, como ocurre en todo el sector oriental de los mares *Atlántico* y *Etiópico* entre *Francia* y el *Cabo de Buena Esperanza*, y en las costas de *Chile* y *Perú* en el *Mar del Sur*, en cuyas riberas la pleamar cae aproximadamente en la segunda, tercera o cuarta hora, salvo allí donde el movimiento propagado desde el océano profundo es retardado hasta la quinta, sexta o séptima hora, o incluso hasta más tarde, por la poca profundidad de los canales por los que llega a ciertos lugares. Calculo las horas desde la aproximación de cada astro al meridiano del lugar, tanto bajo el horizonte como sobre él, y llamo horas del día lunar a las 24avas partes del tiempo que la Luna, por su movimiento diurno aparente, emplea en llegar de nuevo al meridiano del lugar que abandonó el día anterior. La fuerza del Sol o la Luna para elevar el mar alcanza su grado máximo con la aproximación del astro al meridiano del lugar, pero la fuerza imprimida al mar en ese tiempo continúa un poco tras la impresión y es después incrementada por una fuerza nueva, aunque menor, que sigue obrando sobre él. Esto hace que el mar suba más y más, hasta llegar a su altura máxima cuando esta fuerza nueva es ya demasiado débil para levantarlo. Y esto puede ocurrir, quizá, en una o dos horas, pero más frecuentemente, cerca de la costa, en unas tres horas, o aún más cuando el mar es poco profundo.

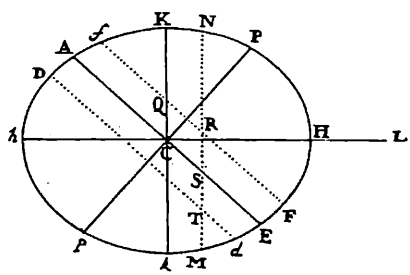
Los dos astros excitan dos movimientos que no se distinguen claramente, pero que dan lugar entre ellos a un movimiento mixto compuesto en base a ambos. En la conjunción u oposición de los astros, sus fuerzas se unirán y provocarán la mayor pleamar y bajamar. En las cuadraturas, el Sol elevará las aguas que la Luna deprime y deprimirá las aguas que la Luna eleva, y la diferencia de sus fuerzas dará lugar a la marea mínima. Y dado que (como la experiencia nos demuestra) la fuerza de la Luna es mayor que la del Sol, la altura máxima de las aguas ocurrirá aproximadamente en la tercera hora lunar. En base a las sicigias y las cuadraturas, la marea máxima, que por la sola fuerza de la Luna debería caer en la tercera hora lunar y por la sola fuerza del Sol en la tercera hora solar, por la combinación de las fuerzas de ambos caerá necesariamente en una hora intermedia, más cerca de la tercera hora de la Luna que de la del Sol. En consecuencia, cuando la Luna está pasando de las sicigias a las cuadraturas, durante lo cual la tercera hora del Sol precede a la tercera hora de la Luna, la altura máxima de las aguas precederá también a la tercera hora de la Luna, y ello, con el intervalo máximo, poco después de los octantes de la Luna. Y la marea máxima, con iguales intervalos, vendrá después de la tercera hora lunar, mientras la Luna pasa de las cuadraturas a las sicigias. Así ocurre en mar abierto, pues en las desembocaduras de los ríos las mareas máximas alcanzan más tarde su altura.

Pero los efectos de los astros dependen de sus distancias a la Tierra, pues cuando se encuentran a menor distancia sus efectos son mayores y cuando están a mayor distancia sus efectos son menores, y ello como el cubo de su diámetro aparente. Por ello, el Sol, en tiempo de invierno, cuando está en su perigeo, tiene mayor efecto, y provoca mareas algo mayores en las sicigias y algo menores en las cuadraturas que en la estación de verano. Y todos los meses, la Luna, cuando está en el perigeo, provoca mayores mareas que quince días antes o después, cuando está en su apogeo. A ello se debe que las mareas máximas no se suceden en dos sicigias inmediatamente sucesivas.

El efecto de ambos astros depende también de su declinación o distancia al ecuador, pues si el astro estuviera situado en el polo, atraería constantemente a todas las partes de las aguas sin intensificación ni remisión alguna de su acción, por lo que no podría provocar reciprocación de movimientos. En consecuencia, los astros a medida que declinan del ecuador hacia cualquiera de los polos, van perdiendo fuerza gradualmente, debido a lo

cual excitan mareas menores en las sicigias solsticiales que en las equinocciales. En las cuadraturas solsticiales, sin embargo, provocan mareas mayores que en las cuadraturas equinocciales, pues la fuerza de la Luna, situada entonces en el ecuador, supera más que nunca a la fuerza del Sol. En consecuencia, las mareas más altas tienen lugar en las sicigias próximas a ambos equinoccios, y las más bajas en las cuadraturas también próximas a ellos, y la más alta en las sicigias es siempre seguida por la más baja en las cuadraturas, como demuestra la experiencia. Sin embargo, como el Sol dista menos de la Tierra en invierno que en verano, ocurre que las mareas más altas y más bajas son más frecuentes antes que después del equinoccio vernal, y más frecuentes después que antes del equinoccio otoñal.

Además, los efectos de los astros dependen de las latitudes de los lugares. Representen A*p*EP la Tierra, cubierta de aguas profundas, C su centro, P y *p* sus polos, AE el ecuador, F cualquier lugar fuera del ecuador, F*f* el paralelo del lugar, D*d* el paralelo correspondiente al otro lado del ecuador, L el lugar de la Luna tres horas antes, H el lugar de la Tierra que está precisamente debajo, *h* el lugar opuesto, K, *k* los lugares a 90 grados de distancia, CH, C*h* las alturas máximas del mar desde el centro de la Tierra, CK, C*k*, sus alturas mínimas, y si con ejes H*h*, K*k*, se describe una elipse y con la revolución de dicha elipse en torno a su eje más largo H*h* se forma un esferoide HPK*hpk*, el esferoide representará aproximadamente la figura del mar, y CF, C*f*, CD, C*d*, representarán las alturas del mar en los lugares F*f*, D*d*. Además, en la mencionada revolución de la elipse, cualquier punto N describe el círculo NM cortando los paralelos F*f*, D*d* en cualesquiera lugares R, T, y el ecuador AE en S; CN representará la altura del mar en todos los lugares R, S, T, situados en dicho círculo. En consecuencia, en la revolución diaria de cualquier lugar F, la pleamar más alta estará en F a la tercera hora tras el apulso de la Luna con el meridiano sobre el horizonte, y después la bajamar más baja en Q a la tercera hora tras la puesta de la Luna, y después la pleamar más alta en *f* a la tercera hora tras el apulso de la Luna con el meridiano bajo el



horizonte, y, finalmente, la bajamar más baja en Q a la tercera hora tras el nacimiento de la Luna, y la última pleamar en *f* será menor que la anterior pleamar en F. Pues el mar en su totalidad se divide en dos pleamares hemisféricas, una en el hemisferio KH*k*, en el lado norte, y la otra en el hemisferio opuesto K*hk*. Podemos, en consecuencia, llamarlas pleamar septentrional y pleamar meridional. Estas pleamares, siempre opuestas, llegan sucesivamente a los meridianos de todos los lugares tras un intervalo de doce horas lunares. Y como los países septentrionales participan más de la pleamar septentrional y los países meridionales más de la pleamar meridional, en todos los lugares fuera del ecuador donde nacen y se ponen los astros surgen mareas alternativamente mayores y menores. Pero la marea más alta ocurrirá cuando la Luna decline hacia el vértice del lugar, unas tres horas después del apulso de la Luna con el meridiano sobre el horizonte.

Y cuando la Luna cambie su declinación *al otro lado del ecuador*, la marea más alta se convertirá en una más baja. Y la mayor diferencia de las pleamares tendrá lugar aproximadamente con ocasión de los solsticios, especialmente si el nodo ascendente de la Luna se aproxima al primero de Aries. Así, la experiencia demuestra que las mareas matutinas del invierno son mayores que las vespertinas, y que las mareas vespertinas del verano son mayores que las matutinas, en *Plymouth* por un pie de altura, pero en *Bristol* por una altura de quince pulgadas, según las observaciones de *Colepress* y *Sturmy*.

Pero los movimientos que hemos estado describiendo sufren alguna alteración, debida a la fuerza de reciprocación que las aguas, una vez en movimiento, retienen un corto tiempo *por su inercia*. A ello se debe que las mareas prosigan algún tiempo, aunque la acción de los astros haya cesado. Este poder de retención del movimiento imprimido reduce la diferencia de las mareas alternas y hace que las que siguen inmediatamente a las sicigias sean mayores y las que siguen a las cuadraturas menores. A ello se debe que las mareas alternas en *Plymouth* y *Bristol* no presenten entre sí más diferencia que un pie o quince pulgadas, así como que las mareas máximas en dichos puertos no sean las primeras, sino las terceras, tras las sicigias. Por otro lado, todos los movimientos son retardados al pasar por canales de poca profundidad, de forma que en algunos estrechos y desembocaduras de ríos las mareas máximas son las cuartas o incluso las quintas tras las sicigias.

Puede además suceder que la marea se propague desde el océano a través de diferentes canales hacia un mismo puesto, pasando con más rapidez por unos canales que por otros, en cuyo caso, una misma marea, dividida en dos o más sucesivas, puede combinar nuevos movimientos de índole diferente. Supongamos que dos mareas iguales fluyen hacia el mismo puerto desde diferentes lugares, una seis horas antes que la otra, y supongamos que la primera ocurre tres horas después de la aproximación de la Luna al meridiano del puerto. Si la Luna estuviera en el ecuador en el tiempo de aproximación al meridiano, habría pleamares iguales alternativamente cada seis horas, y estas pleamares, tropezando con otras tantas bajamares iguales, se equilibrarían con ellas de tal forma que ese día el agua estaría estancada y quieta. Si la Luna declinase entonces del ecuador, las mareas serían alternativamente mayores y menores en el océano, como ya se ha dicho, por lo que dos mareas altas y dos bajas se propagarían alternativamente hacia el puerto. Pero las dos mareas altas harían que la altura máxima de las aguas cayera en un tiempo intermedio entre ellas, y las mareas altas y bajas harían que las aguas se elevasen hasta una altura media en un tiempo intermedio entre ellas, y en el tiempo intermedio entre las dos mareas bajas las aguas alcanzarían su menor altura. De esta forma, en el transcurso de veinticinco horas, las aguas no alcanzarían dos veces su mayor altura y dos veces su menor altura, como ocurre habitualmente, sino sólo una vez. Su mayor altura, si la Luna declinara hacia el polo elevado, ocurriría seis o treinta horas después de la aproximación de la Luna al meridiano, y cuando la Luna cambiara su declinación, la pleamar se convertiría en bajamar. El doctor *Halley* nos ha dado un ejemplo de ello en base a las observaciones de los marineros del puerto de *Batshaw*, en el reino de *Tonkín*, latitud 20° 50′ Norte. En dicho puerto, las aguas se estancan el día siguiente al paso de la Luna sobre el ecuador. Cuando la Luna declina al Norte, la marea empieza a subir y bajar, no dos veces, como en otros puertos, sino sólo una vez al día. La pleamar ocurre cuando se pone la Luna y la mayor bajamar cuando sale. La marea aumenta con la declinación de la Luna hasta el séptimo u octavo día, y durante los siete u ocho días siguientes decrece con la misma cadencia que aumentó, cesando cuando la Luna cambia su declinación y cruza el ecuador hacia el Sur. Inmediatamente después, la pleamar se transforma en bajamar, y a partir de entonces la bajamar ocurre

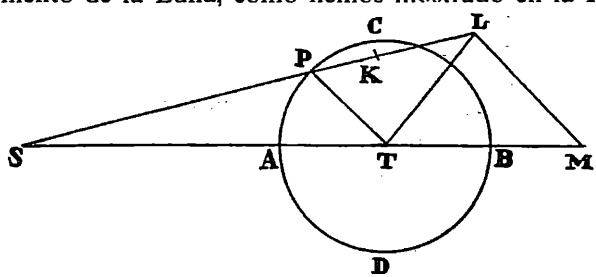
al ponerse la Luna y la pleamar cuando nace, hasta que la Luna, pasando de nuevo el ecuador, cambia su declinación. Este puerto y los canales vecinos tienen dos entradas, una de los mares de *China*, entre el continente y la isla de *Leuconia*, y la otra del mar *Indico*, entre el continente y la isla de *Borneo*. Pero prefiero que las observaciones en las costas vecinas determinen si hay realmente dos mareas propagadas por los mencionados canales, una desde el mar *Indico* en el espacio de doce horas y una desde el mar de *China* en el espacio de seis horas, que, ocurriendo, en consecuencia, en la tercera y novena hora lunar, producen, combinándose, los mencionados movimientos, o si concurren cualesquiera otras circunstancias en el estado de aquellos mares.

De esta forma he explicado las causas de los movimientos de la Luna y el mar. Conviene ahora añadir algo sobre la cantidad de dichos movimientos.

PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA VI

Determinar las fuerzas con que el Sol perturba los movimientos de la Luna.

Represente S el Sol, T la Tierra, P la Luna, CADB la órbita de la Luna. Tómese SK en SP igual a ST, sea SL a SK como el cuadrado de SK a SP, trácese LM paralela a PT, y en el supuesto de que ST o SK representen la fuerza acelerada de la gravedad de la Tierra hacia el Sol, SL representará la fuerza acelerativa de la gravedad de la Luna hacia el Sol. Pero esa fuerza está compuesta por las partes SM y LM, de las que la fuerza LM y la parte de SM representada por TM perturban el movimiento de la Luna, como hemos mostrado en la Proposi-



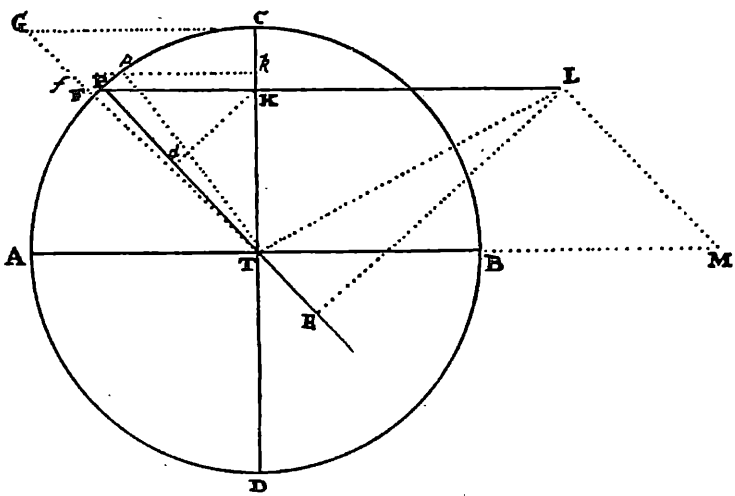
ción LXVI, Libro I, y sus Corolarios. Puesto que la Tierra y la Luna giran en torno a su centro común de gravedad, el movimiento de la Tierra en torno a dicho centro será también perturbado por las mismas fuerzas, pero podemos considerar las sumas de las fuerzas de los movimientos como en la Luna y representar la suma de las fuerzas mediante las líneas TM y ML, que son análogas a ambas. La fuerza ML (en su cantidad media) es a la fuerza centrípeta con que la Luna puede ser retenida en su órbita girando en torno a la Tierra en reposo a la distancia PT como el cuadrado de la razón del tiempo periódico de la Luna en torno a la Tierra al tiempo periódico de la Tierra en torno al Sol (por el Corolario XVII, Proposición LXVI, Libro I), es decir, como el cuadrado de $27^d7^h43^m$ a $365^d6^h9^m$, o como 1000 a 178725, o como 1 a $178\frac{29}{40}$. Pero en la Proposición IV de este Libro vimos que si tanto la Tierra como la Luna giran en torno a su centro común de gravedad, la distancia media de una a la otra será aproximadamente $60\frac{1}{2}$ semidiámetros medios de la Tierra, y la fuerza con que la Luna puede ser mantenida girando en su órbita en torno a la Tierra en reposo a la distancia de $60\frac{1}{2}$ semidiámetros de la Tierra es a la fuerza por la que puede girar en el mismo tiempo a la distancia de 60 semidiámetros como $60\frac{1}{2}$ es a 60, y esta fuerza es a la fuerza de la gravedad entre nosotros como 1 a 60×60, muy aproximadamente. En consecuencia, la fuerza media ML es a la fuerza de la gravedad en la superficie de nuestra Tierra como $1 \times 60\frac{1}{2}$ a $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, o como 1 a 638092,6. Por tanto, la fuerza TM está dada por la proporción de las líneas TM, ML. Y éstas son las fuerzas con que el Sol perturba los movimientos de la Luna. Q.E.I.

PROPOSICIÓN XXVI. PROBLEMA VII

Determinar el incremento horario del área que la Luna, mediante un radio descrito hasta la Tierra, describe en una órbita circular.

Más arriba hemos mostrado que el área que describe la Luna mediante un radio trazado hasta la Tierra es proporcional al tiempo de descripción, excepto en la medida en que el movimiento de la Luna es perturbado por la acción del Sol. Aquí nos proponemos investigar la desigualdad del momento o incremento horario *del área o movimiento de tal forma perturba-*

do. Para facilitar el cálculo, supondremos que la órbita de la Luna es circular e ignoraremos todas las desigualdades excepto la que ahora estamos considerando. Además, debido a la inmensa distancia al Sol, supondremos también que las líneas SP y ST son paralelas. De esta forma, la fuerza LM será siempre reducida a su cantidad media TP, y la fuerza TM a su cantidad media 3PK.



Estas fuerzas (por el Corolario II de las Leyes del Movimiento) componen la fuerza TL, y esta fuerza, abatiendo la perpendicular LE sobre el radio TP, se resuelve en las fuerzas TE, EL, de las que la fuerza TE, actuando constantemente en la dirección del radio TP, ni acelera ni retarda la descripción del área TPC por parte de dicho radio TP. EL, sin embargo, al actuar *sobre el radio* TP en dirección perpendicular, acelera o retarda *la descripción del área* en la proporción en que acelera o retarda la Luna. Esa aceleración de la Luna, al pasar de la cuadratura C a la conjunción A, es en todo momento de tiempo como la fuerza acelerativa *generadora* EL, es decir, como $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Represéntese el tiempo por el movimiento medio de la Luna, o (lo que viene a ser lo mismo) por el ángulo CTP, o incluso por el arco CP. Levántese CG en ángulo recto sobre CT e igual a CT, y si se divide el arco del cuadrante AC en un número infinito de partes iguales P*p*, etc., estas *partes* podrán representar el número

igualmente *infinito* de las partes iguales de tiempo. Abátase *pk* perpendicularmente sobre CT y trácese TG de forma que encuentre a KP y *kp* prolongadas en F y *f*; entonces FK será igual a TK, y K*k* será a PK como P*p* es a T*p*, es decir, estarán en una proporción dada. En consecuencia, FK × K*k*, o el área FK*kf*, será como $\frac{3PK \times TK}{TP}$, es decir, como EL, y, por combinación, toda el área GCKF variará como la suma de todas las fuerzas EL impresas sobre la Luna en el tiempo total CP y, en consecuencia, también como la velocidad generada por dicha suma, es decir, como la aceleración de la descripción del área CTP, o como el incremento del momento *de la misma*. La fuerza por la que la Luna puede ser retenida girando en torno a la Tierra en reposo a la distancia TP en su tiempo periódico CADB de $27^d 7^h 43^m$ haría que un cuerpo cayendo en el tiempo CT describiera la longitud $\frac{1}{2}$CT, adquiriendo al mismo tiempo una velocidad igual a aquella con la que la Luna se mueve por su órbita. Esto se desprende del Corolario IX, Proposición IV, Libro I. Pero puesto que K*d*, trazado perpendicularmente sobre TP, no es *más* que una tercera parte de EL y es *igual* a la mitad de TP o ML en los octantes, la fuerza EL en los octantes, donde es máxima, superará a la fuerza ML en una razón de 3 a 2, por lo que será a la fuerza por la que la Luna puede ser retenida girando en torno a la Tierra en reposo en su tiempo periódico como 100 es a $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$, ó 11915, y generará en el tiempo CT una velocidad igual a $\frac{100}{11915}$ partes de la velocidad de la Luna, pero en el tiempo CPA una velocidad mayor, en la proporción de CA a CT o TP. Represéntese la fuerza máxima EL en los octantes mediante el área FK × K*k*, o mediante el rectángulo $\frac{1}{2}$TP × P*p*, que es igual a aquélla, y la velocidad que esa fuerza máxima puede generar en cualquier tiempo CP será a la velocidad que cualquier otra fuerza menor EL puede generar en el mismo tiempo como el rectángulo $\frac{1}{2}$TP × CP al área KCGF. Sin embargo, las velocidades generadas en el tiempo total CPA serán entre sí como el rectángulo $\frac{1}{2}$TP × CA es al triángulo TCG, o como el arco del cuadrante CA es al radio TP, por lo que la última velocidad generada en el tiempo total será como $\frac{100}{11915}$ partes de la velocidad de la Luna. A esta velocidad de la Luna, que es proporcional al momento medio del área (suponiendo que este momento medio es representado por el número 11915), añadimos y sustraemos la mitad de la otra velocidad; la suma

11915+50, ó 11965, representará el momento máximo del área en la sicigia A, y la diferencia 11915−50, ó 11865, el momento mínimo de la misma en las cuadraturas. En consecuencia, las áreas que se describen en tiempos iguales en las sicigias y las cuadraturas son entre sí como 11965 a 11865. Y si al momento mínimo 11865 añadimos un momento que sea a 100, diferencia entre los dos momentos citados, como el trapecio FKCG es al triángulo TCG, o, lo que viene a ser lo mismo, como el cuadrado del seno PK es al cuadrado del radio TP (es decir, como P*d* a TP), la suma representará el momento del área cuando la Luna se encuentra en cualquier lugar intermedio P.

Pero esto sólo ocurre en la hipótesis según la cual el Sol y la Tierra están en reposo y la revolución sinódica de la Luna se completa en $27^d7^h43^m$. Pero como el período sinódico real de la Luna es en realidad $29^d12^h44^m$, los incrementos de los momentos deben ampliarse en la misma proporción que el tiempo, es decir, en la proporción de 1080853 a 1000000. De esta forma, el incremento total, que era de $\frac{100}{11915}$ partes del movimiento medio, se convertirá ahora en $\frac{100}{11023}$ partes del mismo, por lo que el momento del área en la cuadratura de la Luna será al momento del área en la sicigia como 11023−50 a 11023+50, ó como 10973 a 11073, y al momento del área cuando la Luna se encuentra en cualquier lugar intermedio P como 10973 a 10973 +P*d*, suponiendo TP=100.

En consecuencia, el área que la Luna describe en las diversas pequeñas partes iguales de tiempo mediante un radio trazado hasta la Tierra es aproximadamente como la suma del número 219,46 y el seno verso del doble de la distancia de la Luna a la cuadratura más cercana, considerada en un círculo que tenga la unidad como radio. Así ocurre cuando la variación en los octantes está en su cantidad media, pero si la variación en ellos es mayor o menor, el seno verso citado debe aumentarse o disminuirse en la misma proporción.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA VIII

Determinar la distancia de la Luna a la Tierra a partir del movimiento horario de la Luna.

El área que describe la Luna en cada momento de tiempo mediante un radio trazado hasta la Tierra es como el movimien-

to horario de la Luna y el cuadrado de la distancia de la Luna a la Tierra juntamente. En consecuencia, la distancia de la Luna a la Tierra varía directamente como la raíz cuadrada del área e inversamente como la raíz cuadrada del movimiento horario, tomadas juntamente. Q.E.I.

COROLARIO I. Por tanto, el diámetro aparente de la Luna está dado, pues es inversamente proporcional a la distancia de la Luna a la Tierra. En manos de los astrónomos está el probar con qué precisión concuerda esta regla con los fenómenos.

COROLARIO II. Por tanto, la órbita de la Luna puede definirse en base a los fenómenos con más exactitud que la que hasta ahora era posible.

PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA IX

Determinar los diámetros de la órbita por la que se movería la Luna sin excentricidad.

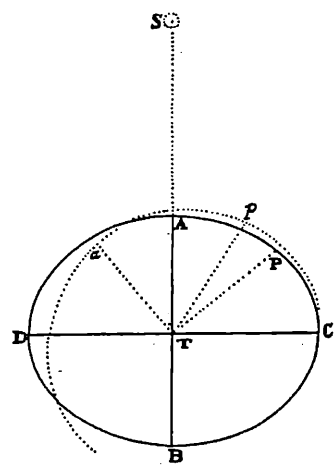
La curvatura de la órbita que describe un cuerpo cuando es atraído por líneas perpendiculares a la órbita es directamente proporcional a la fuerza de la atracción e inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad. Estimo las curvaturas de líneas comparadas unas con otras según la razón evanescente de los senos o tangentes de sus ángulos de contactos a radios iguales, suponiendo estos radios disminuidos al infinito. Ahora bien, la atracción de la Luna hacia la Tierra en las sicigias es el exceso de su gravedad hacia la Tierra sobre la fuerza del Sol 2PK (véase figura, Proposición XXV), fuerza por la que la gravedad acelerativa de la Luna hacia el Sol supera a la gravedad acelerativa de la Tierra hacia el Sol o es superada por ella. Pero en las cuadraturas esa atracción es la suma de la gravedad de la Luna hacia la Tierra y la fuerza del Sol KT por la que la Luna es atraída hacia la Tierra. Y estas atracciones, poniendo N por $\frac{AT+CT}{2}$, son aproximadamente como

$$\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N} \text{ y } \frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N},$$

o como $178725N \times CT^2 - 2000AT^2 \times CT$, y $178725N \times AT^2 + 1000CT^2 \times AT$. Pues si la gravedad acelerativa de la Luna

hacia la Tierra es representada por el número 178725, la fuerza media ML, que en las cuadraturas es PT o TK e impulsa a la Luna hacia la Tierra, será 1000, y la fuerza media TM en las sicigias será 3000, por lo que, sustrayendo la fuerza media ML, quedará 2000, fuerza por la que la Luna es separada de la Tierra en las sicigias y que antes llamamos 2PK. Pero la velocidad de la Luna en las sicigias A y B es a su velocidad en las cuadraturas C y D como CT es a AT y como el momento del área que la Luna describe en las sicigias mediante un radio trazado hasta la Tierra es al momento de dicha área *descrita* en las cuadraturas, juntamente, es decir, como 11073CT es a 10973AT. Tómense inversamente el cuadrado de esta razón y directamente la razón anterior, y la curvatura de la órbita de la Luna en las sicigias será a la curvatura de la misma en las cuadraturas como $120406729 \times 178725AT^2 \times CT^2 \times N - 120406729 \times 2000AT^4 \times CT$ es a $122611329 \times 178725AT^2 \times CT^2 \times N + 122611329 \times 1000CT^4 \times AT$, es decir, como $2151969AT \times CT \times N - 24081AT^3$ es a $2191371AT \times CT \times N + 12261CT^3$.

Puesto que la figura de la órbita de la Luna no se conoce, asumamos en vez de ella la elipse DBCA, en cuyo centro supondremos está situada la Tierra, cuyo eje mayor DC se encuentra entre las cuadraturas y su eje menor AB entre las sicigias. Pero dado que el plano de esta elipse gira en torno a la Tierra con un movimiento angular, y dado que la órbita cuya curvatura estudiamos ahora debe describirse en un plano privado de dicho movimiento, tenemos que considerar la figura que la Luna describe en este plano mientras gira por aquella elipse, es decir, la figura *Cpa*, cuyos diversos puntos *p* se determinan tomando cualquier punto P en la elipse que represente el lugar de la Luna y trazando T*p* igual a TP de forma que el ángulo PT*p* sea igual al movimiento aparente del Sol desde la última cuadratura en C, o (lo que viene a ser lo mismo) de forma que el ángulo CT*p* sea al ángulo CTP como el tiempo de la revolución sinódica de la Luna al tiempo de la



revolución periódica de la misma, o como $29^d12^h44^m$ a $27^d7^h43^m$. En consecuencia, si llevamos el ángulo CT*a* en esta proporción al ángulo recto CTA y damos a T*a* la misma longitud que TA, tendremos *a*, ápside inferior, y C, ápside superior de esta órbita C*pa*. Pero mediante cálculos observo que la diferencia entre la curvatura de esta órbita C*pa* en el vértice *a* y la curvatura de un círculo descrito en torno al centro T con el intervalo TA es a la diferencia entre la curvatura de la elipse en el vértice A y la curvatura del mismo círculo como el cuadrado de la razón del ángulo CTP al ángulo CT*p*; y que la curvatura de la elipse en A es a la curvatura de dicho círculo como el cuadrado de la razón de TA a TC, y la curvatura de dicho círculo es a la curvatura de un círculo descrito en torno al centro T mediante radio TC como TC es a TA, pero que la curvatura de este *último arco* es a la curvatura de la elipse en C como el cuadrado de la razón de TA a TC, y que la diferencia entre la curvatura de la elipse en el vértice C y la curvatura de este último círculo es a la diferencia entre la curvatura de la figura C*pa* en el vértice C y la curvatura de este mismo *último* círculo como el cuadrado de la razón del ángulo CT*p* al ángulo CTP. Todas estas relaciones se derivan fácilmente de los senos de los ángulos de contacto y de las diferencias de estos ángulos. Pero, comparando esas razones, vemos que la curvatura de la figura C*pa* en *a* es a su curvatura en C como $AT^3 - \frac{16824}{100000}CT^2 \times AT$ es a $CT^3 + \frac{16824}{100000}AT^2 \times CT$, donde el número $\frac{16824}{100000}$ representa la diferencia de los cuadrados de los ángulos CTP y CT*p* dividida por el cuadrado del ángulo menor CTP, o (lo que es la misma cosa) la diferencia de los cuadrados de los tiempos $27^d7^h43^m$ y $29^d12^h44^m$ dividida por el cuadrado del tiempo $27^d7^h43^m$.

En consecuencia, puesto que *a* representa la sicigia de la Luna y C su cuadratura, la razón ahora determinada tendrá que ser la misma que la razón de la curvatura del orbe de la Luna en las sicigias a la curvatura de la misma en las cuadraturas, arriba determinada. En consecuencia, para encontrar la razón de CT a AT, multipliquemos los extremos y los medios de la proporción resultante, y los términos que resultarán, divididos por $AT \times CT$, darán la siguiente ecuación: $2062{,}79CT^4 - 2151969N \times CT^3 + 368676N \times AT \times CT^2 + 36342AT^2 \times CT^2 - 362047N \times AT^2 \times CT + 2191371N \times AT^3 + 4051{,}4AT^4 = 0$. Entonces, si por la media suma N de los términos AT y CT ponemos 1, y *x* por su media diferencia, CT será $= 1 + x$. y $AT = 1 - x$. Y, sustituyendo esos valores en la ecuación, tras resolverla, tendremos que

$x = 0{,}00719$, de donde el semidiámetro CT = 1,00719 y el semidiámetro AT = 0,99281, números que son aproximadamente como $70\frac{1}{24}$ y $69\frac{1}{24}$. En consecuencia, la distancia de la Luna a la Tierra en las sicigias es a su distancia en las cuadraturas (dejando aparte la consideración de la excentricidad) como $69\frac{1}{24}$ a $70\frac{1}{24}$, o, en números redondos, como 69 a 70.

PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA X

Determinar la variación de la Luna.

Esta desigualdad se debe en parte a la figura elíptica de la órbita de la Luna y en parte a la desigualdad de los momentos del área que la Luna describe mediante un radio trazado hasta la Tierra. Si la Luna P girase por la elipse DBCA en torno a la Tierra en reposo en el centro de la elipse y, mediante un radio TP trazado hasta la Tierra, describiera el área CTP, proporcional al tiempo de *descripción*, y el semidiámetro máximo CT de la elipse fuera al mínimo TA como 70 a 69, la tangente al ángulo CTP sería a la tangente al ángulo del movimiento medio, calculada desde la cuadratura C, como el semidiámetro TA de la elipse a su semidiámetro TC, o como 69 a 70. Pero la descripción del área CTP debe acelerarse mientras la Luna avanza desde la cuadratura a la sicigia de forma que el momento del área en la sicigia de la Luna pueda ser al momento de la misma en su cuadratura como 11073 a 10973, y de forma que el exceso del momento en cualquier lugar intermedio P sobre el momento en la cuadratura pueda ser como el cuadrado del seno del ángulo CTP, lo que puede conseguirse con suficiente exactitud disminuyendo la tangente del ángulo CTP en la razón obtenida de la raíz cuadrada de la razón del número 10973 al número 11073, es decir, en la razón del número 68,6877 al número 69. De esta manera, la tangente al ángulo CTP será ahora a la tangente al movimiento medio como 68,6877 es a 70, y el ángulo CTP en los octantes, donde el movimiento medio es 45°, resultará ser 44°27'28", que, sustraído a 45°, ángulo del movimiento medio, deja la variación máxima en 32'32". Así ocurriría si la Luna, al pasar de la cuadratura a la sicigia, describiese un ángulo CTA de sólo 90°. Pero debido al movimiento de la Tierra, por el que el Sol avanza en apariencia, la Luna, antes de

sobrepasar al Sol, describe un ángulo CT*a*, mayor que un ángulo recto, en la razón del tiempo de la revolución sinódica de la Luna al tiempo de su revolución periódica, es decir, en la razón de $29^d12^h44^m$ a $27^d7^h43^m$. Debido a ello, todos los ángulos en torno al centro T se dilatan en la misma razón, y la variación máxima, que de otra forma *no* sería *más que* 32'32", al aumentarse ahora en la referida proporción, deviene 35'10".

Esta es, pues, su magnitud a la distancia media del Sol a la Tierra, ignorando las diferencias que puedan surgir de la curvatura de la gran órbita y el hecho de que la acción del Sol sobre la Luna es más fuerte cuando ésta está nueva o con cuernos que cuando está gibosa o llena. A otras distancias del Sol a la Tierra, la variación máxima está en razón compuesta directamente del cuadrado de la razón del tiempo de la revolución sinódica de la Luna (dado el tiempo del año) e inversamente del cubo de la razón de la distancia del Sol a la Tierra. En consecuencia, la variación máxima es de 33'14" en el apogeo del Sol y de 37'11" en su perigeo, si la excentricidad del Sol es al semidiámetro transversal de la gran órbita como $16\frac{15}{16}$ a 1000.

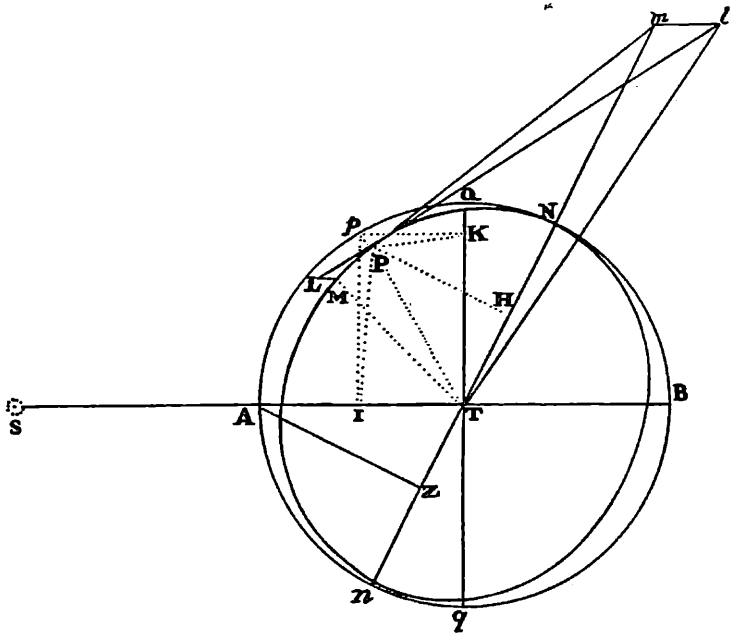
Hasta el momento hemos estudiado la variación en una órbita no excéntrica donde, en consecuencia, la Luna está siempre en sus octantes a su distancia media de la Tierra. Si la Luna, por razón de su excentricidad, se encuentra más lejos o más cerca de la Tierra que si estuviera situada en dicha órbita, la variación puede ser algo mayor o algo menor que lo expuesto. Pero dejo en manos de los astrónomos el determinar, en base a los fenómenos, dicho exceso o defecto.

PROPOSICIÓN XXX. PROBLEMA XI

Determinar el movimiento horario de los nodos de la Luna en una órbita circular.

Representen S el Sol, T la Tierra, P la Luna, NP*n* la órbita de la Luna, N*pn* la proyección ortográfica de la órbita sobre el plano de la eclíptica, N y *n* los nodos, *n*TN*m* la línea de los nodos prolongada indefinidamente, PI y PK perpendiculares sobre las líneas ST, Q*q*, P*p* una perpendicular sobre el plano de la eclíptica, A y B las sicigias de la Luna en el plano de la

eclíptica, AZ una perpendicular abatida sobre N*n*, línea de los nodos, Q y *q* las cuadraturas de la Luna en el plano de la eclíptica y *p*K una perpendicular a la línea Q*q* situada entre las cuadraturas. La fuerza del Sol para perturbar el movimiento de la Luna (por la Proposición XXV) es doble, por un lado



proporcional a la línea LM y por otro a la línea MT, en el esquema de dicha Proposición, y la Luna es atraída, por la primera fuerza hacia la Tierra y por la segunda hacia el Sol, en dirección paralela a la línea recta ST que une la Tierra y el Sol. La primera fuerza LM actúa en la dirección del plano de la órbita de la Luna, por lo que no cambia en absoluto la situación de la misma y puede ser ignorada. La segunda fuerza MT, que perturba el plano de la órbita de la Luna, es la misma que la fuerza 3PK ó 3IT. Y esta fuerza (por la Proposición XXV) es a la fuerza por la que la Luna puede girar uniformemente en círculo en torno a la Tierra en reposo en sus tiempos periódicos como 3IT al radio del círculo multiplicado por el número 178,725, o como IT al radio del círculo multiplicado por 59,575. Ahora bien, en el presente cálculo y en todo lo que sigue

considero que todas las líneas trazadas de la Luna al Sol son paralelas a la línea que une la Tierra al Sol, porque la inclinación que existe disminuye todos los efectos en algunos casos tanto como los aumenta en otros, y lo que ahora estudiamos son los movimientos medios de los nodos, por lo que ignoraremos estas pequeñeces sin importancia que sólo servirían para complicar los cálculos.

Supóngase ahora que PM representa un arco descrito por la Luna en el momento mínimo de tiempo, y ML una línea breve cuya mitad describiría la Luna en el mismo tiempo por el impulso de la mencionada fuerza 3IT. Unanse PL y MP, prolónguense hasta *m* y *l*, donde cortan el plano de la eclíptica, y abátase la perpendicular PH sobre T*m*. Entonces, puesto que la línea recta ML es paralela al plano de la eclíptica, por lo que jamás podrá unirse con la línea recta *ml* situada en dicho plano, ambas líneas rectas, que, por otra parte, están situadas en un plano común LMP*ml*, serán paralelas, por lo que los triángulos LMP y *lm*P serán semejantes. Como MP*m* está situada en el plano de la órbita por donde se movía la Luna en el lugar P, el punto *m* caerá sobre la línea N*n*, que pasa por los nodos N y *n* de dicha órbita. Y dado que la fuerza que genera la mitad de la línea breve LM, de haberse producido en su totalidad, imprimiéndose de una vez sobre el punto P, habría generado la línea entera y obligado a la Luna a moverse por un arco cuya cuerda es LP, es decir, hubiera trasladado a la Luna desde el plano MP*m*T al plano LP*l*T, el movimiento angular de los nodos generado por dicha fuerza será igual al ángulo *m*T*l*. Pero *ml* es a *m*P como ML a MP, y puesto que MP está dado por el tiempo dado, *ml* será como el rectángulo ML × *m*P, es decir, como el rectángulo IT × *m*P. Y si T*ml* es un ángulo recto, el ángulo *m*T*l* será como $\frac{ml}{\mathrm{T}m}$ y, en consecuencia, como $\frac{\mathrm{IT} \times \mathrm{P}m}{\mathrm{T}m}$, es decir (puesto que T*m* y *m*P, TP y PH son proporcionales), como $\frac{\mathrm{IT} \times \mathrm{PH}}{\mathrm{TP}}$ y, en consecuencia, puesto que TP está dado, como IT × PH. Pero si el ángulo T*ml* o STN es oblicuo, el ángulo *m*T*l* será aún menor, en la proporción del seno del ángulo STN al radio, o de AZ a AT. En consecuencia, la velocidad de los nodos es como IT × PH × AZ, o como el producto de los senos de los tres ángulos TPI, PTN y STN.

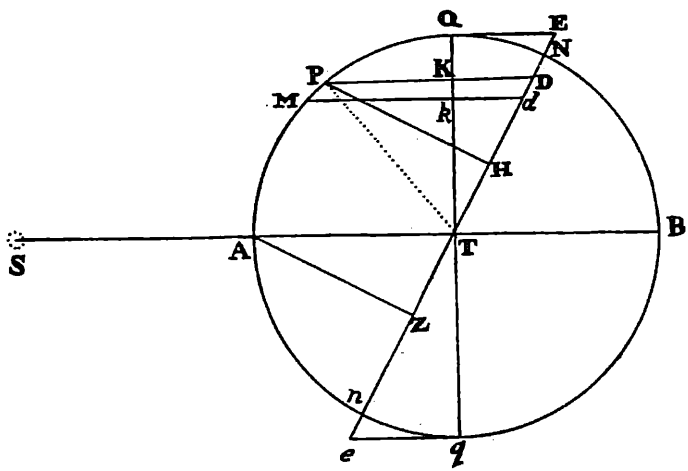
Si éstos son ángulos rectos, como ocurre cuando los nodos

están en las cuadraturas y la Luna en la sicigia, la línea breve *ml* será desplazada a una distancia infinita y el ángulo *m*T*l* devendrá igual al ángulo *m*P*l*. Pero en este caso el ángulo *m*P*l* es al ángulo PTM, que la Luna describe en el mismo tiempo en torno a la Tierra por su movimiento aparente, como 1 a 59,575. Pues el ángulo *m*P*l* es igual al ángulo LPM, es decir, al ángulo de deflexión de la Luna de una trayectoria rectilínea, ángulo que la mencionada fuerza 3IT del Sol habría generado por sí misma en ese tiempo dado de haber cesado entonces la gravedad de la Luna, y el ángulo PTM es igual al ángulo de deflexión de la Luna de una trayectoria rectilínea, ángulo que la sola fuerza que retiene a la Luna en su órbita habría generado por sí misma de haber cesado entonces la fuerza 3IT del Sol. Y estas fuerzas (como hemos mostrado más arriba) son una con respecto de otra como 1 a 59,575. En consecuencia, puesto que el movimiento horario medio de la Luna (con respecto a las estrellas fijas) es $32^{m}56^{s}27^{ter}12\frac{1}{2}^{iv}$, el movimiento horario del nodo será en este caso $33^{s}10^{ter}33^{iv}12^{v}$. Pero en otros casos el movimiento horario será a $33^{s}10^{ter}33^{iv}12^{v}$ como el producto de los senos de los tres ángulos TPI, PTN y STN (o de las distancias de la Luna a la cuadratura, de la Luna al nodo y del nodo al Sol) al cubo del radio. Y cuantas veces cambie el seno de cualquier ángulo de positivo a negativo y de negativo a positivo, otras tantas deberá el movimiento regresivo cambiarse a progresivo y el progresivo a regresivo. Debido a ello, los nodos son progresivos siempre que la Luna está situada entre cualquier cuadratura y el nodo más cercano a esa cuadratura. En otro caso son regresivos, y el exceso de la regresión sobre el progreso los hace retroceder mensualmente.

COROLARIO I. Por tanto, si desde P y M, puntos extremos del arco mínimo PM, abatimos sobre la línea *Qq*, que une las cuadraturas, las perpendiculares PK, M*k*, y las prolongamos hasta que corten la línea de los nodos N*n* en D y *d*, el movimiento horario de los nodos será como el área MPD*d* y el cuadrado de la línea AZ juntamente. Pues supóngase que PK, PH y AZ son los tres senos mencionados, es decir, PK el seno de la distancia de la Luna a la cuadratura, PH el seno de la distancia de la Luna al nodo y AZ el seno de la distancia del nodo al Sol, y la velocidad del nodo será como el producto de PK × PH × AZ. Pero PT es a PK como PM a K*k* y, en consecuencia, puesto que PT y PM están dados, K*k* será como PK. Igualmente, AT es a PD como AZ es a PH, por lo que PH

es como el rectángulo PD × AZ, y, combinando estas proporciones, PK × PH es como el contenido sólido K*k* × PD × AZ, y PK × PH × AZ como K*k* × PD × AZ², es decir, como el área PD*d*M y AZ² juntamente. Q.E.D.

COROLARIO II. En cualquier posición dada de los nodos, su movimiento horario medio es la mitad de su movimiento horario en las sicigias, por lo que es a $16^s 35^{ter} 16^{iv} 36^v$ como el cuadrado del seno de la distancia de los nodos a las sicigias es al cuadrado del radio, o como AZ² a AT². Pues si la Luna describe con movimiento uniforme el semicírculo QA*q*, la suma de todas las áreas PD*d*M durante el tiempo del paso de la Luna de Q a



M formará el área QM*d*E, limitada por la tangente al círculo QE, y cuando la Luna haya llegado al punto *n* dicha suma formará el área completa EQA*n* descrita por la línea PD, pero cuando la Luna se desplace de *n* a *q* la línea PD quedará fuera del círculo y describirá el área *nqe*, limitada por la tangente *qe* al círculo, área que, debido a que los nodos eran antes regresivos y ahora son progresivos, deberá sustraerse al área anterior y, al ser igual al área QEN, dejará el semicírculo NQA*n*. En consecuencia, mientras la Luna describe un semicírculo, la suma de todas las áreas PD*d*M será el área de ese semicírculo, y mientras la Luna describe un círculo completo, la suma de esas áreas será el área del círculo completo. Pero el área PD*d*M es el rectángulo del arco PM por el radio PT cuando la Luna está en las sicigias, y la suma de todas las áreas, *cada una de ellas* igual a esta área, en el tiempo en que la Luna describe un círculo completo, es el

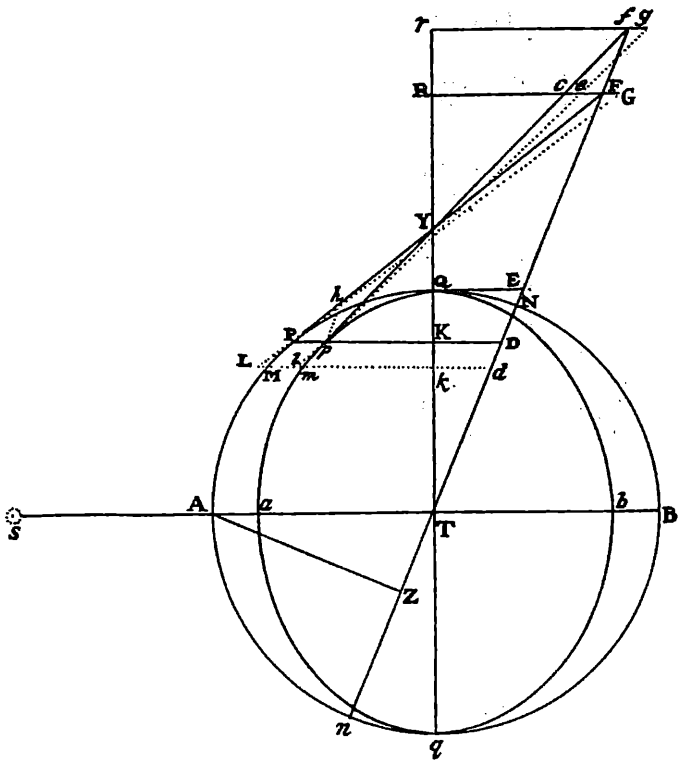
rectángulo de la circunferencia completa por el radio del círculo, y este rectángulo, al ser el doble del área del círculo, será el doble de la suma anterior. En consecuencia, si los nodos prosiguiesen con la velocidad uniformemente continuada que adquieren en las sicigias de la Luna, describirían el doble del espacio que de hecho describen, por lo que el movimiento medio por el que, de continuar uniformemente, describirían el mismo espacio que de hecho describen por un movimiento desigual, *no* es *más que* la mitad del movimiento que poseen en las sicigias de la Luna. Por tanto, dado que su movimiento horario máximo, si los nodos están en las cuadraturas, es $33^{s}10^{ter}33^{iv}12^{v}$, su movimiento horario medio será en este caso $16^{s}35^{ter}16^{iv}36^{v}$. Y como el movimiento horario de los nodos es en todo lugar como AZ^2 y el área PD*d*M juntamente, por lo que el movimiento horario de los nodos en las sicigias es como AZ^2 y el área PD*d*M juntamente, es decir (puesto que el área PD*d*M descrita en las sicigias está dada), como AZ^2, el movimiento medio será también como AZ^2. En consecuencia, cuando los nodos están fuera de las cuadraturas, este movimiento será a $16^{s}35^{ter}16^{iv}36^{v}$ como AZ^2 a AT^2. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XXXI. PROBLEMA XII

Determinar el movimiento horario de los nodos de la Luna en una órbita elíptica.

Representen Q*pmaq* una elipse descrita con eje mayor Q*q* y eje menor *ab*, QA*q*B un círculo circunscrito, T la Tierra en el centro común de ambos, S el Sol, *p* la Luna moviéndose por la elipse y *pm* un arco que describe en el momento mínimo de tiempo, N y *n* los nodos, unidos por la línea N*n*, *p*K y *mk* perpendiculares sobre el eje Q*q*, prolongadas en ambas direcciones hasta encontrarse con el círculo en P y M y con la línea de los nodos en D y *d*, y si la Luna, mediante un radio descrito hasta la Tierra, describe un área proporcional al tiempo de *descripción*, el movimiento horario del nodo por la elipse será como el área *p*D*dm* y AZ^2 juntamente.

Supóngase que PF es tangente al círculo en P, encontrándose, prolongada, con TN en F, que *pf* es tangente a la elipse en *p*, encontrándose, prolongada, con la misma TN en *f*, que las dos



tangentes cruzan el eje TQ en Y, que ML representa el espacio que la Luna describiría con movimiento transversal, por el impulso de la fuerza 3IT o 3PK arriba mencionada, en el tiempo en que, girando por el círculo, describe el arco PM, que *ml* representa el espacio que la Luna, girando por la elipse, describiría en el mismo tiempo por el impulso de la misma fuerza 3IT o 3PK. Prolónguense LP y *lp* hasta su encuentro con el plano de la eclíptica en G y *g*, únanse FG y *fg* de forma que FG, prolongada, corte *pf*, *pg* y TQ en *c*, *e* y R, respectivamente, y *fg*, prolongada, corte TQ en *r*. Puesto que la fuerza 3IT o 3PK en el círculo es a la fuerza 3IT o 3*p*K en la elipse como PK a *p*K, o como AT a *a*T, el espacio ML generado por la primera fuerza será al espacio *ml* generado por la última como PK a *p*K, es decir, debido a la semejanza de las figuras PYK*p* y FYR*c*, como FR a *c*R. Pero (debido a la semejanza de los triángulos PLM,

PGF) ML es a FG como PL es a PG, es decir (debido a las paralelas L*k*, PK, GR), como *pl* es a *pe*, es decir (debido a la semejanza de los triángulos *plm*, *cpe*), como *lm* es a *ce*. Y FG es a *ce* inversamente como LM es a *lm*, o como FR es a *c*R. En consecuencia, si *fg* fuera a *ce* como *fy* a *c*Y, es decir, como *fr* a *c*R (es decir, como *fr* a FR y FR a *c*R juntamente, es decir, como *f*T a FT y FG a *ce* juntamente), puesto que la razón de FG a *ce*, simplificada en los dos lados, deja las razones *fg* a FG y *f*T a FT, *fg* sería a FG como *f*T a FT, por lo que los ángulos que FG y *fg* subtenderían desde la Tierra T serían iguales entre sí. Pero estos ángulos (por lo que hemos mostrado en la anterior Proposición) son los movimientos de los nodos mientras la Luna describe en el círculo el arco PM y en la elipse el arco *pm*, por lo que los movimientos de los nodos en el círculo y la elipse serían iguales entre sí. Afirmo que así sería si *fg* fuera a *ce* como *f*Y a *c*Y, es decir, si *fg* fuera igual a $\frac{ce \times f\mathrm{Y}}{c\mathrm{Y}}$. Pero, debido a la semejanza de los triángulos *fgp* y *cep*, *fg* es a *ce* como *fp* a *cp* y, en consecuencia, *fg* es igual a $\frac{ce \times fp}{cp}$, por lo que el ángulo subtendido de hecho por *fg* es al ángulo anteriormente subtendido por FG, es decir, el movimiento de los nodos en la elipse es al movimiento de los mismos en el círculo, como esta *fg* o $\frac{ce \times fp}{cp}$ a la anterior *fg* o $\frac{ce \times f\mathrm{Y}}{c\mathrm{Y}}$, es decir, como $fp \times c\mathrm{Y}$ a $f\mathrm{Y} \times cp$, o como *fp* a *f*Y y *c*Y a *cp*, es decir, si *ph*, paralela a TN, se encuentra con FP en *h*, como F*h* a FY y FY a FP, es decir, como F*h* a FP o D*p* a DP y, en consecuencia, como el área D*pmd* al área DPM*d*. En consecuencia, puesto que (por el Corolario I, Proposición XXX) esta última área y AZ^2 juntamente son proporcionales al movimiento horario de los nodos en el círculo, el anterior área y AZ^2 juntamente serán proporcionales el movimiento horario de los nodos en la elipse. Q.E.D.

COROLARIO. En consecuencia, puesto que en cualquier posición dada de los nodos la suma de todas las áreas *p*D*dm*, en el tiempo en que la Luna se traslada de la cuadratura a cualquier lugar *m*, es el área *mp*QE*d* limitada por la tangente a la elipse QE, y puesto que la suma de todas esas áreas, en una revolución completa, es el área de toda la elipse, el movimiento medio de los nodos en la elipse será al movimiento medio de los

nodos en el círculo como la elipse es al círculo, es decir, como T*a* a TA, ó 69 a 70. En consecuencia, puesto que (por el Corolario II, Proposición XXX) el movimiento horario medio de los nodos en el círculo es a $16^{s}35^{ter}16^{iv}36^{v}$ como AZ^2 a AT^2, si tomamos el ángulo $16^{s}21^{ter}3^{iv}30^{v}$ al ángulo $16^{s}35^{ter}16^{iv}36^{v}$ como 69 a 70, el movimiento horario medio de los nodos en la elipse será a $16^{s}21^{ter}3^{iv}30^{v}$ como AZ^2 a AT^2, es decir, como el cuadrado del seno de la distancia entre el nodo y el Sol al cuadrado del radio.

Pero la Luna, mediante un radio trazado hasta la Tierra, describe el área con mayor velocidad en las sicigias que en las cuadraturas, por lo que el tiempo se contrae en las sicigias y se prolonga en las cuadraturas, y el movimiento de los nodos aumenta y disminuye igual que el tiempo. Pero el momento del área en las cuadraturas de la Luna era al momento de la misma en las sicigias como 10973 a 11073, por lo que el momento medio en los octantes es al exceso en las sicigias y al defecto en las cuadraturas como 11023, mitad de la suma de dichos números, es a 50, mitad de su diferencia. Por tanto, dado que el tiempo de la Luna en las diversas pequeñas partes iguales de su órbita es inversamente proporcional a su velocidad, el tiempo medio en los octantes será al exceso del tiempo en las cuadraturas y al defecto *del tiempo* en las sicigias debido a esta causa como 11023 a 50, aproximadamente. Pero, calculando desde las cuadraturas a las sicigias, observo que el exceso de los momentos del área en los diversos lugares sobre el momento mínimo en las cuadraturas es aproximadamente como el cuadrado del seno de la distancia de la Luna a las cuadraturas, por lo que la diferencia entre el momento en cualquier lugar y el momento medio en los octantes es como la diferencia entre el cuadrado del seno de la distancia de la Luna a las cuadraturas y el cuadrado del seno de 45 grados, o la mitad del cuadrado del radio, y el incremento del tiempo en los diversos lugares entre los octantes y las cuadraturas y el decremento del mismo entre los octantes y las sicigias está en la misma proporción. Pero el movimiento de los nodos mientras la Luna describe las diversas pequeñas partes iguales de su órbita se acelera o retarda como el cuadrado del tiempo, pues dicho movimiento, mientras la Luna describe PM, es (en igualdad de las restantes condiciones) como ML, y ML varía como el cuadrado del tiempo. Por tanto, el movimiento de los nodos en las sicigias en el tiempo en que la Luna describe pequeñas partes dadas de su órbita disminuye como el cuadrado de la razón del número 11073 al número 11023, y el decremento

es al movimiento restante como 100 a 10973, pero a todo el movimiento como 100 a 11073, aproximadamente. Pero el decremento en los lugares entre los octantes y las sicigias y el incremento en los lugares entre los octantes y las cuadraturas es a este decremento aproximadamente como todo el movimiento en estos lugares a todo el movimiento en las sicigias y la diferencia entre el cuadrado del seno de la distancia de la Luna a la cuadratura y la mitad del cuadrado del radio, a la mitad del cuadrado del radio, juntamente. Por tanto, si los nodos están en las cuadraturas y tomamos dos lugares, uno a un lado y uno al otro, igualmente distantes del octante, y otros dos con el mismo intervalo de distancia, uno a la sicigia y otro a la cuadratura, y a los decrementos de los movimientos en los dos lugares entre la sicigia y el octante sustraemos los incrementos de los movimientos en los dos lugares entre el octante y la cuadratura, el decremento restante será igual al decremento en la sicigia, como se puede calcular fácilmente. En consecuencia, el decremento medio que debe sustraerse al movimiento medio de los nodos es la cuarta parte del decremento en la sicigia. El movimiento horario total de los nodos en las sicigias (cuando la Luna, mediante un radio trazado hasta la Tierra, debía describir un área proporcional al tiempo) era $32^{s}42^{ter}7^{iv}$. Y ya hemos visto que el decremento del movimiento de los nodos en el tiempo en que la Luna, moviéndose ahora con mayor velocidad, describe el mismo espacio, era a este movimiento como 100 a 11073; en consecuencia, este decremento es $17^{ter}43^{iv}11^{v}$, cuya cuarta parte, $4^{ter}25^{iv}48^{v}$, sustraída al movimiento horario medio arriba determinado, $16^{s}21^{ter}3^{iv}30^{v}$, deja $16^{s}16^{ter}37^{iv}42^{v}$, su movimiento horario medio correcto.

Si los nodos no están en las cuadraturas y se consideran dos lugares igualmente distantes de las sicigias, uno a un lado y uno al otro, la suma de los movimientos de los nodos cuando la Luna se encuentra en estos lugares será a la suma de sus movimientos cuando la Luna está en los mismos lugares y los nodos en las cuadraturas como AZ^2 a AT^2. Y los decrementos de los movimientos debidos a las causas recientemente explicadas serán mutuamente como los movimientos mismos, por lo que los movimientos restantes serán mutuamente entre sí como AZ^2 a AT^2, y los movimientos medios serán como los movimientos restantes. En consecuencia, en cualquier posición dada de los nodos, su movimiento horario medio correcto es a $16^{s}16^{ter}37^{iv}42^{v}$ como AZ^2 a AT^2, es decir, como el cuadrado del

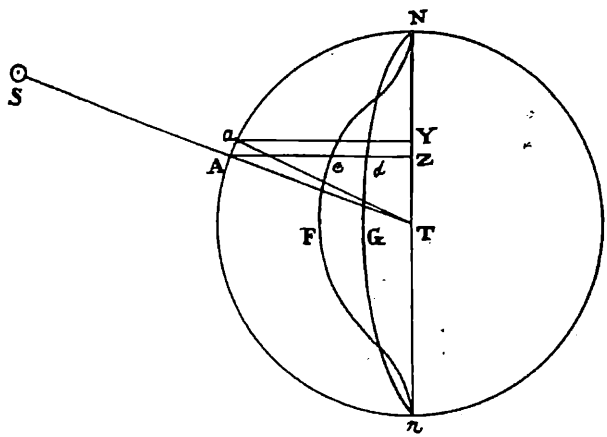
seno de la distancia entre los nodos y las sicigias al cuadrado del radio.

PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA XIII

Determinar los movimientos medios de los nodos de la Luna.

El movimiento medio anual es la suma de todos los movimientos horarios medios a lo largo del año. Supóngase que el nodo está en N y que, cada vez que transcurre una hora, vuelve de nuevo a su anterior lugar, de forma que, a pesar de su movimiento propio, pueda permanecer constantemente en la misma situación con respecto a las estrellas fijas mientras el Sol S, debido al movimiento de la Tierra, deja el nodo y prosigue hasta completar su curso anual aparente con movimiento uniforme. Represente A*a* un arco mínimo dado que la línea recta TS, siempre trazada al Sol, describe por su intersección con el círculo NA*n* en el mínimo momento de tiempo dado, y el movimiento horario medio (en base a lo que más arriba hemos mostrado) será como AZ^2, es decir (puesto que AZ y ZY son proporcionales), como el rectángulo de AZ por ZY, es decir, como el área AZY*a*, y la suma de todos los movimientos horarios medios desde el principio será como la suma de todas las áreas *a*YZA, es decir, como el área NAZ. Pero la máxima AZY*a* es igual al rectángulo del arco A*a* por el radio del círculo, por lo que la suma de todos estos rectángulos en el círculo entero será a la misma suma de todos los rectángulos máximos como el área del círculo entero al rectángulo de la circunferencia entera por el radio, es decir, como 1 a 2. Pero el movimiento horario correspondiente a ese rectángulo máximo era $16^s16'''37^{iv}42^v$, y este movimiento, en el curso completo del año sideral, $365^d6^h9^s$, supone 39 38′7″50‴, por lo que la mitad del mismo, 19 49′3″55‴, es el movimiento medio de los nodos correspondiente al círculo entero. Y el movimiento de los nodos en el tiempo en que el Sol se traslada de N a A es a 19 49′3″55‴ como el área NAZ al círculo entero.

Así sería si el nodo fuera, tras el transcurso de cada hora, arrastrado de nuevo a su anterior lugar, de forma que el Sol, tras una revolución completa, se encontrara al terminar el año en el mismo nodo que dejó al iniciarse aquél. Pero, debido al



movimiento del nodo durante este tiempo, el Sol tendrá necesariamente que encontrarse antes con el nodo, por lo que ahora nos resta calcular la abreviación del tiempo. Puesto que el Sol recorre en el curso del año 360 grados, y dado que el nodo se desplaza en el mismo tiempo por su movimiento máximo 39°38′7″50‴, ó 39,6355 grados, y que el movimiento medio del nodo en cualquier lugar N es a su movimiento medio en sus cuadraturas como AZ^2 a AT^2, el movimiento del Sol será al movimiento del nodo en N como 360 AT^2 a 39,6355AZ^2, es decir, como 9,0827646AT^2 a AZ^2. En consecuencia, si suponemos la circunferencia NA*n* del círculo entero dividida en pequeñas partes iguales, como A*a*, el tiempo en que el Sol describiría el arco breve A*a*, si el círculo estuviera en reposo, sería al tiempo en que describiría el mismo arco en el caso de que el círculo girase junto con los nodos en torno al centro T inversamente como 9,0827646AT^2 a 9,0827646$AT^2 + AZ^2$, pues el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad con que se describe el arco breve, y esta velocidad es la suma de las velocidades del Sol y el nodo. En consecuencia, si el sector NTA representa el tiempo en que el Sol describiría por sí mismo, sin movimiento del nodo, el arco NA, y la parte indefinidamente pequeña AT*a* del sector representa el breve momento del tiempo en que describiría el arco mínimo A*a*, y si (abatiendo *a*Y perpendicularmente sobre N*n*) en AZ tomamos *d*Z con longitud tal que el rectángulo de *d*Z por ZY pueda ser a la parte mínima AT*a* del sector como AZ^2 a 9,0827646$AT^2 + AZ^2$.

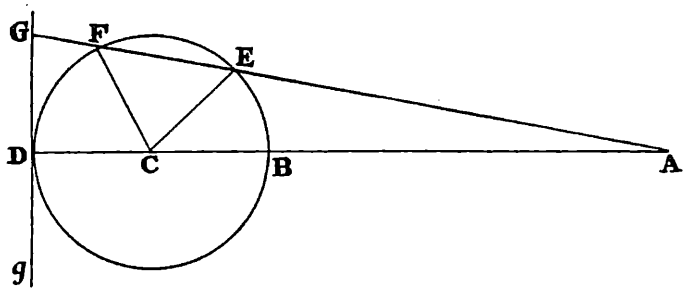
es decir, de forma que dZ pueda ser a $\frac{1}{2}AZ$ como AT^2 a $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, el rectángulo de dZ por ZY representará el decremento de tiempo debido al movimiento del nodo mientras se describe el arco A*a*. Y si la curva N*d*G*n* es el lugar donde siempre se encuentra el punto *d*, el área curvilínea N*d*Z será como todo el decremento *de tiempo* mientras se describe todo el arco NA, por lo que el exceso del sector NAT sobre el área N*d*Z será como el tiempo entero. Pero dado que el movimiento del nodo en menos tiempo es menor en proporción al tiempo, el área A*a*YZ deberá también disminuirse en la misma proporción, lo que puede hacerse tomando en AZ la línea *e*Z con longitud tal que pueda ser a la longitud de AZ como AZ^2 a $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, pues de esta manera el rectángulo de *e*Z por ZY será al área AZY*a* como el decremento del tiempo en que se describe el arco A*a* a todo el tiempo en que se hubiera descrito de haber estado en reposo el nodo, por lo que dicho rectángulo será como el decremento del movimiento del nodo. Y si la curva N*e*F*n* es el lugar del punto *e*, toda el área N*e*Z, que es la suma de todos los decrementos *de aquel movimiento*, será como todo el decremento *del mismo* durante el tiempo en que se describe el arco AN, y el área restante NA*e* será como el movimiento restante, que es el verdadero movimiento del nodo, durante el tiempo en que los movimientos conjuntos del Sol y el nodo describen todo el arco NA. Ahora bien, el área del semicírculo es al área de la figura N*e*F*n* determinada por el método de series infinitas como 793 a 60, aproximadamente, pero el movimiento correspondiente *o proporcional* a todo el círculo era 19° 49′ 3″ 55‴, por lo que el movimiento correspondiente al doble de la figura N*e*F*n* es 1° 29′ 58″ 2‴, que restado al movimiento precedente deja 18° 19′ 5″ 53‴, movimiento completo del nodo con respecto a las estrellas fijas en el intervalo entre dos de sus conjunciones con el Sol. Este movimiento, sustraído al movimiento anual del Sol, 360°, deja 341° 40′ 54″ 7‴, movimiento del Sol en el intervalo entre las mismas conjunciones. Pero este movimiento es al movimiento anual de 360° igual que el movimiento recién determinado del nodo, 18° 19′ 5″ 53‴, es a su movimiento anual, que será, en consecuencia, 19° 18′ 1″ 23‴. Y éste es el movimiento medio de los nodos en el año sideral. Según las tablas astronómicas, es 19° 21′ 21″ 50‴. La diferencia es menos de una $\frac{1}{300}$ parte de todo el movimiento, y parece deberse a la excentricidad de la órbita de la Luna y a su inclinación hacia el plano de la eclíptica. La excentricidad de dicha órbita

lera demasiado el movimiento de los nodos. Por otra parte, inclinación de la órbita retarda algo el movimiento de los los, reduciéndolo a su justa velocidad.

PROPOSICIÓN XXXIII. PROBLEMA XIV

erminar el movimiento verdadero de los nodos de la Luna.

En el tiempo que es como el área NTA − N*d*Z (en la figura cedente), dicho movimiento es como el área NA*e*, por lo que i dado. Sin embargo, la excesiva dificultad del cálculo nseja utilizar la siguiente construcción del Problema. Con tro C y cualquier radio CD, descríbase el círculo BEFD. olónguese DC hasta A de forma que AB pueda ser a AC no el movimiento medio a la mitad del movimiento verdade- medio cuando los nodos están en sus cuadraturas (es decir, no 19°18′1″23‴ a 19°49′3″55‴, por lo que BC es a AC como



diferencia de aquellos movimientos, 0°31′2″32‴, al último vimiento, 19°49′3″55‴, es decir, como 1 a $38\frac{3}{10}$). Trácese pués por el punto D la línea indefinida G*g*, tangente al culo en D, y si tomamos el ángulo BCE o BCF igual al doble la distancia del Sol al lugar del nodo, tal como se ha erminado mediante el movimiento medio, y, trazando AE o de forma que corten la perpendicular DG en G, tomamos o ángulo que sea a todo el movimiento del nodo en el ervalo entre sus sicigias (es decir, a 9°11′3″) como la tangente a toda la circunferencia del círculo BED, y añadimos este *imo* ángulo (para lo que puede utilizarse el ángulo DAG) al vimiento medio de los nodos mientras pasan de las cuadratu-

ras a las sicigias, y lo sustraemos a su movimiento medio mientras pasan de las sicigias a las cuadraturas, tendremos su movimiento verdadero, pues el movimiento verdadero así determinado concordará aproximadamente con el movimiento verdadero determinado asumiendo los tiempos como el área NTA – N*dZ* y el movimiento del nodo como el área NA*e*, como cualquiera que se decida a estudiar y hacer los cálculos podrá comprobar. Esta es la ecuación semianual del movimiento de los nodos. Aunque hay también una ecuación mensual, no es en modo alguno necesaria para determinar la latitud de la Luna, pues dado que la variación de la inclinación de la órbita de la Luna hacia el plano de la eclíptica está sujeta a una doble desigualdad, mensual y semianual, la desigualdad mensual *de esta variación* y la ecuación mensual de los nodos se moderan y corrigen entre sí de tal forma que ambas pueden ignorarse al calcular la latitud de la Luna.

COROLARIO. De esta Proposición y la precedente se desprende que los nodos están en reposo en sus sicigias, pero son regresivos en sus cuadraturas por un movimiento horario de $16^{s}19^{ter}26^{iv}$, y que la ecuación del movimiento de los nodos en los octantes es 1°30′, todo lo cual concuerda perfectamente con los fenómenos celestes.

ESCOLIO

Mr. *Machin*, el profesor *Gresham* y el doctor *Henry Pemberton* determinaron, por separado, el movimiento de los nodos por un método distinto. Este método ya ha sido mencionado en otro lugar. Sus documentos, que he podido ver, contenían dos Proposiciones, y en ambas concordaban perfectamente entre sí. Aquí insertaré el documento de Mr. *Machin*, primero que llegó a mis manos.

EL MOVIMIENTO DE LOS NODOS DE LA LUNA

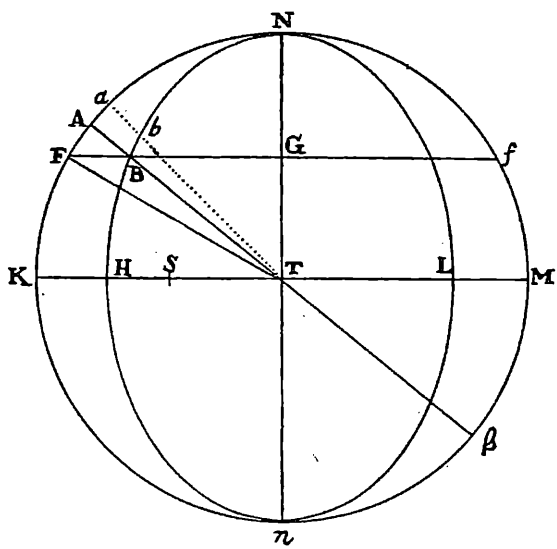
«PROPOSICIÓN PRIMERA

»El movimiento medio del Sol desde el nodo se define por una media proporcional geométrica entre el movimiento medio del Sol y el movimiento medio con que el Sol se aleja con la mayor velocidad del nodo en las cuadraturas.

»Sean T el lugar de la Tierra, N*n* la línea de los nodos de la Luna en cualquier tiempo dado, KTM una perpendicular a ella, TA una línea recta que gira en torno al centro con la misma velocidad angular con que el Sol y el nodo se alejan uno de otro, de forma que el ángulo entre la línea recta en reposo N*n* y la línea en rotación TA sea siempre igual a la distancia de los lugares del Sol y el nodo. Entonces, dividiendo cualquier línea recta TK en partes TS y SK y tomando estas partes como el movimiento horario medio del Sol al movimiento horario medio del nodo en las cuadraturas, si se toma la línea recta TH, media proporcional entre la parte TS y el todo TK, dicha línea recta será proporcional al movimiento medio del Sol desde el nodo.

»Pues descríbase el círculo NK*n*M con centro T y radio TK, descríbase en torno al mismo centro una elipse NH*n*L, con semiejes TH y TN, y en el tiempo en que el Sol se aleja del nodo por el arco N*a*, si se traza la línea recta T*ba*, el área del sector NT*a* será el exponente de la suma de los movimientos del Sol y el nodo en el mismo tiempo. Sea, en consecuencia, el arco extremadamente breve *a*A un arco que la línea recta T*ba*, girando conforme a la mencionada ley, describe uniformemente

en un intervalo de tiempo dado, y el sector extremadamente pequeño TA*a* será como las sumas de las velocidades con que el Sol y el nodo se trasladan en direcciones diferentes en dicho tiempo. Ahora bien, la velocidad del Sol es casi uniforme, y su desigualdad es tan pequeña que apenas produce la menor desigualdad en el movimiento medio de los nodos. La otra parte de esta suma, es decir, la cantidad media de la velocidad del nodo, aumenta en la regresión de las sicigias en el cuadrado de la razón del seno de su distancia al Sol (por el Corolario de la Proposición XXXI de este Libro) y, al llegar al máximo en sus cuadraturas con el Sol en K, está en la misma razón a la



velocidad del Sol que SK a TS, es decir, como (la diferencia de los cuadrados de TK y TH o) el rectángulo KHM a TH^2. Pero la elipse NBH divide el sector AT*a*, exponente de la suma de estas dos velocidades, en dos partes AB*ba* y BT*b*, proporcionales a las velocidades. En efecto, prolongando BT hasta el círculo en β y abatiendo sobre el eje mayor, desde el punto B, la perpendicular BG, que prolongada en ambas direcciones se encuentra con el círculo en los puntos F y *f*, puesto que el espacio AB*ba* es al sector TB*b* como el rectángulo ABβ es a BT^2 (al ser dicho rectángulo igual a la diferencia de los cuadrados de TA y TB, porque la línea recta Aβ es cortada igualmente en T y desigual-

mente en B), cuando el espacio AB*ba* es máximo en K, esta razón será la misma que la razón del rectángulo KHM a HT^2. Pero arriba se mostró que la máxima velocidad media del nodo está en precisamente la misma razón a la velocidad del Sol, por lo que el sector AT*a* se divide en las cuadraturas en partes proporcionales a las velocidades. Y puesto que el rectángulo KHM es a HT^2 como FB*f* a BG^2, y el rectángulo ABβ igual al rectángulo FB*f*, el área pequeña AB*ba*, donde es máxima, es al sector restante TB*b* como el rectángulo ABβ es a BG^2. Pero la razón de estas áreas pequeñas era siempre como el rectángulo ABβ a BT^2, por lo que el área pequeña AB*ba* es en el lugar A menor que su correspondiente área en las cuadraturas en la razón cuadrada de BG a BT, es decir, en la razón cuadrada del seno de la distancia del Sol al nodo. En consecuencia, la suma de todas las áreas pequeñas AB*ba*, es decir, el espacio ABN, será como el movimiento del nodo en el tiempo en que el Sol ha recorrido el arco NA tras dejar el nodo, y el espacio restante, es decir, el sector elíptico NTB, será como el movimiento medio del Sol en el mismo tiempo. Y puesto que el movimiento anual medio del nodo es el movimiento que ejecuta en el tiempo en que el Sol completa un período de su curso, el movimiento medio del nodo desde el Sol será al movimiento medio del Sol mismo como el área del círculo al área de la elipse, es decir, como la línea recta TK a la línea recta TH, que es una media proporcional entre TK y TS, o, lo que viene a ser lo mismo, como la media proporcional TH a la línea recta TS.

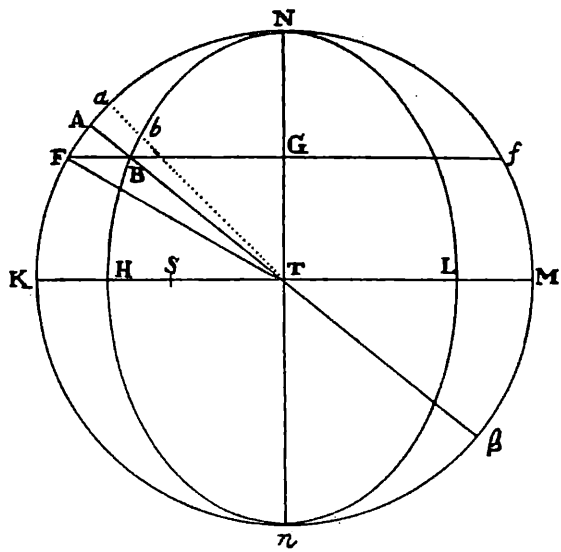
»PROPOSICIÓN II

»Dado el movimiento medio de los nodos de la Luna, determinar su movimiento verdadero.

»Sea el ángulo A la distancia del Sol al lugar medio del nodo, o el movimiento medio del Sol desde el nodo. Si entonces tomamos el ángulo B, cuya tangente es a la tangente del ángulo A como TH a TK, es decir, como la raíz cuadrada de la razón del movimiento horario medio del Sol al movimiento horario medio del Sol desde el nodo cuando el nodo está en la cuadratura, dicho ángulo B será la distancia del Sol al lugar verdadero del nodo. En efecto, únase FT y, por la demostración

de la última Proposición, el ángulo FTN será la distancia del Sol al lugar medio del nodo, y el ángulo ATN la distancia al lugar verdadero, y las tangentes de esos ángulos son una con respecto a la otra como TK a TH.

»COROLARIO. Por tanto, el ángulo FTA es la ecuación de los nodos de la Luna, y el seno de este ángulo, cuando es máximo en los octantes, es al radio como KH es a TK + TH. Pero el seno de esta ecuación en cualquier otro lugar A es al seno máximo



como el seno de las sumas de los ángulos FTN + ATN es al radio, es decir, aproximadamente como el seno del doble de la distancia del Sol al lugar medio del nodo (o sea, 2FTN) al radio.

»ESCOLIO

»Si el movimiento horario medio de los nodos en las cuadraturas es $16''16'''37^{iv}42^{v}$, es decir, en todo el año sideral, $39°38'7''50'''$, TH será a TK como la raíz cuadrada de la razón del número 9,0827646 al número 10,0827646, es decir, como 18,6524761 a 19,6524761. En consecuencia, TH es a HK como

18,6524761 a 1, es decir, como el movimiento del Sol en un año sideral al movimiento medio del nodo, $19^c\,18'\,1''\,23\frac{2}{3}'''$.

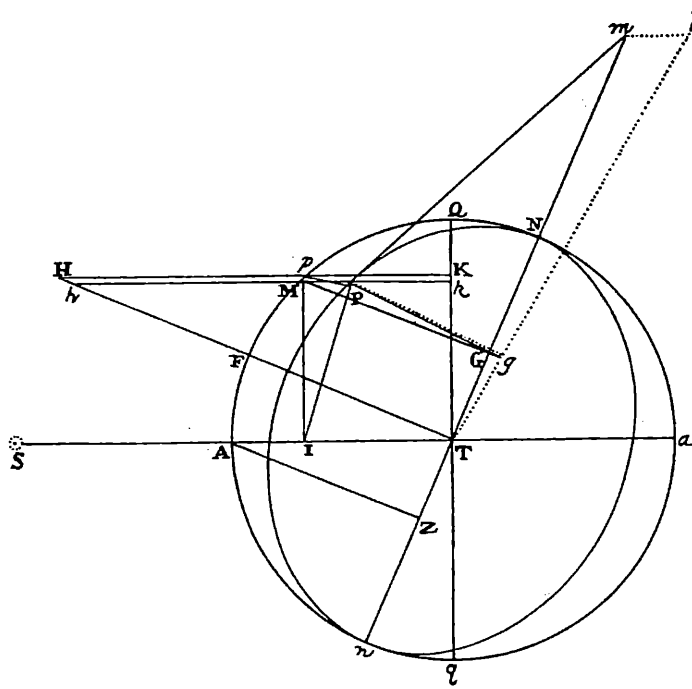
»Pero si el movimiento medio de los nodos de la Luna en 20 años julianos es 386° 50′ 16″, como se obtiene de las observaciones utilizadas en la teoría de la Luna, el movimiento medio de los nodos en un año sideral será 19° 20′ 31″ 58‴, y TH será a HK como 360° a 19° 20′ 31″ 58‴, es decir, como 18,61214 a 1, de donde el movimiento horario medio de los nodos en las cuadraturas resultará ser $16''\,18'''\,48^{iv}$, y la ecuación máxima de los nodos en los octantes será 1° 29′ 57″.»

PROPOSICIÓN XXXIV. PROBLEMA XV

Determinar la variación horaria de la inclinación de la órbita de la Luna hacia el plano de la eclíptica.

Representen A y *a* las sicigias, Q y *q* las cuadraturas, N y *n* los nodos, P el lugar de la Luna en su órbita, *p* la proyección ortográfica de dicho lugar sobre el plano de la eclíptica y *m*T*l* el momento del movimiento de los nodos, como más arriba. Si abatimos la perpendicular PG sobre T*m* y, uniendo *p*G, la prolongamos hasta su encuentro con T*l* en *g*, uniendo también P*g*, el ángulo PG*p* será la inclinación de la órbita de la Luna hacia el plano de la eclíptica cuando la Luna está en P, y el ángulo P*gp* será la inclinación de la misma tras el transcurso de un breve momento de tiempo. En consecuencia, el ángulo GP*g* será la variación momentánea de la inclinación. Pero este ángulo GP*g* es al ángulo GT*g* como TG a PG y P*p* a PG juntamente, de forma que si por el momento de tiempo asumimos una hora, puesto que el ángulo GT*g* (por la Proposición XXX) es al ángulo $33''\,10'''\,33^{iv}$ como $IT \times PG \times AZ$ a AT^3, el ángulo GP*g* (o la variación horaria de la inclinación) será al ángulo $33''\,10'''\,33^{iv}$ como $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ a AT^3. Q.E.I.

Así sería si la Luna girase uniformemente por una órbita circular. Pero si la órbita es elíptica, el movimiento medio de los nodos disminuirá en la proporción del eje menor al mayor, como hemos mostrado más arriba, y la variación de la inclinación disminuirá también en la misma proporción.



COROLARIO I. Levántese sobre N*n* la perpendicular TF, y sea *p*M el movimiento horario de la Luna en el plano de la eclíptica. Abátanse sobre QT las perpendiculares *p*K, M*k*, y prolónguense hasta su encuentro con TF en H y *h*. Entonces IT será a AT como K*k* a M*p*, y TG a H*p* como TZ a AT, por lo que IT × TG será igual a $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, es decir, igual al área H*p*M*h* multiplicada por la razón $\frac{TZ}{Mp}$; en consecuencia, la variación horaria de la inclinación será a $33''10'''33^{iv}$ como el área H*p*M*h* multiplicada por $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ es a AT^3.

COROLARIO II. Y, en consecuencia, si la Tierra y los nodos fueran con el paso de cada hora desplazados de su nuevo lugar y devueltos instantáneamente al antiguo, de forma que su situación continuara dada durante todo un mes periódico, la

variación total de la inclinación durante dicho mes sería a $33''10'''33^{iv}$ como la agregación de todas las áreas H*p*M*h* generadas en el tiempo de una revolución del punto *p* (considerando al sumar sus signos + −adecuados) multiplicada por $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ a $Mp \times AT^3$, es decir, como todo el círculo QA*qa* multiplicado por $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ a $Mp \times AT^3$, es decir, como la circunferencia QA*qa* multiplicada por $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ a $2Mp \times AT^2$.

COROLARIO III. Y, en consecuencia, en una posición dada de los nodos, la variación horaria media que, uniformemente continuada durante todo el mes, generaría aquella variación mensual, es a $33''10'''33^{iv}$ como $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ es a 2AT, o como $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ es a $PG \times 4AT$, es decir (puesto que P*p* es a PG como el seno de la mencionada inclinación al radio, y $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ a 4AT como el seno del doble del ángulo AT*n* a cuatro veces el radio), como el seno de la misma inclinación multiplicado por el seno del doble de la distancia entre los nodos y el Sol a cuatro veces el cuadrado del radio.

COROLARIO IV. Puesto que la variación horaria de la inclinación, cuando los nodos están en las cuadraturas, es (por esta Proposición) al ángulo $33''10'''33^{iv}$ como $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ es a AT^3, es decir, como $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ a 2AT, es decir, como el seno del doble de la distancia de la Luna a las cuadraturas multiplicado por $\frac{Pp}{PG}$ es a dos veces el radio, la suma de todas las variaciones horarias durante el tiempo en que la Luna, en esta situación de los nodos, pasa de la cuadratura a la sicigia (es decir, en el transcurso de $177\frac{1}{6}$ horas) será a la suma de otros tantos ángulos $33''10'''33^{iv}$, ó 5878", como la suma de todos los senos del doble de la distancia de la Luna a las cuadra-

turas multiplicada por $\frac{Pp}{PG}$ es a la suma de otros tantos diámetros, es decir, como el diámetro multiplicado por $\frac{Pp}{PG}$ es a la circunferencia, es decir, si la inclinación es 5° 1′, como $7 \times \frac{874}{10000}$ es a 22, o como 278 a 10000. En consecuencia, la variación total, compuesta por la suma de todas las variaciones horarias en el tiempo mencionado, es 163″, ó 2′43″.

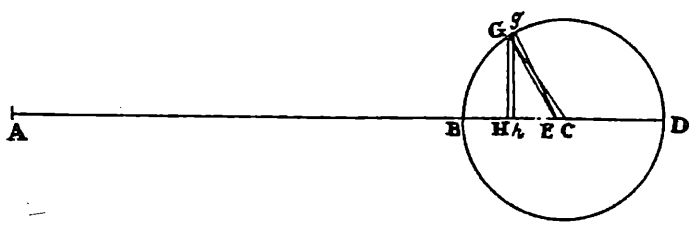
PROPOSICIÓN XXXV. PROBLEMA XVI

Determinar la inclinación de la órbita de la Luna hacia el plano de la eclíptica en un tiempo dado.

Sean AD el seno de la inclinación máxima y AB el seno de la mínima. Biséctese BD en C y descríbase el círculo BGD, mediante el radio BC, en torno al centro C. Tómese CE en AC, en la misma proporción a EB que la de EB a dos veces BA, y si para el tiempo dado trazamos el ángulo AEG, igual al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas, y abatimos sobre AD la perpendicular GH, AH será el seno de la inclinación requerida.

Pues GE^2 es igual a

$$GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$$



y, en consecuencia, puesto que 2EC está dado, GE^2 será como AH. Represente ahora AE*g* el doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas en un momento de tiempo posterior, y el arco G*g*, debido al ángulo dado GE*g*, será como la distancia GE.

Pero H*h* es a G*g* como GH a GC, por lo que H*h* es como el rectángulo GH × G*g*, o GH × GE, es decir, como $\frac{GH}{GE} \times GE^2$, o $\frac{GH}{GE} \times AH$, es decir, como AH y el seno del ángulo AEG juntamente. En consecuencia, si AH en un caso cualquiera, es el seno de la inclinación, aumentará por los mismos incrementos que el seno de la inclinación (por el Corolario III de la Proposición precedente), por lo que siempre será igual a dicho seno. Ahora bien, cuando el punto G cae sobre uno cualquiera de los puntos B o D, AH es igual a este seno, por lo que permanece siempre igual al mismo. Q.E.D.

En esta demostración he supuesto que el ángulo BEG, que representa el doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas, aumenta uniformemente, pues no puedo dedicarme a calcular toda ínfima circunstancia de desigualdad. Supóngase que BEG es un ángulo recto, y que G*g* es en este caso el incremento horario del doble de la distancia de los nodos al Sol, y (por el Corolario III de la última Proposición) la variación horaria de la inclinación en el mismo caso será a $33''10'''33^{iv}$ como el rectángulo de AH, seno de la inclinación, multiplicado por el seno del ángulo recto BEG, doble de la distancia de los nodos al Sol, es a cuatro veces el cuadrado del radio, es decir, viendo que la inclinación es aproximadamente $5°8\frac{1}{2}'$, como su seno 896 es a 40000, cuádruplo del radio, o como 224 a 10000. Pero la variación total correspondiente a BD, diferencia de los senos, es a esta variación horaria como el diámetro BD es al arco G*g*, es decir, juntamente como el diámetro BD a la semicircunferencia BGD, y como el tiempo de $2079\frac{7}{10}$ horas en que el nodo pasa de las cuadraturas a las sicigias es a una hora, es decir, como 7 a 11 y $2079\frac{7}{10}$ a 1. En consecuencia, combinando todas estas proporciones, tendremos la variación total BD a $33''10'''33^{iv}$ como $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ es a 110000, es decir, como 29645 a 1000, de donde dicha variación BD resultará ser $16'23\frac{1}{2}''$.

Y ésta es la variación máxima de la inclinación, abstracción hecha de la situación de la Luna en su órbita, pues si los nodos están en las sicigias, la inclinación no cambia con las diversas posiciones de las cuadraturas, pero si los nodos están en las cuadraturas la inclinación es menor cuando la Luna está en las sicigias que cuando está en las cuadraturas, con una diferencia

de 2'43", como hemos mostrado (Corolario IV de la Proposición precedente). Y la variación media total BD, disminuida en 1'21½", mitad de dicho exceso, deviene 15'2" cuando la Luna está en las cuadraturas, e incrementada en la misma cifra, deviene 17'45" cuando la Luna está en las sicigias. En consecuencia, si la Luna está en las sicigias, la variación total en el paso de los nodos de las cuadraturas a las sicigias será 17'45", por lo que si la inclinación es 5°17'20" cuando los nodos están en las sicigias, cuando los nodos están en las cuadraturas y la Luna en las sicigias será 4°59'35". Todo ello es confirmado por las observaciones.

Ahora bien, si se quiere determinar la inclinación de la órbita cuando la Luna está en las sicigias y los nodos en cualquier lugar entre éstas y las cuadraturas, sea AB a AD como el seno de 4°59'35" es al seno de 5°17'20", tómese el ángulo AEG igual al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas, y AH será el seno de la inclinación buscada. La inclinación de la órbita es igual a esta inclinación cuando la Luna está a una distancia de 90° de los nodos. En otras situaciones de la Luna, esta desigualdad mensual, a la que está sujeta la variación de la inclinación en el cálculo de la latitud de la Luna, está equilibrada y en cierta medida anulada por la desigualdad mensual del movimiento de los nodos (como ya hemos dicho), y puede, en consecuencia, ignorarse en los cálculos de la mencionada latitud.

ESCOLIO

Con estos cálculos sobre los movimientos lunares deseaba mostrar que mediante la teoría de la gravedad los movimientos lunares pueden determinarse en base a sus causas físicas. Gracias a la misma teoría he podido también determinar que la ecuación anual del movimiento medio de la Luna obedece a la variación que la dilatación de la órbita de la Luna sufre por la acción del Sol, conforme al Corolario VI de la Proposición LXVI, Libro I. La fuerza de esta acción es mayor en el perigeo del Sol, y dilata la órbita de la Luna. En el apogeo del Sol es menor y permite que la órbita se contraiga de nuevo. La Luna se mueve más lentamente en la órbita dilatada y más rápidamente en la contraída, y la ecuación anual que regula esta desigualdad desaparece en el apogeo y el perigeo del Sol. A la distancia

media del Sol a la Tierra llega aproximadamente a los 11'50"; a otras distancias del Sol es proporcional a la ecuación del centro solar, sumándose al movimiento medio de la Luna mientras la Tierra pasa del afelio al perihelio y restándose al mismo mientras la Tierra se encuentra en el semicírculo opuesto. Tomando 1000 por radio de la gran órbita, y $16\frac{7}{8}$ como excentricidad de la Tierra, esta ecuación, cuando alcanza su mayor magnitud, es, según la teoría de la gravedad, 11'49". Pero parece que la excentricidad de la Tierra es algo mayor, y la ecuación aumenta en la misma proporción que la excentricidad. Supóngase que la excentricidad es $16\frac{11}{12}$, y la ecuación máxima será 11'51".

He determinado también que el apogeo y los nodos de la Luna se mueven más deprisa en el perihelio de la Tierra, cuando la fuerza de la acción del Sol es mayor, que en su afelio, y ello en proporción inversa al cubo de la razón de la distancia de la Tierra al Sol, debido a lo cual las ecuaciones anuales de aquellos movimientos son proporcionales a la ecuación del centro solar. Ahora bien, el movimiento del Sol varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia de la Tierra al Sol, y la ecuación máxima del centro generada por esta desigualdad es 1°56'20", que corresponde a la excentricidad del Sol arriba mencionada, $16\frac{11}{12}$. Pero si el movimiento del Sol fuera inversamente proporcional al cubo de la distancia, esta desigualdad generaría la ecuación máxima 2°54'30", por lo que las ecuaciones máximas generadas por las desigualdades de los movimientos del apogeo y nodos de la Luna son a 2°54'30" como el movimiento diario medio del apogeo de la Luna y el movimiento diario medio de sus nodos son al movimiento diario medio del Sol. Por tanto, la ecuación máxima del movimiento medio del apogeo resulta ser 19'43", y la ecuación máxima del movimiento medio de los nodos 9'24". La primera ecuación se añade y la segunda se sustrae mientras la Tierra pasa de su perihelio a su afelio, y al contrario cuando la Tierra se encuentra en el semicírculo opuesto.

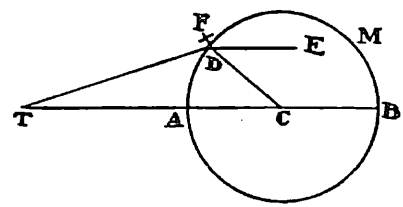
Mediante la teoría de la gravedad he determinado también que la acción del Sol sobre la Luna es algo mayor cuando el diámetro transversal de la órbita de la Luna pasa por el Sol que cuando el mismo diámetro es perpendicular a la línea que une la Tierra y el Sol, por lo que la órbita de la Luna es algo mayor en el primer caso que en el segundo. De ello se deriva otra ecuación del movimiento medio de la Luna que depende de la situación

del apogeo de la Luna con respecto al Sol, ecuación que es máxima cuando el apogeo de la Luna está en los octantes del Sol y desaparece cuando el apogeo llega a las cuadraturas o las sicigias, sumándose al movimiento medio mientras el apogeo de la Luna pasa de la cuadratura del Sol a la sicigia y restándose mientras el apogeo pasa de la sicigia a la cuadratura. Esta ecuación, que llamaré semianual, llega aproximadamente a 3'45" cuando es máxima, en los octantes del apogeo, en la medida en que me ha sido posible determinarlo a partir de los fenómenos, y ésa es su cantidad a la distancia media del Sol a la Tierra. Pero aumenta y disminuye en proporción inversa al cubo de la distancia del Sol, por lo que es aproximadamente 3'34" cuando dicha distancia es máxima y 3'56" cuando es mínima. Pero cuando el apogeo de la Luna está fuera de los octantes deviene menor, y es a su cantidad máxima como el seno del doble de la distancia entre el apogeo de la Luna y su sicigia o cuadratura más próxima es al radio.

Según la misma teoría de la gravedad, la acción del Sol sobre la Luna es algo mayor cuando la línea de los nodos de la Luna pasa por el Sol que cuando está en ángulo recto con la línea que une el Sol y la Tierra, de donde surge otra ecuación del movimiento medio de la Luna, que llamaré semianual segunda, ecuación que es máxima cuando los nodos están en los octantes del Sol y desaparece cuando están en las sicigias o cuadraturas, siendo en otras posiciones de los nodos proporcional al seno del doble de la distancia de cualquiera de los nodos a la sicigia o cuadratura más próxima, sumándose al movimiento medio de la Luna si el Sol está detrás del nodo más próximo a él y restándose si está delante. Y en los octantes, donde su magnitud es máxima, llega a 47" a la distancia media del Sol a la Tierra, como determino según la ley de la gravedad. A otras distancias del Sol, esta ecuación, máxima en los octantes de los nodos, es inversamente proporcional al cubo de la distancia del Sol a la Tierra, por lo que en el perigeo del Sol llega aproximadamente a los 49" y en su apogeo aproximadamente a los 45".

Según la misma teoría de la gravedad, el apogeo de la Luna avanza a su velocidad máxima cuando está en conjunción con el Sol o en oposición a él, pero retrocede en sus cuadraturas con el Sol, alcanzado la excentricidad su cantidad máxima en el primer caso y su cantidad mínima en el segundo, a tenor de los Corolarios VII, VIII y IX de la Proposición LXVI, Libro I. Y estas desigualdades, según los mencionados Corolarios, son muy

grandes, y dan lugar al principio que llamo ecuación semianual del apogeo, cuya cantidad máxima resulta ser aproximadamente 12° 18′, en la medida en que me ha sido posible determinarla a partir de los fenómenos. Nuestro compatriota *Horrox* fue el primero en anunciar la teoría de que la Luna se mueve por una elipse en torno a la Tierra, situada en su foco inferior. El doctor *Halley* mejoró esta noción situando el centro de la elipse en un epiciclo cuyo centro gira uniformemente en torno a la Tierra, y del movimiento en este epiciclo surgen las mencionadas desigualdades del progreso y regresión del apogeo y de la cantidad de excentricidad. Divídase en 100000 partes la distancia media de la Luna a la Tierra y representen T la Tierra y TC la excentricidad media de la Luna, de 5505 partes. Prolónguese TC hasta B de forma que CB sea el seno de la ecuación semianual máxima, 12° 18′, para el radio TC, y el círculo BDA, descrito con centro C y radio CB, será el mencionado epiciclo, donde está situado el centro de la órbita de la Luna, que gira según el orden BDA de las letras. Trácese el ángulo BCD igual a dos veces el argumento anual, o dos veces la distancia del lugar verdadero del Sol al apogeo de la Luna corregido una vez y CTD será la ecuación semianual del apogeo de la Luna y TD la excentricidad de su órbita, tendente al lugar del apogeo ahora dos veces corregido. Pues bien, conociendo el movimiento medio de la Luna, el lugar de su apogeo y su excentricidad, así como el eje mayor de su órbita, 200000, el lugar verdadero de la Luna en su órbita y su distancia a la Tierra pueden determinarse mediante los métodos generalmente conocidos.



En el perihelio de la Tierra, donde la fuerza del Sol es máxima, el centro de la órbita de la Luna se mueve en torno al centro C más deprisa que en el afelio, y ello en proporción inversa al cubo de la distancia del Sol a la Tierra. Sin embargo, como la ecuación del centro solar está incluida en el argumento anual, el centro de la órbita de la Luna se mueve más deprisa en su epiciclo BDA, en proporción inversa al cuadrado de la distancia del Sol a la Tierra. En consecuencia, para que pueda moverse aún más deprisa, en proporción inversa a la distancia, supóngase que desde D, centro de la órbita, se traza una línea

recta DE tendente hacia el apogeo de la Luna corregido una vez, es decir, paralela a TC, tómese el ángulo EDF igual al exceso del mencionado argumento anual sobre la distancia del apogeo de la Luna al perigeo anterior del Sol, o, lo que viene a ser lo mismo, tómese el ángulo CDF igual al complemento de la anomalía verdadera del Sol a 360°, sea DF a DC como dos veces la excentricidad de la gran órbita a la distancia del Sol a la Tierra y el movimiento diario medio del Sol desde el apogeo de la Luna al movimiento diario medio del Sol desde su propio apogeo, juntamente, es decir, como $33\frac{7}{8}$ a 1000 y 52′27″16‴ a 59′8″10‴ juntamente, o como 3 a 100, e imagínese que el centro de la órbita de la Luna, situado en el punto F, gira por un epiciclo con centro D y radio DF, pues de esta forma el centro de la órbita de la Luna describirá una determinada línea curva en torno al centro C con una velocidad que será casi inversamente proporcional al cubo de la distancia del Sol a la Tierra, como debe ser.

Calcular este movimiento es difícil, pero la labor puede facilitarse mediante la siguiente aproximación. Dividiendo, como antes, la distancia media de la Luna a la Tierra en 100000 partes y atribuyendo a la excentricidad TC 5505 de dichas partes, la línea CB o CD resultará ser $1172\frac{3}{4}$, y DF $35\frac{1}{5}$ de dichas partes, y esta línea DF, a la distancia TC, subtiende desde la Tierra el ángulo que el traslado del centro de la órbita del lugar D al lugar F genera en el movimiento de dicho centro, y el doble de esta línea DF en posición paralela, a la distancia del foco superior de la órbita de la Luna a la Tierra, subtiende desde la Tierra el mismo ángulo que antes DF, generado por aquel traslado en el movimiento de dicho foco superior. Sin embargo, a la distancia de la Luna a la Tierra, esta doble línea 2DF, en el foco superior, en posición paralela a la primera línea DF, subtiende desde la Luna un ángulo generado en el movimiento de la Luna por el mencionado traslado, ángulo que, en consecuencia, puede denominarse segunda ecuación del centro de la Luna. Y esta ecuación, a la distancia media de la Luna a la Tierra, es aproximadamente como el seno del ángulo que esa línea DF contiene con la línea trazada desde el punto F a la Luna, y cuando es máxima llega a 2′25″. Pero el ángulo que la línea DF contiene con la línea trazada desde el punto F a la Luna se determina tanto restando el ángulo EDF a la anomalía media de la Luna como sumando la distancia de la Luna al Sol a la distancia del apogeo de la Luna al apogeo del Sol. Y 2′25″ es a

la segunda ecuación del centro como el radio es al seno del ángulo así determinado, debiendo añadirse si la suma antes mencionada es inferior a un semicírculo y sustraerse si es mayor. Y mediante el lugar de la Luna en su órbita así corregido puede determinarse su longitud en las sicigias de las luminarias.

La atmósfera de la Tierra refracta la luz del Sol hasta una altura de 35 ó 40 millas. Esta refracción disemina y esparce la luz sobre la sombra de la Tierra, y la luz disipada cerca de los límites de la sombra dilata la sombra. Debido a ello, en los eclipses lunares añado 1 ó $1\frac{1}{3}$ minutos al diámetro de la sombra que resulta de la paralaje.

Pero la teoría de la Luna debiera examinarse y probarse en base a los fenómenos, primero en las sicigias, después en las cuadraturas y, finalmente, en los octantes. Quien decida emprender esta labor encontrará útil asumir los siguientes movimientos medios del Sol y la Luna en el *Real Observatorio* de *Greenwich* al mediodía del último día de diciembre del año 1700: movimiento medio del Sol, ♑ 20°43'40", y de su apogeo ♋ 7°44'30"; movimiento medio de la Luna, ♒15°21'00", de su apogeo ♓ 8°20'00", y de su nodo ascendente ☊ 27°24'20", y la diferencia de meridianos entre el Observatorio de *Greenwich* y el *Real Observatorio* de *París*, $0^h9^m20^s$. Sin embargo, el movimiento medio de la Luna y de su apogeo no se han determinado todavía con exactitud suficiente.

PROPOSICIÓN XXXVI. PROBLEMA XVII

Determinar la fuerza del Sol para mover el mar.

La fuerza del Sol ML o PT para perturbar los movimientos de la Luna era en las cuadraturas de la Luna (por la Proposición XXV) a la fuerza de la gravedad entre nosotros como 1 a 638092,6, y la fuerza TM − LM o 2PK en las sicigias de la Luna es el doble de esa cantidad. Sin embargo, descendiendo a la superficie de la Tierra, estas fuerzas disminuyen en proporción a las distancias al centro de la Tierra, es decir, en la proporción de $60\frac{1}{2}$ a 1, por lo que la primera fuerza en la superficie de la Tierra es a la fuerza de la gravedad como 1 a 38604600, fuerza que deprime el mar en los lugares situados a 90 grados de distancia del Sol. Pero la otra fuerza, que es dos veces mayor, no eleva el

mar solamente en los lugares situados directamente bajo el sol, sino también en los lugares precisamente opuestos, y la suma de estas fuerzas es a la fuerza de la gravedad como 1 a 12868200. Y dado que la misma fuerza excita el mismo movimiento, tanto si deprime las aguas en los lugares a 90 grados de distancia del Sol como si las eleva en los lugares que están directamente debajo o son precisamente opuestos, la mencionada suma será la fuerza total del Sol para perturbar el mar, y tendrá el mismo efecto que si toda ella se emplease en elevar el mar en los lugares situados directamente bajo el sol o precisamente opuestos a él y no actuase en absoluto en los lugares apartados 90 grados. del Sol.

Y ésta es la fuerza del Sol para perturbar el mar en cualquier lugar dado donde el Sol está al mismo tiempo en la vertical y a su distancia media a la Tierra. En otras posiciones del Sol, su fuerza para elevar el mar es directamente proporcional al seno verso del doble de su altitud sobre el horizonte del lugar, e inversamente proporcional al cubo de la distancia a la Tierra.

COROLARIO. Puesto que la fuerza centrífuga de las partes de la Tierra que obedece al movimiento diurno de la Tierra y es a fuerza de la gravedad como 1 es a 289 eleva las aguas bajo el ecuador a una altura que excede a la altura en los polos en 85472 pies de *París*, como hemos visto más arriba, en la Proposición XIX, la fuerza del Sol, que acabamos de mostrar es a la fuerza de la gravedad como 1 a 12868200, por lo que es a aquella fuerza centrífuga como 289 a 12868200, o como 1 a 44527, sólo podrá elevar las aguas de los lugares situados directamente bajo el Sol o precisamente opuestos a él hasta una altura que excede en un pie de *París* y $113\frac{1}{30}$ pulgadas a la de los lugares apartados a 90 grados del Sol, pues esta medida es a la medida de 85472 pies como 1 a 44527.

PROPOSICIÓN XXXVII. PROBLEMA XVIII

Determinar la fuerza de la Luna para mover el mar.

La fuerza de la Luna para mover el mar debe deducirse de su razón a la fuerza del Sol, y esta razón debe determinarse a partir de la razón de los movimientos del mar, efectos de dichas fuerzas. En la desembocadura del río *Avon*, tres millas más abajo

de *Bristol*, la altura del ascenso del agua en las sicigias vernales y otoñales de las luminarias llega (según las observaciones de *Samuel Sturmy*) a unos 45 pies, pero en las cuadraturas tan sólo a 25. La primera de estas alturas obedece a la suma de las mencionadas fuerzas, la segunda a su diferencia. En consecuencia, suponiendo que S y L representen, respectivamente, las fuerzas del Sol y la Luna cuando están en el ecuador y a su distancia media de la Tierra, tendremos que L+S es a L−S como 45 a 25, o como 9 a 5.

En *Plymouth* (según las observaciones de *Samuel Colepress*), la altura media de la marea es de unos 16 pies, y en primavera y otoño la altura de la misma en las sicigias puede superar a la altura en las cuadraturas en más de 7 u 8 pies. Supóngase que la diferencia máxima entre dichas alturas sea de 9 pies, y L+S será a L−S como $20\frac{1}{2}$ a $11\frac{1}{2}$, o como 41 a 23, proporción que concuerda suficientemente bien con la anterior. Pero, debido a la gran marea de *Bristol*, es mejor basarse en las observaciones de *Sturmy*, por lo que, hasta que tengamos datos más seguros, utilizaremos la proporción de 9 a 5.

Sin embargo, debido a los movimientos recíprocos de las aguas, las mareas máximas no coinciden con las sicigias de las luminarias, sino que, como ya hemos indicado, son las terceras después de las sicigias, o (calculando a partir de las sicigias) siguen a la tercera aproximación de la Luna al meridiano del lugar, o más bien (como observa *Sturmy*) son las terceras después del día de la Luna nueva o llena, o más bien aproximadamente después de la duodécima hora tras la Luna nueva o llena, por lo que tienen lugar aproximadamente en la cuadragésimo tercera hora tras la Luna nueva o llena. Pero en este puerto ocurren aproximadamente en la séptima hora tras la aproximación de la Luna al meridiano del lugar, por lo que siguen a la aproximación de la Luna al meridiano cuando la Luna está lejos del Sol o ha avanzado unos 18 ó 19 grados desde su oposición al Sol. Tampoco las estaciones de verano e invierno llegan a su altura en los solsticios mismos, sino cuando el Sol ha sobrepasado los solsticios en aproximadamente una décima parte de su curso completo. Igualmente, la marea máxima se eleva tras la aproximación de la Luna al meridiano cuando la Luna ha sobrepasado al Sol, *o a la oposición al mismo*, en aproximadamente una décima parte del movimiento completo de *una* marea *máxima* a *la siguiente* marea *máxima*. Supóngase que esa distancia es de unos $18\frac{1}{2}$ grados, y, a esta distancia de

la Luna a las sicigias y cuadraturas, el momento de la fuerza del Sol para aumentar o disminuir la parte del movimiento del mar que obedece al movimiento de la Luna será menor que en las sicigias y cuadraturas mismas, en la proporción del radio al coseno del doble de esta distancia, o de un ángulo de 37 grados, es decir, en la razón de 10000000 a 7986355, por lo que en la analogía precedente en lugar de S debemos poner 0,7986355S.

Pero la fuerza de la Luna en las cuadraturas debe también disminuirse en razón de su declinación del ecuador, pues la Luna, en esas cuadraturas, o más bien sobrepasadas las cuadraturas en $18\frac{1}{2}$ grados, declina del ecuador aproximadamente $23^{c}13'$, y la fuerza de las luminarias para mover el mar disminuye a medida que éstas declinan del ecuador aproximadamente como el cuadrado del coseno de la declinación, por lo que la fuerza de la Luna en esas cuadraturas es solamente 0,8570327L, de donde tenemos L+0,7986355S a 0,8570327L−0,7986355S como 9 a 5.

Por lo demás, los diámetros de la órbita en que la Luna se movería si no consideramos su excentricidad son uno con respecto de otro como 69 a 70, por lo que la distancia de la Luna a la Tierra en las sicigias es a su distancia en las cuadraturas, en igualdad de las restantes condiciones, como 69 a 70, y sus distancias cuando ha sobrepasado en $18\frac{1}{2}$ grados las sicigias, excitando la marea máxima, y cuando ha sobrepasado en $18\frac{1}{2}$ grados las cuadraturas, produciendo la marea mínima, son a su distancia media como 69,098747 y 69,897345 a $69\frac{1}{2}$. Pero la fuerza de la Luna para mover el mar varía en proporción inversa al cubo de su distancia, por lo que sus fuerzas en la mayor y la menor de dichas distancias son a su fuerza en la distancia media como 0,9830427 y 1,017522 es a 1. De donde tenemos 1,017522L+0,7986355S a 0,9830427 ×0,8570327L−0,7986355S como 9 a 5. En consecuencia, puesto que la fuerza del Sol es a la fuerza de la gravedad como 1 a 12868200, la fuerza de la Luna será a la fuerza de la gravedad como 1 a 2871400.

COROLARIO I. Puesto que las aguas atraídas por la fuerza del Sol se elevan hasta una altura de 1 pie y $11\frac{1}{30}$ pulgadas, la fuerza de la Luna las elevará hasta una altura de 8 pies y $7\frac{5}{22}$ pulgadas, y las fuerzas conjuntas de ambos las elevarán hasta una altura de $10\frac{1}{2}$ pies, o de $12\frac{1}{2}$ pies y más aún cuando la Luna está en su perigeo, sobre todo si el viento sopla en la dirección de la marea. Y una fuerza de esta magnitud es ampliamente

suficiente para producir todos los movimientos del mar, y concuerda bien con la razón de estos movimientos, pues en los mares libres y abiertos de Este a Oeste, como el mar *Pacífico*, y en los sectores de los mares *Atlántico* y *Etiópico* situados fuera de los trópicos, las aguas se elevan generalmente hasta 6, 9, 12 ó 15 pies. Pero se dice que en el mar *Pacífico*, cuya profundidad y extensión son mayores, las mareas son mayores que en los mares *Atlántico* y *Etiópico*, porque para elevar por completo una marea se necesita una extensión de mar de Este a Oeste no inferior a los 90 grados. En el mar *Etiópico*, las aguas alcanzan menor altura dentro de los trópicos que en las zonas templadas, debido a la estrechez del mar entre *Africa* y las partes meridionales de *América*. Las aguas no pueden elevarse en mitad del mar abierto sin bajar al mismo tiempo tanto en las costas orientales como en las occidentales, a pesar de que en nuestros estrechos mares deberian bajar por turnos alternos en dichas costas. Debido a ello, la pleamar y la bajamar son por lo común pequeñas en las islas situadas a gran distancia del continente. Por el contrario, en algunos puertos, donde las aguas son impulsadas con gran violencia por canales de escasa profundidad para llenar y vaciar alternativamente las bahías, la pleamar y la bajamar tienen que ser mayores de lo normal, como ocurre en *Plymouth* y *Chepstow Bridge*, en *Inglaterra*, en las montañas de *San Miguel* y el pueblo de *Avranches*, en *Normandía*, y en *Cambaia* y *Pegu*, en las *Indias Orientales*. En estos lugares, el mar penetra y sale con tal violencia que a veces inunda las costas y a veces las deja secas por espacio de muchas millas. Y esta fuerza de flujo y reflujo no se detiene hasta haber elevado o deprimido las aguas 30, 40, 50 ó más pies. Lo mismo puede decirse de los canales o estrechos largos y poco profundos, como el estrecho de *Magallanes* y los canales que circundan *Inglaterra*. En dichos puertos y estrechos, la violencia del flujo y reflujo aumenta mucho la marea. Sin embargo, en las costas que se extienden hacia el mar abierto y profundo con un desnivel pronunciado, donde las aguas pueden elevarse y bajar libremente, sin tal precipitación de flujos y reflujos, la razón de las mareas concuerda con las fuerzas del Sol y la Luna.

COROLARIO II. Puesto que la fuerza de la Luna para mover el mar es a la fuerza de la gravedad como 1 a 2871400, es evidente que esta fuerza es inapreciable en experimentos estáticos o hidrostáticos, e incluso en los experimentos con péndulos. Esta fuerza sólo se manifiesta sensiblemente en las mareas.

COROLARIO III. Puesto que la fuerza de la Luna para mover el mar es a la fuerza del Sol para lo mismo como 4,4815 a 1, y puesto que dichas fuerzas (por el Corolario XIV de la Proposición LXVI, Libro I) son como las densidades de los cuerpos del Sol y la Luna y los cubos de sus diámetros aparentes juntamente, la densidad de la Luna será a la densidad del Sol directamente como 4,4815 a 1, e inversamente como el cubo del diámetro de la Luna al cubo del diámetro del Sol, es decir (dado que los diámetros aparentes medios de la Luna y el Sol son $31'16\frac{1}{2}''$ y $32'12''$), como 4891 a 1000. Pero la densidad del Sol era a la densidad de la Tierra como 1000 a 4000, por lo que la densidad de la Luna es a la densidad de la Tierra como 4891 es a 4000, o como 11 a 9. En consecuencia, el cuerpo de la Luna es más denso y más terroso que la misma Tierra.

COROLARIO IV. Y puesto que el diámetro verdadero de la Luna (según las observaciones de los astrónomos) es al diámetro verdadero de la Tierra como 100 a 365, la masa de materia de la Luna será a la masa de materia de la Tierra como 1 a 39,788.

COROLARIO V. Y la gravedad acelerativa en la superficie de la Luna será aproximadamente tres veces menor que la gravedad acelerativa en la superficie de la Tierra.

COROLARIO VI. Y la distancia del centro de la Luna al centro de la Tierra será a la distancia del centro de la Luna al centro de gravedad común de la Tierra y la Luna como 40,788 a 39,788.

COROLARIO VII. Y la distancia media del centro de la Luna al centro de la Tierra será (en los octantes de la Luna) aproximadamente $60\frac{2}{5}$ semidiámetros máximos de la Tierra, pues el semidiámetro máximo de la Tierra era 19658600 pies de *París*, y la distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna, compuesta de $60\frac{2}{5}$ de dichos semidiámetros, es igual a 1187379440 pies. Y esta distancia (por el Corolario precedente) es a la distancia del centro de la Luna al centro de gravedad común de la Tierra y la Luna como 40,788 a 39,788, por lo que esta última distancia es 1158268634 pies. Y puesto que la Luna, con respecto a las estrellas fijas, completa su revolución en $27^d 7^h 43\frac{1}{9}^m$, el seno verso del ángulo descrito por la Luna en un minuto de tiempo es 12752341 con radio 1.000.000.000.000.000, y 1158268534 pies son a 14,7706353 pies como el radio a este seno verso. En consecuencia, la Luna, cayendo hacia la Tierra por la fuerza que la retiene en su órbita, describiría 14,7706353 pies en un minuto de tiempo, y si aumentamos esta fuerza en

la proporción de $178\frac{29}{40}$ a $177\frac{29}{40}$, tendremos la fuerza total de la gravedad en la órbita de la Luna, por el Corolario de la Proposición III, y la Luna, cayendo por esta fuerza, describiría 14,8538067 pies en un minuto de tiempo. Y a la 60ava parte de la distancia de la Luna al centro de la Tierra, es decir, a una distancia de 197896573 pies del centro de la Tierra; un cuerpo, cayendo por su peso, describiría igualmente 14,8538067 pies en un segundo de tiempo. En consecuencia, a una distancia de 19615800 pies, que es la de un semidiámetro medio de la Tierra, un cuerpo pesado describiría en su caída 15,11175 pies, ó 15 pies, 1 pulgada y $4\frac{1}{11}$ líneas, en el mismo tiempo. Este será el descenso de los cuerpos en una latitud de 45 grados. Y, según la tabla expuesta en la Proposición XX, el descenso en la latitud de *París* será un poco mayor, con un exceso de unas $\frac{2}{3}$ partes de línea. En consecuencia, a tenor de estos cálculos, un cuerpo pesado que caiga en el vacío en la latitud de *París* describirá 15 pies de *París*, 1 pulgada, $4\frac{25}{33}$ líneas, muy aproximadamente, en un segundo de tiempo. Y si la gravedad es disminuida restando una cantidad igual a la fuerza centrífuga que en esa latitud obedece al movimiento diurno de la Tierra, el cuerpo pesado describirá al caer allí 15 pies, 1 pulgada y $1\frac{1}{2}$ líneas en un segundo de tiempo. Y esta es la velocidad con que los cuerpos pesados caen realmente en la latitud de *París*, como hemos expuesto más arriba, en las Proposiciones IV y XIX.

COROLARIO VIII. La distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna en las sicigias de la Luna es igual a 60 semidiámetros máximos de la Tierra, sustrayendo tan sólo una 30ava parte de semidiámetro. En las cuadraturas de la Luna, la distancia media entre los mismos centros es de $60\frac{5}{6}$ semidiámetros máximos de la Tierra, pues estas dos distancias son a la distancia media de la Luna en los octantes como 69 y 70 a $69\frac{1}{2}$, por la Proposición XXVIII.

COROLARIO IX. La distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna en las sicigias de la Luna es de 60 semidiámetros medios de la Tierra y una décima parte de semidiámetro, y en las cuadraturas de la Luna la distancia media entre los mismos centros es de 61 semidiámetros medios de la Tierra, sustrayendo una 30ava parte de semidiámetro.

COROLARIO X. En las sicigias de la Luna, su paralaje horizontal media en las latitudes de 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90 grados es, respectivamente, 57'20", 57'16", 57'14", 57'12", 57'10", 57'8", 57'4".

En estos cálculos no tomo en consideración la atracción magnética de la Tierra, cuya cantidad es muy pequeña y desconocida. Si esta cantidad llega alguna vez a averiguarse, y si las medidas en grados sobre el meridiano, las longitudes de péndulos isócronos en diferentes paralelos, las leyes de los movimientos del mar y la paralaje de la Luna, junto con los diámetros aparentes del Sol y la Luna, pudieran determinarse con mayor exactitud en base a los fenómenos, podríamos realizar estos cálculos con mayor precisión.

PROPOSICIÓN XXXVIII. PROBLEMA XIX

Determinar la figura del cuerpo de la Luna.

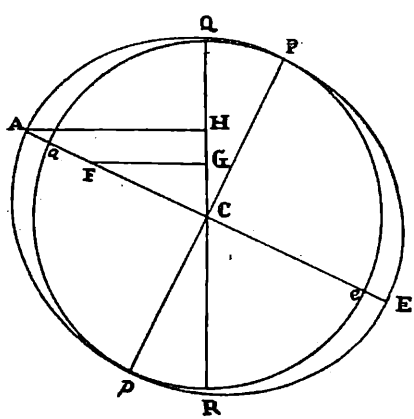
Si el cuerpo de la Luna fuera fluido como nuestro mar, la fuerza de la Tierra para elevar dicho fluido en las partes más próximas y más remotas sería a la fuerza de la Luna por la que nuestro mar es elevado en los lugares situados bajo ella y los opuestos como la gravedad acelerativa de la Luna hacia la Tierra es a la gravedad acelerativa de la Tierra hacia la Luna y como el diámetro de la Luna es al diámetro de la Tierra juntamente, es decir, como 39,788 a 1 y 100 a 365 juntamente, o como 1081 a 100. En consecuencia, puesto que la fuerza de la Luna eleva nuestro mar $8\frac{3}{5}$ pies, la fuerza de la Tierra elevaría el fluido lunar 93 pies, por lo que la figura de la Luna sería un esferoide cuyo diámetro máximo prolongado pasaría por el centro de la Tierra, excediendo a los diámetros perpendiculares a él en 186 pies. En consecuencia, la Luna posee esta figura, y así tiene que haber sido desde el principio. Q.E.I.

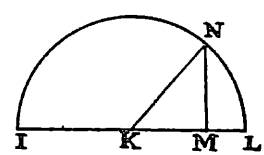
COROLARIO. A ello se debe que la misma cara de la Luna esté siempre vuelta hacia la Tierra. Y el cuerpo de la Luna no podría estar en ninguna otra posición, porque siempre volvería, por un movimiento libratorio, a esta situación. Estas libraciones, sin embargo, deben ser extremadamente lentas, debido a la debilidad de las fuerzas que las excitan, por lo que la cara de la Luna que debe dirigirse hacia la Tierra podría, por la razón expuesta en la Proposición XVII, volverse hacia el otro foco de la órbita de la Luna sin corregirse inmediatamente y volverse de nuevo hacia la Tierra.

LEMA PRIMERO

Si APE*p representa la Tierra uniformemente densa, marcada con centro* C, *polos* P *y p y ecuador* AE, *y suponemos que en torno al centro* C, *mediante radio* CP, *se describe la esfera* Pape, *y que* QR *representa el plano sobre el que se levanta en ángulo recto una línea recta trazada desde el centro del Sol al centro de la Tierra, y suponemos también que las diversas partículas de toda la Tierra exterior* PapAPepE, *fuera de la altura de dicha esfera, pugnan por alejarse del plano* QR *hacia uno y otro lado, cada partícula por una fuerza proporcional a su distancia a dicho plano, afirmo, en primer lugar, que toda la fuerza y eficacia de todas las partículas situadas en* AE, *círculo del ecuador, y dispuestas uniformemente alrededor del globo, circundando el mismo como un anillo, para hacer que la Tierra gire en torno a su centro, es a toda la fuerza y eficacia de otras tantas partículas en el punto* A *del ecuador que se encuentra a la mayor distancia del plano* QR, *para hacer que la Tierra gire en torno a su centro con el mismo movimiento circular, como* 1 *es a* 2. *Y ese movimiento circular se realizará en torno a un eje situado en la sección común del ecuador y el plano* QR.

Descríbase desde el centro K, con diámetro IL, el semicírculo INL. Supóngase que la semicircunferencia INL está dividida en innumerables partes iguales y abátanse los senos NM sobre el diámetro IL desde las diversas partes N. Entonces las sumas de los cuadrados de todos los senos NM serán iguales a las sumas de los cuadrados de los senos KM, y ambas sumas juntas serán





iguales a las sumas de los cuadrados de otros tantos semidiámetros KN, por lo que la suma de los cuadrados de todos los senos NM será solamente la mitad de la suma de los cuadrados de otros tantos semidiámetros KN.

Supóngase ahora que la circunferencia del círculo AE se divide en el mismo número de pequeñas partes iguales, y que desde cada una de estas partes F se abate una perpendicular FG sobre el plano QR, así como la perpendicular AH desde el punto A. Entonces la fuerza por la que la partícula F se aleja del plano QR será (por suposición) como esa perpendicular FG, y esta fuerza, multiplicada por la distancia CG, representará el poder de la partícula F para hacer que la Tierra gire en torno a su centro. En consecuencia, el poder de una partícula en el lugar F será al poder de una partícula en el lugar A como $FG \times GC$ es a $AH \times HC$, es decir, como FC^2 a AC^2, por lo que el poder total de todas las partículas F en sus lugares adecuados F será al poder del mismo número de partículas en el lugar A como la suma de todas las FC^2 es a la suma de todas las AC^2, es decir (por lo que antes hemos demostrado), como 1 es a 2. Q.E.D.

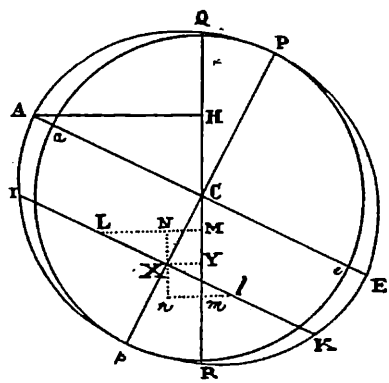
Y dado que la acción de esas partículas se ejerce por la dirección de líneas que se alejan perpendicularmente del plano QR e igualmente desde cada lado de este plano, girarán en torno a la circunferencia del círculo del ecuador, junto con el cuerpo adherente de la Tierra, alrededor de un eje situado tanto en el plano QR como en el del ecuador.

LEMA II

Supuestas las mismas cosas, afirmo, en segundo lugar, que la fuerza total o poder de todas las partículas situadas en todas las partes de la esfera para hacer que la Tierra gire en torno al mencionado eje es a toda la fuerza del mismo número de partículas uniformemente dispuestas en forma de anillo alrededor de toda la circunferencia del ecuador AE *para hacer que toda la Tierra gire con el mismo movimiento circular como* 2 *es a* 5.

Pues sean IK cualquier círculo menor paralelo al ecuador AE y L, *l* cualesquiera dos partículas iguales en este círculo, situadas fuera de la esfera P*ape*, y si abatimos las perpendiculares LM, *lm* sobre el plano QR, que está en ángulo recto con un

radio trazado al Sol, las fuerzas totales con que estas partículas se alejan del plano QR serán proporcionales a las perpendiculares LM, *lm*. Trácese la línea recta L*l* paralela al plano P*ape* y biséctese dicha línea en X, trácese N*n*, paralela al plano QR, por el punto X, hasta su encuentro con las perpendiculares LM, *lm* en N y *n*, y abátase la perpendicular XY sobre el plano QR. Y las fuerzas contrarias de las partículas L y *l* para hacer que la Tierra gire en direcciones opuestas son como LM × MC y *lm* × *m*C, es decir, como LN × MC + NM × MC, y *ln* × *m*C − *nm* × *m*C, o LN × MC + NM × MC y LN × *m*C − NM × *m*C, y LN × M*m* − NM × (MC + *m*C), diferencia entre las dos, es la fuerza conjunta de ambas para hacer que la Tierra gire. La parte positiva de esta diferencia, LN × M*m*, o 2LN × NX, es a 2AH × HC, fuerza de dos partículas del mismo tamaño situadas en A, como LX^2 a AC^2, y la parte negativa, NM × (MC + *m*C), o 2XY × CY, es a 2AH × HC, fuerza de las mismas dos partículas situadas en A, como CX^2 a AC^2. En consecuencia, la diferencia entre las partes, es decir, la fuerza conjunta de las dos partículas L y *l* para hacer que la Tierra gire, es a la fuerza de dos partículas iguales a las anteriores y situadas en el lugar A para hacer que la Tierra gire de la misma manera como $LX^2 - CX^2$ es a AC^2. Pero si se supone que la circunferencia IK del círculo IK está dividida en un número infinito de pequeñas partes iguales L, todas las LX^2 serán al mismo número de IX^2 como 1 a 2 (por el Lema I), y el mismo número de AC^2 como IX^2 es a $2AC^2$, y el mismo número de CX^2 a otras tantas AC^2 como $2CX^2$ es a $2AC^2$. En consecuencia, las fuerzas unidas de todas las partículas en la circunferencia del círculo IK son a las fuerzas conjuntas de otras tantas partículas en el punto A como $IX^2 - 2CX^2$ es a $2AC^2$, por lo que (por el Lema I) son a las fuerzas unidas de otras tantas partículas en la circunferencia del círculo AE como $IX^2 - 2CX^2$ es a AC^2.



Pues bien, si se imagina que P*p*, diámetro de la esfera, está dividido en un número infinito de partes iguales, en las que se apoya un número igual de círculos IK, la materia en la

circunferencia de cada uno de los círculos IK será como IX^2, por lo que la fuerza de esa materia para hacer que la Tierra gire será como IX^2 por $IX^2 - 2CX^2$, y la fuerza de esta misma materia, si estuviera situada en la circunferencia del círculo AE, sería como IX^2 por AC^2. En consecuencia, la fuerza de todas las partículas de toda la materia situada fuera de la esfera en las circunferencias de todos los círculos es a la fuerza del mismo número de partículas situadas en la circunferencia del círculo AE como todas las IX^2 por $IX^2 - 2CX^2$ es a otras tantas IX^2 por AC^2, es decir, como todas las $AC^2 - CX^2$ por $AC^2 - 3CX^2$ a otras tantas $AC^2 - CX^2$ por AC^2, es decir, como todas las $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ a otras tantas $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, es decir, como toda la cantidad fluyente cuya fluxión es $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ es a toda la cantidad fluyente cuya fluxión es $AC^4 - AC^2 \times CX^2$ y, en consecuencia, por el método de fluxiones, como $AC^4 \times CX - \frac{4}{3}AC^2 \times CX^3 + \frac{3}{5}CX^5$ es a $AC^4 \times CX - \frac{1}{3}AC^2 \times CX^3$, es decir, si por CX ponemos todo Cp, o AC, como $\frac{4}{15}AC^5$ es a $\frac{2}{3}AC^5$, es decir, como 2 es a 5. Q.E.D.

LEMA III

Supuestas las mismas cosas, afirmo, en tercer lugar, que el movimiento de toda la Tierra en torno al eje arriba mencionado, que obedece al movimiento de todas las partículas, estará al movimiento del mencionado anillo en torno al mismo eje en razón compuesta de la razón de la materia en la Tierra a la materia en el anillo y la razón de tres cuadrados del arco del cuadrante de cualquier círculo a dos cuadrados de su diámetro, es decir, en la razón de la materia a la materia, y del número 925275 *al número* 1000000.

Pues el movimiento de un cilindro que gira en torno a su eje en reposo es al movimiento de la esfera inscrita que gira con él como cualesquiera cuatro cuadrados son a tres círculos inscritos en tres de dichos cuadrados, y el movimiento de este cilindro es al movimiento de un anillo extremadamente delgado que circunde la esfera y el cilindro en su común contacto como el doble de la materia en el cilindro es al triple de la materia en el anillo. Y este movimiento del anillo, uniformemente continuado en torno al eje del cilindro, es al movimiento uniforme del

mismo realizado en el mismo tiempo periódico en torno a su propio diámetro como la circunferencia de un círculo es al doble de su diámetro.

HIPÓTESIS II

Si las demás partes de la Tierra desaparecieran y el anillo restante fuera trasladado sólo en torno al Sol, en la órbita de la Tierra, por el movimiento anual, mientras el movimiento diario lo hacía girar al mismo tiempo en torno a su eje inclinado hacia el plano de la eclíptica en un ángulo de $23\frac{1}{2}$ *grados, el movimiento de los equinoccios sería igual tanto si el anillo fuera fluido como si consistiera de materia dura y rígida.*

PROPOSICIÓN XXXIX. PROBLEMA XX

Determinar la precesión de los equinoccios.

El movimiento horario medio de los nodos de la Luna en una órbita circular, cuando los nodos están en las cuadraturas, era de $16''35'''16^{iv}36^{v}$. La mitad del mismo, $8''17'''38^{iv}18^{v}$ es, (por las razones más arriba expuestas) el movimiento horario medio de los nodos en tal órbita, movimiento que en un año sideral completo es de 20°11'46". En consecuencia, puesto que en tal órbita los nodos de la Luna retrocederían anualmente 20°11'46", y puesto que si hubiera más lunas el movimiento de los nodos de cada una de ellas sería (por el Corolario XVI, Proposición LXVI, Libro I) como su tiempo periódico, si una Luna girase sobre la superficie de la Tierra en el tiempo de un día sideral, el movimiento anual de los nodos de esta Luna sería a 20°11'46" como $23^{h}56^{m}$, el día sideral, es a $27^{d}7^{h}43^{m}$, tiempo periódico de nuestra Luna, es decir, como 1436 es a 39343. Y lo mismo ocurriría con los nodos de un anillo de lunas que circundara a la Tierra, tanto si estas lunas no se tocaran mutuamente como si estuvieran soldadas, formando un anillo continuo, aunque dicho anillo se volviera rígido e inflexible.

Supongamos, pues, que este anillo es igual en cantidad de materia a toda la Tierra exterior P*ap*AP*ep*E situada fuera de la

esfera P*ape* (véase figura, Lema II). Puesto que esta esfera es a dicha Tierra exterior como aC^2 es a $AC^2 - aC^2$, es decir (dado que PC o aC, semidiámetro mínimo de la Tierra, es a AC, semidiámetro máximo de la misma, como 229 es a 230), como 52441 es a 459, si el anillo circunda la Tierra por el ecuador y ambos giran en torno al diámetro del anillo, el movimiento del anillo (por el Lema III) será al movimiento de la esfera interior como 459 a 52441 y 1000000 a 925275 juntamente, es decir, como 4590 a 485223, por lo que el movimiento del anillo será a la suma de los movimientos del anillo y la esfera como 4590 es a 489813. En consecuencia, si el anillo se adhiere a la esfera y le comunica el movimiento de retroceso de sus nodos o puntos equinocciales, el movimiento restante en el anillo será a su anterior movimiento como 4590 es a 489813, debido a lo cual el movimiento de los puntos equinocciales disminuirá en la misma razón. En consecuencia, el movimiento anual de los puntos equinocciales del cuerpo compuesto por el anillo y la esfera será al movimiento de 20° 11'46" como 1436 a 39343 y 4590 a 489813 juntamente, es decir, como 100 a 292369. Pero las fuerzas por las que retroceden los nodos de un cierto número de lunas (como más arriba expusimos) y, en consecuencia, retroceden también los puntos equinocciales del anillo (es decir, en la figura de la Proposición XXX, las fuerzas 3IT) son en las diversas partículas como las distancias de dichas partículas al plano QR, y las partículas se alejan de dicho plano por estas fuerzas, por lo que (por el Lema II) si la materia del anillo se esparciera por toda la superficie de la esfera, como ocurre en la figura P*ap*AP*ep*E, para componer esa parte exterior de la Tierra, la fuerza o poder total de todas las partículas para hacer que la Tierra gire en torno a cualquier diámetro del ecuador y, en consecuencia, para mover los puntos equinocciales, sería menor que antes en una proporción de 2 a 5. En consecuencia, la regresión anual de los equinoccios sería ahora a 20°11'46" como 10 es a 73092, es decir, sería $9''56'''50^{iv}$.

Pero como el plano del ecuador está inclinado hacia el de la eclíptica, este movimiento debe disminuirse en la razón del seno 91706 (que es el coseno de $23\frac{1}{2}$ grados) al radio 100000, y el movimiento restante será ahora $9''7'''20^{iv}$, que es la precesión anual de los equinoccios debida a la fuerza del Sol.

Pero la fuerza de la Luna para mover el mar era a la fuerza del Sol aproximadamente como 4,4815 es a 1, y la fuerza de la Luna para mover los equinoccios está en la misma proporción a

la del Sol, por lo que la precesión anual de los equinoccios debida a la fuerza de la Luna resulta ser $40''52'''52^{iv}$, y la precesión anual total debida a las fuerzas unidas de ambos será $50''00'''12^{iv}$, cantidad de movimiento que concuerda con los fenómenos, pues la precesión de los equinoccios, según las observaciones astronómicas, es de unos 50" anuales.

Si la altura de la Tierra en el ecuador supera a su altura en los polos en más de $17\frac{1}{6}$ millas, la materia de la misma será más rara cerca de la superficie que en el centro, y la precesión de los equinoccios aumentará por el exceso de altura y disminuirá por la mayor rareza.

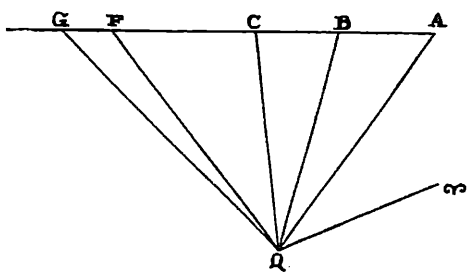
Y una vez descrito el sistema del Sol, la Tierra, la Luna y los planetas, nos resta añadir algo sobre los cometas.

LEMA IV

Los cometas están más allá de la Luna, y se encuentran en las regiones de los planetas.

Así como los astrónomos han establecido que los cometas están más allá de la Luna al observar que carecen de paralaje diaria, su paralaje anual es prueba convincente de que penetran en las regiones de los planetas, pues todos los cometas que se mueven por un curso directo según el orden de los signos devienen más lentos o retrógrados de lo normal cuando se acerca el fin de su aparición, si la Tierra se encuentra entre ellos y el Sol, y más veloces de lo normal si la Tierra se está acercando a una oposición heliocéntrica a ellos. Por otro lado, los que se mueven contra el orden de los signos se hacen más veloces de lo que debieran hacia el fin de su aparición, si la Tierra se encuentra entre ellos y el Sol, y más lentos, y quizá retrógrados, si la Tierra se encuentra en el otro lado de su órbita. Y estos movimientos obedecen fundamentalmente a las diversas situaciones de la Tierra en el curso de su movimiento, igual que ocurre con los planetas, que a veces parecen retrógrados y a veces progresivos, más lentamente o más velozmente en la medida en que el movimiento de la Tierra coincide con el del planeta o va en dirección opuesta. Si la Tierra se mueve en la misma dirección que el cometa, pero, por un movimiento angular en torno al Sol, con mayor velocidad, de forma que las

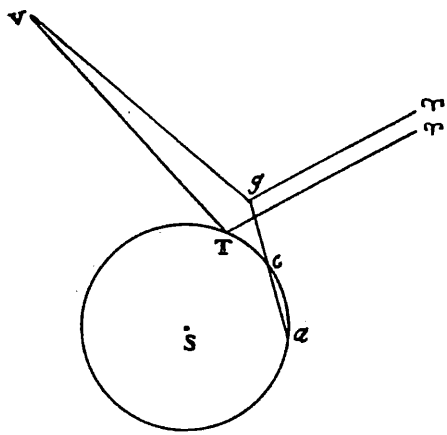
líneas rectas trazadas de la Tierra al cometa convergen hacia las partes situadas más allá del cometa, éste, visto desde la Tierra, parecerá retrógrado, debido a la mayor lentitud de su movimiento. E incluso si la Tierra es más lenta que el cometa, al sustraer el movimiento de la Tierra, el del cometa parecerá al menos retardado. Sin embargo, si la Tierra va en dirección opuesta a la del cometa, el movimiento del cometa parecerá por ello acelerado. Y la distancia del cometa puede inferirse, en base a esta aceleración, retardación o movimiento regresivo aparente, de la siguiente manera. Sean ♈ QA, ♈ QB y ♈ QC tres longitudes del cometa observadas aproximadamente en el tiempo de su primera aparición, y ♈ QF su última longitud observada antes de su desaparición. Trácese la línea recta ABC de forma que sus partes AB y BC, interceptadas entre las líneas rectas QA y QB, QB y QC, puedan ser una con respecto a la otra como los dos tiempos entre las tres primeras observaciones. Prolónguese AC hasta G, de forma que AG pueda ser a AB como el tiempo entre la primera y la última observación es al tiempo entre la primera y la segunda, y únase QG. Entonces, si el cometa se moviera uniformemente por una línea recta y la Tierra estuviera en reposo o avanzara igualmente por una línea recta con movimiento uniforme, el ángulo ♈ QG sería la longitud del cometa en el tiempo de la última observación. En consecuencia, el ángulo FQG, que es la diferencia de longitud, proviene de la desigualdad de los movimientos del cometa y la Tierra, y si la Tierra y el cometa se mueven en dirección opuesta, este ángulo se añade al ángulo ♈ QG y acelera el movimiento aparente del cometa. Pero si el cometa se mueve en la misma dirección que la Tierra, el ángulo debe sustraerse, y retardará el movimiento del cometa o lo hará quizá retrógrado, como acabamos de explicar. En consecuencia, este ángulo, que proviene fundamentalmente del movimiento de la Tierra, puede con justicia considerarse como la paralaje del cometa, ignorando al hacerlo algún pequeño incremento o decremento que pueda obedecer al movimiento desigual del cometa en su órbita. En base a esta paralaje deducimos la distancia del cometa de la siguiente forma. Representen S el Sol



*ac*T la gran órbita, *a* el lugar de la Tierra en la primera observación, *c* el lugar de la Tierra en la tercera observación, T el lugar de la Tierra en la última observación, y T ♈ una línea recta trazada al comienzo de Aries. Trácese el ángulo ♈TV igual al ángulo ♈QF, es decir, igual a la longitud del cometa cuando la Tierra está en T, únase *ac* y prolónguese hasta *g* de forma que *ag* pueda ser a *ac* como AG es a AC, y *g* será el lugar al que la Tierra habría llegado en el tiempo de la última observación si hubiera continuado moviéndose uniformemente por la línea recta *ac*. En consecuencia, si trazamos *g*♈ paralela a T♈ y hacemos el ángulo ♈*g*V igual al ángulo ♈QG, este ángulo ♈*g*V será igual a la longitud del cometa visto desde el lugar *g*, y el ángulo TV*g* será la paralaje que obedece al traslado de la Tierra desde el lugar *g* al lugar T, por lo que V será el lugar del cometa en el plano de la eclíptica. Y este lugar V está por lo común más bajo que la órbita de Júpiter.

Lo mismo puede deducirse de la curvatura del camino de los cometas, pues estos cuerpos se mueven prácticamente en grandes círculos cuando su velocidad es grande, pero al aproximarse el fin de su curso cuando la parte de su movimiento aparente debida a su paralaje está en proporción mayor a su movimiento aparente total, por lo común se desvían de dichos círculos, y cuando la Tierra se aparta hacia un lado, ellos se desvían hacia el otro. Y esta deflexión, debido a su correspondencia con el movimiento de la Tierra, tiene que deberse fundamentalmente a la paralaje, y su cantidad es tan considerable que, según mis cálculos, sitúa a los cometas, en su desaparición, bastante más bajos que Júpiter. De ello se sigue que cuando se aproximan más a nosotros en sus perigeos y perihelios descienden frecuentemente por debajo de las órbitas de Marte y los planetas inferiores.

La gran aproximación de los cometas se confirma también por la luz de sus cabezas, pues la luz de un cuerpo celeste que, iluminado por el Sol, se aleja hacia partes remotas, disminuye como la cuarta potencia de la distancia, es decir, como el cuadrado, debido al incremento de su distancia al Sol, y como otro cuadrado, debido al decremento del diámetro aparente. En consecuencia, dada la cantidad de luz y el diámetro aparente de un cometa, su distancia estará también dada tomando la distancia del cometa a la distancia de un planeta directamente como sus diámetros e inversamente como la raíz cuadrada de su luz. En efecto, Mr. *Flamsteed* observó el cometa del año 1682



con un telescopio de 16 pies y midió con un micrómetro el diámetro mínimo de su cabeza, 2'00". El núcleo o estrella en la mitad de la cabeza, sin embargo, apenas llegaba a una décima parte de esta medida, por lo que su diámetro era sólo 11" ó 12", pero la luz y esplendor de su cabeza superaban a las del cometa del año 1680, pudiendo compararse con las estrellas de primera o segunda magnitud. Supongamos que Saturno, con su anillo, fuera cuatro veces más luminoso, y puesto que la luz del anillo era casi igual a la luz del globo interior y el diámetro aparente del globo es de unos 21", por lo que la luz unida de globo y anillo sería igual a la luz de un globo con diámetro de 30", se sigue que la distancia del cometa era a la distancia de Saturno inversamente como 1 a $\sqrt{4}$ y directamente como 12" a 30", es decir, como 24 a 30, ó 4 a 5. Más aún: el cometa del mes de abril de 1665, según las informaciones de *Hewelcke*, superaba en esplendor a casi todas las estrellas fijas, e incluso al mismo Saturno, pues su color era mucho más vivo, y este cometa era más luminoso que el aparecido a fines del año anterior, que se había comparado a las estrellas de primera magnitud. El diámetro de su cabeza era de unos 6', pero el núcleo, comparado con los planetas por medio de un telescopio, era claramente menor que Júpiter y menor, según algunos, o igual, según otros, que el globo de Saturno en el interior del anillo. En consecuencia, dado que los diámetros de las cabezas de los cometas rara vez superan los 8' ó 12', y dado que el diámetro del núcleo o estrella central no es más que una décima o quizá quinceava parte del diámetro de la cabeza, parece que estas estrellas tienen por lo general aproximadamente el mismo diámetro aparente que los planetas. Pero como su luz puede a menudo compararse con la de Saturno, que a veces superan, es evidente que todos los cometas deben estar situados, en sus perihelios, por debajo de Saturno o poco más arriba. Y mucho se equivocan los que los sitúan casi tan lejos

como las estrellas fijas, pues de ser así los cometas no recibirían más luz de nuestro Sol que la que los planetas reciben de las estrellas fijas.

Hasta el momento no hemos tenido en consideración el oscurecimiento que sufren los cometas por la abundancia del espeso humo que circunda sus cabezas, haciendo que éstas parezcan veladas, como a través de una nube. Cuanto más oscurecido está el cuerpo por efecto de este humo, más tiene que acercarse al Sol para rivalizar con los planetas en la cantidad de luz que refleja. Por tanto, es probable que los cometas desciendan muy por debajo de la órbita de Saturno, como antes probamos en base a su paralaje. Pero la mejor prueba proviene, desde luego, de sus colas, que tienen que deberse a la luz del Sol reflejada en un humo que salga de ellas y se disperse por el éter, o a la luz de sus propias cabezas. En el primer caso tendremos que acortar la distancia de los cometas para no vernos obligados a admitir que el humo que sale de sus cabezas se propaga por una extensión tan vasta y con tal velocidad y expansión que todo ello parezca imposible. En el segundo caso, toda la luz de la cabeza y la cola tiene que atribuirse al núcleo central. Pero entonces, si admitimos que toda esta luz está unida y condensada en el interior del disco del núcleo, es evidente que el núcleo superará ampliamente en esplendor al mismo Júpiter, especialmente cuando emite una cola muy amplia y luminosa. En consecuencia, si con un diámetro aparente más pequeño refleja más luz, tendrá que estar mucho más iluminado por el Sol y, en consecuencia, mucho más cerca de él, argumentación que a veces llevaría las cabezas de los cometas al interior de la órbita de Venus, por ejemplo cuando, escondidos bajo los rayos del Sol, emiten tan inmensas y espléndidas colas como a veces hacen. En efecto, si toda esa luz se uniera en una sola estrella, ésta sobrepasaría a veces no sólo a Venus, sino a muchos Venus reunidos en uno.

Lo mismo se infiere, por último, de la luz de las cabezas, que aumenta cuando los cometas se alejan de la Tierra hacia el Sol y disminuye cuando vuelven desde el Sol hacia la Tierra. En efecto, el cometa del año 1665 (según las observaciones de *Hewelcke*) perdía movimiento aparente desde la primera vez que fue visto, por lo que ya había pasado su perigeo. Sin embargo, el esplendor de su cola aumentaba día tras día, hasta que el cometa, escondido bajo los rayos del Sol, dejó de observarse. El cometa del año 1683 (según las observaciones del mismo

Hewelcke), al aparecer por primera vez, a fines de julio, se movía muy despacio, avanzando tan sólo 40 ó 45 minutos en su órbita en el transcurso de un día, pero desde ese momento su movimiento diario no cesó de aumentar, hasta el 4 de septiembre, en que llegó a unos 5 grados. En consecuencia, el cometa se estaba acercando a la Tierra durante todo este intervalo de tiempo. El diámetro de su cabeza, medido con micrómetro, también lo prueba, pues el 6 de agosto *Hewelcke* lo fijó en sólo 6'5", cabellera incluida, y el 2 de septiembre observó que media 9'7". Su cabeza, en consecuencia, parecía mucho menor al comienzo que al final de su movimiento, aunque al comienzo, debido a su mayor proximidad al Sol, era mucho más luminosa que al final, según declara el mismo *Hewelcke*. Por tanto, en todo este intervalo de tiempo, y debido a su alejamiento del Sol, perdió esplendor, a pesar de aproximarse a la Tierra. El cometa del año 1618, a mediados de diciembre, y el del año 1680, a fines del mismo mes, se movían con su máxima velocidad, por lo que se encontraban en sus perigeos, pero el esplendor máximo de sus cabezas se observó dos semanas antes, cuando acababan de apartarse de los rayos solares, y el esplendor máximo de sus colas se observó un poco antes, cuando estaban aún más cerca del Sol. El 1 de diciembre, la cabeza del primero de estos cometas (según las observaciones de *Cysat*) parecía mayor que las estrellas de primera magnitud, y el 16 de diciembre (en el perigeo) su magnitud había disminuido muy poco, pero el esplendor y brillo de su luz habían disminuido mucho. *Kepler*, inseguro sobre la cabeza, dejó de observar el 7 de diciembre. Mr. *Flamsteed* vio y observó la cabeza del segundo cometa el 12 de diciembre, a sólo 9 grados de distancia del Sol, cosa difícil de hacer con una estrella de tercera magnitud. El 15 y 17 de diciembre se mostró como una estrella de tercera magnitud, con el brillo disminuido por la luminosidad de las nubes cercanas al Sol poniente. El 26 de diciembre, cuando se movía con su máxima velocidad, encontrándose casi en su perigeo, era menor que la boca de Pegaso, una estrella de tercera magnitud. El 3 de enero se mostró como una estrella de cuarta magnitud. El 9 de enero, como una de quinta magnitud. El 13 de enero fue ocultado por el esplendor de la Luna, en aquel momento creciente. El 25 de enero apenas llegaba a la dimensión de las estrellas de séptima magnitud. Si comparamos intervalos iguales de tiempo, tomados primero a un lado del perigeo y después al otro, veremos que la cabeza del cometa, lejana en ambos

intervalos pero a igual distancia de la Tierra, por lo que debería haber brillado con el mismo esplendor, brillaba al máximo en el lado del perigeo más cercano al Sol, desapareciendo en el otro. En consecuencia, la gran diferencia de luz entre una y otra situación nos permite llegar a la conclusión de que el cometa estaba muy cerca del Sol en la primera, pues la luz de los cometas tiende a ser regular, y parece mayor cuando las cabezas se mueven más deprisa, encontrándose en sus perigeos, excepto en la medida en que pueda aumentar por su mayor proximidad al Sol.

COROLARIO I. En consecuencia, los cometas brillan por la luz del Sol que reflejan.

COROLARIO II. En virtud de lo ya dicho podemos también comprender la razón de que los cometas se vean con tanta frecuencia en la región donde se encuentra el Sol y tan rara vez en la otra. Si fueran visibles en las regiones muy superiores a Saturno, aparecerían con más frecuencia en las partes opuestas al Sol, pues los que se encontraran en dichas partes estarían más cerca de la Tierra, mientras que la presencia del Sol oscurecería y ocultaría a los que aparecieran en la región donde él se encuentra. Sin embargo, repasando la historia de los cometas, observo que en el hemisferio dirigido hacia el Sol se han visto cuatro o cinco veces más que en el hemisferio opuesto, sin contar los sin duda no pocos que la luz del Sol haya ocultado, pues los cometas que descienden hacia nuestras partes no emiten colas ni están lo suficientemente bien iluminados por el Sol para mostrarse al ojo desnudo hasta que están más cerca de nosotros que Júpiter. Pero la inmensa mayor parte del espacio esférico que se describe en torno al Sol con un radio tan pequeño se encuentra en el lado de la Tierra que se enfrenta al Sol, y los cometas están por lo común más fuertemente iluminados en esta parte, pues casi siempre se encuentran más cerca del Sol.

COROLARIO III. Por tanto, también es evidente que los espacios celestes carecen de resistencia, pues aunque los cometas siguen trayectorias oblicuas y, a veces, contrarias al curso de los planetas, se mueven en todas direcciones con la mayor libertad y conservan su movimiento durante un tiempo extremadamente prolongado, incluso cuando son contrarios al curso de los planetas. O mucho me equivoco, o son una especie de planetas que giran en órbitas cerradas con un movimiento continuo, pues la opinión de algunos escritores de que no son más que meteoros, opinión basada en los continuos cambios que tienen

lugar en sus cabezas, no parecen tener fundamento alguno, dado que las cabezas de los cometas están rodeadas por inmensas atmósferas, cuyas partes más bajas deben ser las más densas, por lo que no es en los cuerpos de los cometas mismos, sino sólo en las nubes, donde se ven dichos cambios. También la Tierra, vista desde los planetas, debe, sin lugar a dudas, brillar con la luz de sus nubes, y el cuerpo sólido apenas se verá a través de las nubes que lo circundan. Y también los cinturones de Júpiter se forman en las nubes de ese planeta, pues cambian sus posiciones respectivas, y el cuerpo sólido de Júpiter apenas se ve a través de ellas. Con mayor razón deben los cuerpos de los cometas esconderse bajo sus atmósferas, que son más profundas y más espesas.

PROPOSICIÓN XL. TEOREMA XX

Que los cometas se mueven en algunas de las secciones cónicas, con focos en el centro del Sol, y que, mediante radios trazados al Sol, describen áreas proporcionales a los tiempos.

Esta Proposición se desprende del Corolario I de la Proposición XIII, Libro I, comparada con las Proposiciones VIII, XII y XIII, Libro III.

COROLARIO I. Por tanto, si los cometas giran por órbitas cerradas, las órbitas serán elipses, y sus tiempos periódicos serán a los tiempos periódicos de los planetas como la $\frac{3}{2}$ava potencia de sus ejes principales. En consecuencia, los cometas, que durante la mayor parte de su curso son más remotos que los planetas, por lo que describen órbitas con ejes más grandes, necesitarán más tiempo para completar sus revoluciones. De esta forma, si el eje de la órbita de un cometa fuera cuatro veces mayor que el eje de la órbita de Saturno, el tiempo de revolución del cometa sería al tiempo de revolución de Saturno, es decir, a 30 años, como $4\sqrt{4}$ (ó 8) es a 1, por lo que sería de 240 años.

COROLARIO II. Pero sus órbitas se asemejarán tanto a parábolas que para ellos pueden utilizarse parábolas sin error sensible.

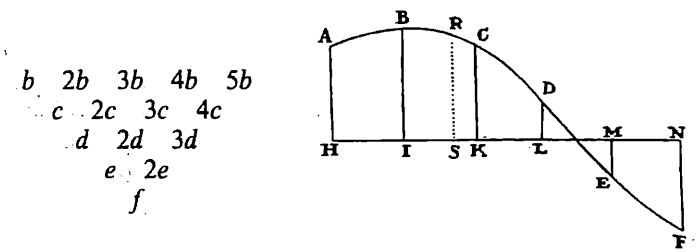
COROLARIO III. Y, en consecuencia, por el Corolario VII de la Proposición XVI, Libro I, la velocidad de todo cometa será siempre a la velocidad de cualquier planeta, suponiendo que gire

en círculo a la misma distancia en torno al Sol, aproximadamente como la raíz cuadrada del doble de la distancia entre el planeta y el centro del Sol a la distancia entre el cometa y el centro del Sol. Supongamos que el radio de la gran órbita, o el semidiámetro máximo de la elipse descrita por la Tierra, está dividido en 100000000 partes, y la Tierra describirá por su movimiento diurno medio 1720212 de tales partes, y por su movimiento horario $71675\frac{1}{2}$. En consecuencia, el cometa, a la misma distancia media de la Tierra al Sol y con una velocidad que es a la velocidad de la Tierra como $\sqrt{2}$ a 1, describirá por su movimiento diurno 2472747 partes, y por su movimiento horario $101364\frac{1}{2}$. Pero a distancias mayores o menores, tanto el movimiento diurno como el horario serán a este movimiento diurno y horario inversamente como la raíz cuadrada de las distancias, por lo que estarán dados.

COROLARIO IV. En consecuencia, si el *latus rectum* de la parábola es cuatro veces el radio de la gran órbita, y se supone que el cuadrado de dicho radio está dividido en 100000000 partes, el área que el cometa describirá diariamente mediante un radio trazado hasta el Sol será $1216373\frac{1}{2}$ partes, y el área horaria será $50682\frac{1}{4}$ partes. Pero si el *latus rectum* es mayor o menor, en cualquier razón, el área diaria y horaria será menor o mayor inversamente como la raíz cuadrada de dicha razón.

LEMA V

Determinar una línea curva de índole parabólica que pase por cualquier número dado de puntos.



Sean A, B, C, D, E, F, etc. dichos puntos, y abátanse desde ellos sobre cualquier línea HN, de posición dada, otras tantas perpendiculares AH, BI, CK, DL, EM, FN, etc.

CASO 1. Si HI, IK, KL, etc., intervalos de los puntos H, I, K, L, M, N, etc., son iguales, tómense b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, etc., primeras diferencias de las perpendiculares AH, BI, CK, etc., c, $2c$ $3c$, $4c$, etc., sus segundas diferencias, y d, $2d$, $3d$, etc., las terceras, de forma que $AH-BI$ sea $=b$, $BI-CK=2b$, $CK-DL=3b$, $DL+EM=4b$, $-EM+FN=5b$, etc.; entonces, $b-2b=c$, etc., y así hasta la última diferencia, que aquí es f. Después, tras levantar cualquier perpendicular RS, que puede considerarse como ordenada de la curva que se busca, supóngase, con el fin de determinar la longitud de esta ordenada, que los intervalos HI, IK, KL, LM, etc. son unidades, sean $AH=a$, $-HS=p$, $\frac{1}{2}p$ por $-IS=q$, $\frac{1}{3}q$ por $+SK=r$, $\frac{1}{4}r$ por $+SL=s$, $\frac{1}{5}s$ por $+SM=t$, procediendo de esta forma hasta ME, penúltima perpendicular, y prefijando signos negativos ante los términos HS, IS, etc., situados en el lado del punto S hacia A, y signos positivos ante los términos SK, SL, etc., situados al otro lado del punto S; observando bien los signos, RS será $=a+bp+cq+dr+es+ft$ +etc.

CASO 2. Pero si HI, IK, etc., intervalos de los puntos H, I, K, L, etc., son desiguales, tómense b, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, etc., como primeras diferencias de las perpendiculares AH, BI, CK, etc. divididas por los intervalos entre dichas perpendiculares, c, $2c$, $3c$, $4c$, etc., sus segundas diferencias divididas por los intervalos entre cada dos, d, $2d$, $3d$, etc., sus terceras diferencias divididas por los intervalos entre cada tres, e, $2e$, etc., sus cuartas diferencias divididas por los intervalos entre cada cuatro, prosiguiendo de forma que b sea $=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, etc., después $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, etc., después $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, etc. Una vez determinadas estas diferencias, sean $AH=a$, $-HS=p$, p por $-IS=q$, q por $+SK=r$, r por $+SL=s$, s por $+SM=t$, procediendo en esta forma hasta ME, penúltima perpendicular, y la ordenada RS será $=a+bp+cq+dr+es+ft$ +etc.

COROLARIO. Por tanto, las áreas de todas las curvas pueden determinarse aproximadamente, pues si se determina un cierto número de puntos de la curva a cuadrar y se supone que por estos puntos pasa una parábola, el área de esta parábola será aproximadamente la misma que el área de la figura curvilínea

que se propone cuadrar; ahora bien, la parábola siempre puede cuadrarse geométricamente mediante métodos generalmente conocidos.

LEMA VI

Dados ciertos lugares observados de un cometa, determinar el lugar del mismo en cualquier tiempo intermedio dado.

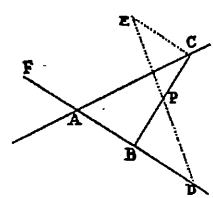
Representen HI, IK, KL, LM (en la figura precedente) los tiempos entre las observaciones, HA, IB, KC, LD, ME cinco longitudes observadas del cometa, y HS el tiempo dado entre la primera observación y la longitud buscada. Suponiendo entonces una curva regular ABCDE trazada por los puntos A, B, C, D, E, y determinada la ordenada RS por el Lema precedente, RS será la longitud buscada.

Mediante el mismo método podemos determinar la latitud en un tiempo dado en base a cinco latitudes observadas.

Si las diferencias de las longitudes observadas son pequeñas, por ejemplo de 4 ó 5 grados, tres o cuatro observaciones serán suficientes para determinar una nueva longitud y latitud. No obstante, si las diferencias son mayores, por ejemplo de 10 ó 20 grados, deberán utilizarse cinco observaciones.

LEMA VII

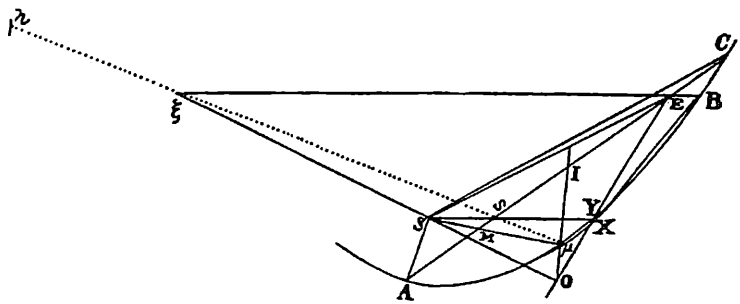
Por un punto dado P, *trazar una línea recta* BC *cuyas partes* PB, PC, *cortadas por dos líneas rectas* AB, AC, *cuya posición está dada, estén en razón dada entre sí.*



Supóngase cualquier línea recta PD trazada desde el punto dado P hasta cualquiera de las líneas rectas dadas, como AB; prolónguese la misma hacia AC, la otra línea recta dada, hasta E, de forma que PE esté en la razón dada a PD. Sea EC paralela a AD. Trácese CPB, y PC será a PB como PE a PD. Q.E.D.

LEMA VIII

Sea ABC *una parábola con foco en* S. *Córtese el segmento* ABCI, *cuyo diámetro es* Iμ *y cuyo vértice es* μ, *con la cuerda* AC *bisectada en* I. *Tómese* μO *en* Iμ *prolongada igual a la mitad de* Iμ. *Unase* OS *y prolónguese hasta* ξ, *de forma que* Sξ *sea igual a* 2SO. *Entonces, suponiendo que un cometa gira por el arco* CBA, *trácese* ξB *cortando* AC *en* E, *y afirmo que el punto* E *cortará de la cuerda* AC *el segmento* AE, *aproximadamente proporcional al tiempo.*



Pues si unimos EO, cortando el arco parabólico ABC en Y, y trazamos μX tangente al mismo arco en el vértice μ y encontrándose con EO en X, el área curvilínea AEXμA será al área curvilínea ACYμA como AE a AC; en consecuencia, puesto que el triángulo ASE está en la misma razón al triángulo ASC, toda el área ASEXμA será a toda el área ASCYμA como AE es a AC. Pero, dado que ξO es a SO como 3 a 1 y que EO está en la misma razón a XO, SX será paralela a EB, por lo que, uniendo BX, el triángulo SEB será igual al triángulo XEB. En consecuencia, si añadimos el triángulo EXB al área ASEXμA y de la suma sustraemos el triángulo SEB, quedará el área ASBXμA, igual al área ASEXμA y, en consecuencia, en la misma razón al área ASCYμA que AE a AC. Pero el área ASBYμA es aproximadamente igual al área ASBXμA, y ese área ASBYμA es al área ASCYμA como el tiempo de descripción del arco AB es al tiempo de descripción del arco entero AC, por lo que AE está a AC aproximadamente en la proporción de los tiempos. Q.E.D.

COROLARIO. Cuando el punto B cae sobre el vértice μ de la parábola, AE está a AC exactamente en la proporción de los tiempos.

ESCOLIO

Si unimos $\mu\xi$ cortando AC en δ, y allí tomamos ξn en proporción a μB como 27MI a 16Mμ, y trazamos Bn, esta Bn cortará la cuerda AC, en la razón de los tiempos, más exactamente que antes. Ahora bien, el punto n debe situarse más allá o más acá del punto ξ, en la medida en que el punto B esté más o menos distante que el punto μ del vértice principal de la parábola.

LEMA IX

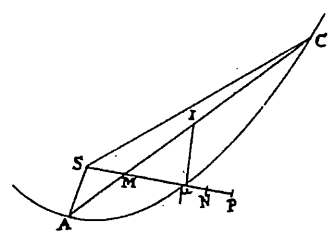
Las líneas rectas Iμ *y* μM *y la longitud* $\frac{AI^2}{4S\mu}$ *son iguales entre sí.*

Pues 4Sμ es el *latus rectum* de la parábola que corresponde al vértice μ.

LEMA X

Prolónguese Sμ *hasta* N *y* P, *de forma que* μN *sea un tercio de* μI *y* SP *sea a* SN *como* SN *a* Sμ, *y un cometa, en el tiempo en que describiría el arco* AC, *suponiendo que avanzara siempre con la velocidad que tiene en una altura igual a* SP, *describirá una longitud igual a la cuerda* AC.

Pues suponiendo que el cometa avance uniformemente en el mencionado tiempo y con la velocidad que tiene en μ por una línea recta tangente a la parábola en μ, el área que describiría mediante un radio trazado hasta el punto S sería igual al área parabólica ASCμA, por lo que el espacio contenido en la longitud descrita en la tangente y la longitud Sμ sería al espacio contenido en las longitudes AC y SM como el área ASCμA es al triángulo ASC, es decir, como SN a SM. En consecuencia, AC es a la longitud descrita en la tangente como Sμ a SN. Pero como la velocidad del cometa en la altura SP (por el Corolario VI de la Proposición XVI, Libro I) es a la velocidad del mismo en la altura Sμ inversamente



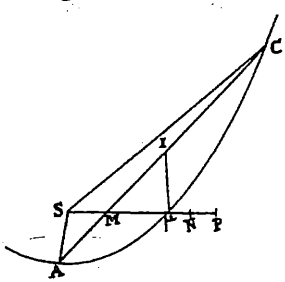
como la raíz cuadrada de SP a $S\mu$, es decir, está en la razón de $S\mu$ a SN, se sigue que la longitud descrita con esta velocidad será a la longitud descrita en la tangente en el mismo tiempo como $S\mu$ a SN. En consecuencia, AC y la longitud descrita con esta nueva velocidad, al estar en la misma proporción a la longitud descrita en la tangente, serán iguales entre sí. Q.E.D.

COROLARIO. En consecuencia, un cometa, con la velocidad que tiene en la altura $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, describirá en el mismo tiempo la cuerda AC, aproximadamente.

LEMA XI

Si un cometa privado de todo movimiento se dejara caer hacia el Sol desde la altura SN, o $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$, *y fuera impulsado hacia el Sol por la misma fuerza uniformemente continuada que lo impulsaba desde el principio, dicho cometa describiría en su descenso un espacio igual a la longitud* $I\mu$ *en la mitad del tiempo en que describiría el arco* AC *por su propia órbita.*

Pues el cometa, en el mismo tiempo que necesitaría para describir el arco parabólico AC, describiría, con la velocidad que tiene en la altura SP (por el último Lema), la cuerda AC. En consecuencia (por el Corolario VII de la Proposición XVI, Libro I), si girara en el mismo tiempo por su propia fuerza de gravedad por un círculo con semidiámetro SP, describiría un arco de dicho círculo cuya longitud estaría en una razón de 1 a $\sqrt{2}$ a la cuerda del arco parabólico AC. En consecuencia, si cayera desde la altura SP hacia el Sol con el peso hacia el Sol que tiene en dicha altura, en la mitad del tiempo mencionado describiría (por el Corolario IX de la Proposición XVI, Libro I) un espacio igual al cuadrado de la mitad de la mencionada cuerda dividido por cuatro veces la altura SP, es decir, describiría el espacio $\frac{AI^2}{4SP}$. Pero puesto que



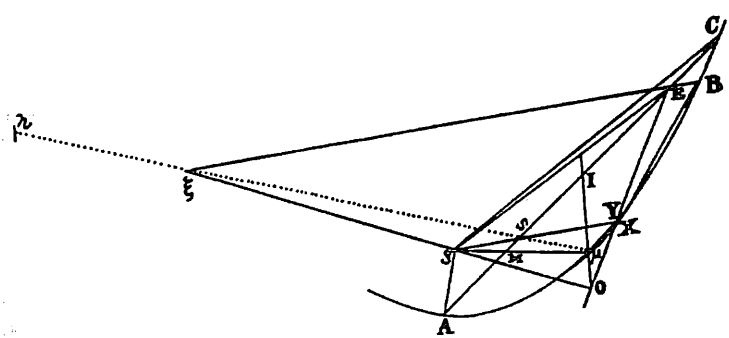
el peso del cometa hacia el Sol en la altura SN es al peso del mismo hacia el Sol en la altura SP como SP a Sμ, el cometa, cayendo hacia el Sol desde esa altura con el peso que tiene en la altura SN, describiría en el mismo tiempo el espacio $\frac{AI^2}{4S\mu}$, es decir, un espacio igual a la longitud Iμ o μM. Q.E.D.

PROPOSICIÓN XLI. PROBLEMA XXI

Dadas tres observaciones, determinar la órbita de un cometa que se mueve por una parábola.

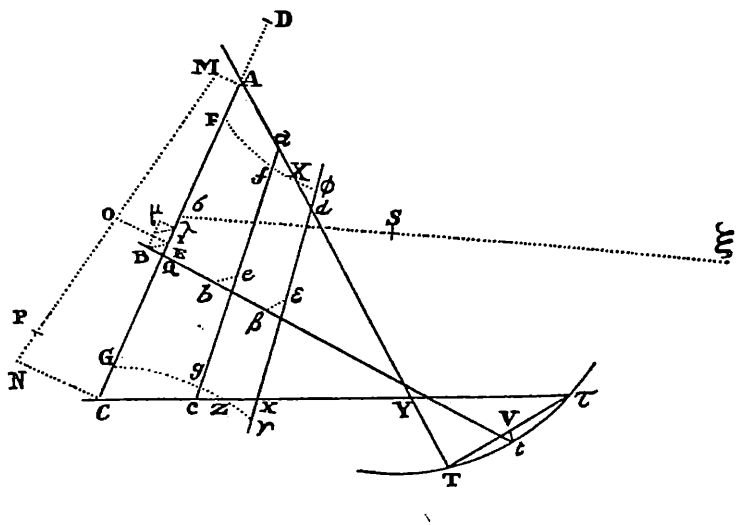
Por ser éste un Problema de grandísima dificultad, he probado muchos métodos para resolverlo. Un cierto número de Problemas cuya composición se ha presentado en el Libro primero tendían a este fin. Sin embargo, después concebí la siguiente solución, que es algo más sencilla.

Escójanse tres observaciones, separadas una de otra por intervalos de tiempo casi iguales, pero teniendo en cuenta que el intervalo de tiempo en que el cometa se mueve más lentamente debe ser algo mayor que el otro, de forma que la diferencia de los tiempos sea a la suma de los tiempos como la suma de los tiempos es a aproximadamente 600 días, o que el punto E caiga aproximadamente sobre M y desde allí se desplace más bien



hacia I que hacia A. A falta de observaciones directas como éstas, deberá determinarse un nuevo lugar del cometa por el Lema VI.

Representen S el Sol, T, *t*, τ tres lugares de la Tierra en la órbita de la Tierra, TA, *t*B, τC tres longitudes observadas del cometa, V el tiempo entre la primera observación y la segunda, W el tiempo entre la segunda y la tercera, X la longitud que el



cometa puede describir en todo el tiempo V + W con la velocidad que tiene a la distancia media de la Tierra al Sol, longitud que se determinará por el Corolario III de la Proposición XL, Libro I, y *t*V una perpendicular sobre la cuerda Tτ. En la longitud media observada *t*B tómese a voluntad el lugar B como lugar del cometa en el plano de la eclíptica y trácese desde allí hacia el sol S la línea BE, que sea a la perpendicular *t*V como el producto de SB y St^2 es al cubo de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados son SB y la tangente de la latitud del cometa en la segunda observación al radio *t*B. Trácese por el punto E (por el Lema VII) la línea recta AEC, con partes AE y EC, terminadas en las líneas rectas TA y τC, que sean entre sí como los tiempos V y W, y A y C serán aproximadamente los lugares del cometa en el plano de la eclíptica en la primera y

tercera observación, siempre que su lugar B haya sido correctamente determinado en la segunda.

Levántese la perpendicualr I*i* sobre AC bisectada en I. Imagínese una línea B*i* trazada por B paralela a AC. Imagínese una línea S*i* trazada cortando AC en λ y complétese el paralelogramo $il\lambda\mu$. Tómese Iσ igual a 3Iλ, e imagínese una línea $\sigma\xi$ trazada por el Sol S igual a $3S\sigma + 3i\lambda$. Después, borrando las letras A, E, C, I desde el punto B hacia el punto ξ, imagínese una nueva línea BE que sea a la anterior BE como el cuadrado de la razón de la distancia BS a la cantidad $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Trácese de nuevo por el punto E la línea recta AEC según las mismas reglas que antes, es decir, de forma que sus partes AE y EC sean una con respecto de otra como los tiempos V y W entre las observaciones. A y C serán así más exactamente los lugares del cometa.

Sobre AC, bisectada en I, levántense las perpendiculares AM, CN, IO, de las que AM y CN son las tangentes de las latitudes en la primera y la tercera observación a los radios TA y τC. Unase MN, cortando IO en O. Trácese el paralelogramo rectangular $il\lambda\mu$ como antes. Tómese en IA prolongada ID igual a $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Después, en MN, hacia N, tómese MP de forma que sea a la longitud X arriba determinada como la raíz cuadrada de la razón de la distancia media de la Tierra al Sol (o del semidiámetro de la órbita de la Tierra) a la distancia OD. Si el punto P cae sobre el punto N, A, B y C serán tres lugares del cometa por los que su órbita se describirá en el plano de la eclíptica. Pero si el punto P no cae sobre el punto N, tómese en la línea recta AC, CG igual a NP, de forma que los puntos G y P se encuentren en el mismo lado de la línea NC.

Con el mismo método utilizado para determinar los puntos E, A, C, G a partir del punto supuesto B, determínense los nuevos puntos *e*, *a*, *c*, *g* y ε, α, κ, γ a partir de otros puntos *b* y β supuestos a voluntad. Trácese después por G, *g* y γ la circunferencia de un círculo G*g*γ, cortando la línea recta τC en Z, y Z será un lugar del cometa en el plano de la eclíptica. Y en AC, *ac*, $\alpha\kappa$, tomando AF, *af*, $\alpha\phi$ iguales, respectivamente, a CG, *cg*, $\kappa\gamma$, trácese por los puntos F, *f* y ϕ la circunferencia de un círculo F$f\phi$, cortando la línea recta AT en X, y el punto X será otro lugar del cometa en el plano de la eclíptica. Y en los puntos X y Z, erigiendo las tangentes de las latitudes del cometa a los radios TX y τZ, se determinarán dos lugares del cometa en su propia órbita. Finalmente, si se describe (por la Proposición XIX, Libro

I) con foco S una parábola que pase por estos dos lugares, dicha parábola será la órbita del cometa. Q.E.I.

La demostración de esta construcción se desprende de los anteriores Lemas, porque la línea recta AC es cortada en E en la proporción de los tiempos, por el Lema VII, como debe ser por el Lema VIII, y BE, por el Lema XI, es una porción de la línea recta BS o Bξ en el plano de la eclíptica, interceptada entre el arco ABC y la cuerda AEC, y MP (por el Corolario del Lema X) es la longitud de la cuerda del arco que el cometa debe describir en su órbita adecuada entre la primera y la tercera observación, por lo que es igual a MN, siempre que B sea el lugar verdadero del cometa en el plano de la eclíptica.

Conviene, sin embargo, no suponer los puntos B, *b*, β al azar, sino aproximadamente ciertos. Si se conoce aproximadamente el ángulo AQ*t*, donde la proyección de la órbita en el plano de la eclíptica corta la línea recta *t*B, trácese en dicho ángulo con B*t* la línea AC, de forma que sea a $\frac{4}{3}$Tτ como la raíz cuadrada de la razón de SQ a S*t* y, trazando la línea recta SEB de forma que su parte EB sea igual a la longitud V*t*, se determinará el punto B que tenemos que utilizar la primera vez. Después, borrando la línea recta AC y trazando una nueva AC conforme a la construcción precedente, y determinando además la longitud MP, tómese en *t*B el punto *b* de forma que si TA y τC se intersectan mutuamente en Y la distancia Y*b* esté a la distancia YB en razón compuesta de la razón de MP a MN y la raíz cuadrada de la razón de SB a S*b*. Mediante el mismo método puede determinarse el tercer punto β, si se desea repetir la operación de nuevo. No obstante, siguiendo este método, dos operaciones serán por lo general suficientes, pues si la distancia B*b* resulta ser muy pequeña, tras determinar los puntos F, *f*, y G, *g*, trácense las líneas rectas F*f* y G*g*, y éstas cortarán TA y τC en X y Z, los puntos buscados.

EJEMPLO

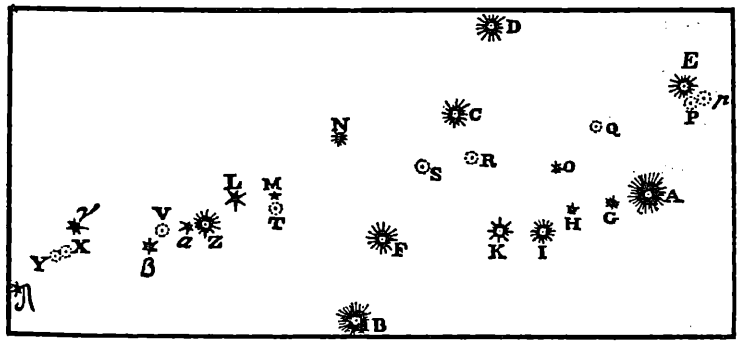
Estudiemos el cometa del año 1680. La siguiente tabla muestra su movimiento tal como fue observado por *Flamsteed*, calculado después por él mismo según sus observaciones y corregido por el Dr. *Halley* en base a las mismas observaciones.

	Tiempo		*Longitud del Sol*	*El cometa*	
	Aparente	*Verdadero*		*Longitud*	*Latitud norte*
	h m	h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680, *dic.* 12	4,46	4,46,00	♑ 1,51,23	♑ 6,32,30	8,28,00
21	6,32½	6,36,59	11,06,44	♒ 5,08,12	21,42,13
24	6,12	6,17,52	14,09,26	18,49,23	25,23, 5
26	5,14	5,20,44	16,09,22	28,24,13	27,00,52
29	7,55	8,03,02	19,19,43	♓ 13,10,41	28,09,58
30	8,02	8,10,26	20,21,09	17,38,20	28,11,53
1681, *ene.* 5	5,51	6,01,38	26,22,18	♈ 8,48,53	26,15, 7
9	6,49	7,00,53	♒ 0,29,02	18,44,04	24,11,56
10	5,54	6,06,10	1,27,43	20,40,50	23,43,52
13	6,56	7,08,55	4,33,20	25,59,48	22,17,28
25	7,44	7,58,42	16,45,36	♉ 9,35,00	17,56,30
30	8,07	8,21,53	21,49,58	13,19,51	16,42,18
feb. 2	6,20	6,34,51	24,46,59	15,13,53	16,04, 1
5	6,50	7,04,41	27,49,51	16,59,51	15,27, 3

A éstas pueden añadirse algunas observaciones mías.

	Tiempo aparente	*El cometa*	
		Longitud	*Latitud norte*
	h m	° ′ ″	° ′ ″
1681, *feb.* 25	8,30	♉ 26,18,35	12,46,46
27	8,15	27,04,30	12,36,12
mar. 1	11,0	27,52,42	12,23,40
2	8,0	28,12,48	12,19,38
5	11,30	29,18, 0	12,03,16
7	9,30	♊ 0,04,	11,57, 0
9	8,30	0,43, 4	11,45,52

Estas observaciones se hicieron con un telescopio de 7 pies, con micrómetro e hilos en el foco del telescopio. Con estos instrumentos determinamos tanto las posiciones de las estrellas fijas unas con respecto a otras como la posición del cometa con respecto a las estrellas fijas. Representen A la estrella de cuarta magnitud en el talón izquierdo de Perseo (*Bayer*, *o*), B la siguiente estrella de tercera magnitud en el pie izquierdo (*Bayer*, *ζ*), C una estrella de sexta magnitud (*Bayer*, *η*) en el talón del



mismo pie, y D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ otras estrellas más pequeñas en el mismo pie, representen *p*, P, Q, R, S, T, V, X los lugares del cometa en las observaciones arriba expuestas y, calculando una distancia AB de $80\frac{7}{12}$ partes, AC era $52\frac{1}{4}$ de dichas partes, BC $58\frac{5}{6}$, AD $57\frac{5}{12}$, BD $82\frac{6}{11}$, CD $23\frac{2}{3}$, AE $29\frac{4}{7}$, CE $57\frac{1}{2}$, DE $49\frac{11}{12}$, AI $27\frac{7}{12}$, BI $52\frac{1}{6}$, CI $36\frac{7}{12}$, DI $53\frac{5}{11}$, AK $38\frac{2}{3}$, BK 43, CK $31\frac{5}{9}$, FK 29, FB 23, FC $36\frac{1}{4}$, AH $18\frac{6}{7}$, DH $50\frac{7}{8}$, BN $46\frac{5}{12}$, CN $31\frac{1}{3}$, BL $45\frac{5}{12}$, NL $31\frac{5}{7}$. HO era a HI como 7 a 6 y, prolongada, pasaba entre las estrellas D y E de forma que la distancia de la estrella D a esta línea recta era $\frac{1}{6}$CD. LM era a LN como 2 a 9 y, prolongada, pasaba por la estrella H. De esta forma se determinaron las posiciones de unas estrellas fijas con respecto a otras.

Estrellas fijas	*Sus longitudes*	*Latitud norte*	*Estrellas fijas*	*Sus longitudes*	*Latitud norte*
	° ′ ″	° ′ ″		° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26,41,50	12, 8,36	L	♉ 29,33,34	12, 7,48
B	28,40,23	12,17,54	M	29,18,54	12, 7,20
C	27,58,30	12,40,25	N	28,48,29	12,31, 9
E	26,27,17	12,52, 7	Z	29,44,48	11,57,13
F	28,28,37	11,52,22	α	29,52, 3	11,55,48
G	26,56,08	12, 4,58	β	♊ 0, 8,23	11,48,56
H	27,11,45	12, 2, 1	γ	0,40,10	11,55,18
I	27,25, 2	11,53,11	δ	1, 3,20	11,30,42
K	27,42, 7	11,53,26			

Mr. *Pound* ha observado más recientemente por segunda vez las posiciones relativas de estas estrellas fijas, obteniendo sus

longitudes y latitudes, tal como se exponen en la tabla precedente.

Las posiciones del cometa en relación a las estrellas fijas fueron, según las observaciones, las siguientes:

El viernes 25 de febrero, a las $8\frac{1}{2}$ p.m., la distancia del cometa en *p* a la estrella E era menos de $\frac{3}{13}$AE y más de $\frac{1}{5}$AE, por lo que era casi igual a $\frac{3}{14}$AE. El ángulo A*p*E era ligeramente obtuso, pero casi recto. Pues abatiendo desde A una perpendicular sobre *p*E, la distancia del cometa a dicha perpendicular era $\frac{1}{5}p$E.

Esa misma noche, a las $9\frac{1}{2}^h$, la distancia del cometa en P a la estrella E era mayor que $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$AE y menor que $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$AE, por lo que era casi igual a $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ de AE, ó $\frac{8}{39}$AE. Pero la distancia del cometa a la perpendicular abatida desde la estrella A sobre la línea recta PE era $\frac{4}{5}$PE.

El domingo 27 de febrero, a las $8\frac{1}{4}^h$ p.m., la distancia del cometa en Q a la estrella O era igual a la distancia de las estrellas O y H, y la línea recta QO, prolongada, pasaba entre las estrellas K y B. Las nubes me impidieron determinar con más exactitud la posición de la estrella.

El martes 1 de marzo, a las 11^h p.m., el cometa en R se encontraba exactamente en línea entre las estrellas K y C, de forma que la parte CR de la línea recta CRK era un poco mayor que $\frac{1}{3}$CK y un poco menor que $\frac{1}{3}$CK$+\frac{1}{8}$CR, por lo que era $=\frac{1}{3}$CK$+\frac{1}{16}$CR, ó $\frac{16}{45}$CK.

El miércoles 2 de marzo, a las 8^h p.m., la distancia del cometa en S a la estrella C era aproximadamente $\frac{4}{9}$FC, la distancia de la estrella F a la línea recta CS prolongada era $\frac{1}{24}$FC, y la distancia de la estrella B a la misma línea recta era cinco veces mayor que la distancia de la estrella F, y la línea recta NS prolongada pasaba entre las estrellas H e I cinco o seis veces más cerca de la estrella H que de la estrella I.

El sábado 5 de marzo, a las $11\frac{1}{2}^h$ p.m., cuando el cometa estaba en T, la línea recta MT era igual a $\frac{1}{2}$ML, y la línea recta LT prolongada pasaba entre B y F cuatro o cinco veces más cerca de F que de B, cortando una quinta o sexta parte de BF hacia F. MT prolongada pasaba por fuera del espacio BF hacia la estrella B cuatro veces más cerca de la estrella B que de la estrella F. M era una estrella muy pequeña que apenas se veía

con el telescopio, pero la estrella L era mayor, más o menos de octava magnitud.

El lunes 7 de marzo, a las $9\frac{1}{2}^h$ p.m., encontrándose el cometa en V, la línea recta Vα prolongada pasaba entre B y F, cortando hacia F $\frac{1}{10}$ de FB, y era a la línea recta Vβ como 5 a 4. Y la distancia del cometa a la línea recta $\alpha\beta$ era $\frac{1}{2}$Vβ.

El viernes 9 de marzo, a las $8\frac{1}{2}^h$ p.m., encontrándose el cometa en X, la línea recta γX era igual a $\frac{1}{4}\gamma\delta$, y la perpendicular abatida desde la estrella δ sobre la línea recta γX era $\frac{2}{5}$ de $\gamma\delta$.

Esa misma noche, a las 12^h, encontrándose el cometa en Y, la línea recta γY era igual a $\frac{1}{3}$ de $\gamma\delta$, o un poco menor, quizá $\frac{5}{16}$ de $\gamma\delta$, y una perpendicular abatida desde la estrella δ sobre la línea recta γY era aproximadamente igual a $\frac{1}{6}$ ó $\frac{1}{7}\gamma\delta$. Pero el cometa, que a la sazón se encontraba muy cerca del horizonte, era muy difícil de discernir, por lo que su lugar no pudo determinarse con la misma seguridad que en las anteriores observaciones.

En base a estas observaciones, construyendo figuras y haciendo cálculos, deduje las longitudes y latitudes del cometa. Mr. *Pound*, corrigiendo los lugares de las estrellas fijas, ha determinado más correctamente los lugares del cometa, y estos lugares correctos son los arriba expuestos. Aunque mi micrómetro no era de los mejores, los errores de longitud y latitud (derivados de mis observaciones) apenas exceden un minuto. El cometa (según mis observaciones), poco antes de finalizar su movimiento, empezó a declinar sensiblemente hacia el norte desde el paralelo que describía a finales de febrero.

Entonces, con el fin de determinar la órbita del cometa en base a las observaciones arriba expuestas, seleccioné las tres de *Flamsteed* (21 de dic., 5 de ene. y 25 de ene.), de las que obtuve S*t* de 9842,1 partes y V*t* de 455partes, dividiendo el semidiámetro de la órbita de la Tierra en 10000. Después, suponiendo *t*B de 5657 de dichas partes, obtuve para SB 9747, BE la primera vez 412, Sμ 9503, *i*λ 413, BE la segunda vez 421, OD 10186, X 8528,4, PM 8450, MN 8475, NP 25; en base a ello, mediante la segunda operación obtuve la distancia *tb* 5640, y con esta operación deduje finalmente las distancias TX 4775 y τZ 11322. Determinado la órbita en base a estas cifras, encontré su nodo descendente en ☋ y su nodo ascendente en ♈ 1°53′, la inclinación de su plano hacia el plano de la eclíptica, 61°20½′, su vértice (o el perihelio del cometa) a 8°38′ de distancia del nodo, y en ♐ 27°43′, con latitud 7°34′ sur, su *latus rectum* 236,8, el área diaria descrita mediante radio trazado al Sol 93585,

atribuyendo 100000000 al cuadrado del semidiámetro de la órbita de la Tierra, así como que el cometa se movía por esta órbita siguiendo el orden directo de los signos, y que en dic. $8^d00^h04^m$ p.m. se encontraba en el vértice o perihelio de su órbita. Todo ello lo determiné con regla y compás y con las cuerdas de los ángulos, tomadas de la tabla de senos naturales, en una figura bastante grande, donde el radio de la órbita de la Tierra (dividido en 10000 partes) era igual a $16\frac{1}{3}$ pulgadas de pie *inglés*.

Finalmente, con el fin de descubrir si el cometa se movía de verdad por la órbita así determinada, investigué sus lugares en esta órbita, en parte mediante operaciones aritméticas y en parte con regla y compás, en relación con los tiempos de algunas de las observaciones, como puede verse en la siguiente tabla:

	El cometa		
	Distancia al Sol	*Longitud calculada*	*Latitud calculada*
Dic. 12	2792	6°32′	$8°18\frac{1}{2}$
29	8403	$13, 13\frac{2}{3}$	28, 00
Feb. 5	16669	17, 00	$15, 29\frac{2}{3}$
Mar. 5	21737	$29, 19\frac{3}{4}$	12, 4

	Longitud observada	*Latitud observada*	*Diferencia longitud*	*Diferencia latitud*
Dic. 12	$6°31\frac{1}{2}$	8°26	+1	$-7\frac{1}{2}$
29	$13, 11\frac{3}{4}$	$28, 10\frac{1}{12}$	+2	$-10\frac{1}{12}$
Feb. 5	$16, 59\frac{7}{8}$	$15, 27\frac{2}{5}$	+0	$+2\frac{1}{4}$
Mar. 5	$29, 20\frac{6}{7}$	$12, 03\frac{1}{2}$	−1	$+\frac{1}{2}$

Pero después el doctor *Halley* determinó la órbita con mayor exactitud mediante un cálculo aritmético que podía hacerse por operaciones gráficas. Manteniendo el lugar de los nodos en ♋ y ♈ 1°53′, y la inclinación del plano de la órbita hacia la eclíptica en $61°20\frac{1}{3}'$, así como la fecha de presencia del cometa en su perihelio, dic. $8^d00^h04^m$, halló una distancia del perihelio al nodo ascendente, medida en la órbita del cometa, de 9°20′, y fijó el *latus rectum* de la parábola en 2430 partes

suponiendo la distancia media del Sol a la Tierra dividida en 10000 partes. En base a estos datos y mediante un cálculo aritmético exacto, determinó los lugares del cometa en los tiempos de las observaciones tal como se exponen en la siguiente tabla.

Tiempo verdadero	*El cometa*				
	Distancia al Sol	*Longitud calculada*	*Latitud calculada*	*Errores de Longitud*	*Latitud*
d h m		° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
Dic. 12,04,46	28028	♑ 6,29,25	8,26,00	−3,05	−2,00
21,06,37	61076	♒ 5,06,30	21,43,20	−1,42	+1,07
24,06,18	70008	18,48,20	25,22,40	−1,03	−0,25
26,05,20	75576	28,22,45	27,01,36	−1,28	+0,44
29,08,03	84021	♓ 13,12,40	28,10,10	+1,59	+0,12
30,08,10	86661	17,40,05	28,11,20	+1,45	−0,33
Ene. 5,06,1½	101440	♈ 8,49,49	26,15,15	+0,56	+0,08
9,07,00	110959	18,44,36	24,12,54	+0,32	+0,58
20,06,06	113162	20,41,00	23,44,10	+0,10	+0,18
13,07,09	120000	26,00,21	22,17,30	+0,33	+0,02
25,07,59	145370	♉ 9,33,40	17,57,55	−1,20	+1,25
30,08,22	155303	13,17,41	16,42,07	−2,10	−0,11
Feb. 2,06,35	160951	15,11,11	16,04,15	−2,42	+0,14
5,07,4½	166686	16,58,55	15,29,13	−0,41	+2,00
25,08,41	202570	26,15,46	12,48,00	−2,49	+1,10
Mar. 5,11,39	216205	29,18,35	12,05,40	+0,35	+2,14

Este cometa apareció también antes, en noviembre, y fue observado en *Coburgo, Sajonia*, el 4, 6 y 11 de dicho mes, por Mr. *Gottfried Kirch*. En base a sus posiciones con respecto a las estrellas fijas observadas con suficiente exactitud, a veces con un telescopio de dos pies y a veces con uno de diez, y tomando en cuenta la diferencia de longitudes de *Coburgo* y *Londres*, 11°, y los lugares de las estrellas fijas observados por Mr. *Pound*, el doctor *Halley* ha determinado los lugares del cometa como sigue:

El 3 de nov., 17^h2^m tiempo aparente en *Londres*, el cometa estaba en ♌ 29°51′, con 1°17′45″ de latitud norte.

El 5 de nov., 15^h58^m, el cometa estaba en ♍ 3°23′, con 1°6′ de latitud norte.

El 10 de nov., 16^h31^m, el cometa estaba a igual distancia de dos estrellas en ♌ que *Bayer* llama σ y τ, pero no había aún tocado la línea recta que las une, aunque estaba a muy poca distancia de ella. En el catálogo de *Flamsteed*, esta estrella σ estaba entonces en ♍ 14°15′, con 1°41′ de latitud norte, aproximadamente, y τ estaba en ♍ 17° $3\frac{1}{2}$′, con 0° 34′ de latitud sur, y el punto medio entre las dos estrellas era ♍ 15° $39\frac{1}{4}$′, con 0 $33\frac{1}{2}$′ de latitud norte. Sea la distancia del cometa a esa línea recta aproximadamente 10′ ó 12′, y la diferencia de longitud entre el cometa y aquel punto medio será de 7′, y la diferencia de latitud aproximadamente $7\frac{1}{2}$′, de donde se sigue que el cometa estaba en ♍ 15°32′, con aproximadamente 26′ de latitud norte.

La primera observación de la posición del cometa con respecto a las estrellas fijas era tan exacta como podía desearse, y la segunda era también bastante exacta. En la tercera observación, que fue la menos exacta, pudo haber un error de 6′ ó 7′, pero difícilmente más. La longitud del cometa determinada en la primera y más exacta observación y calculada en la órbita parabólica antes mencionada, es ♌ 29°30′22″, su latitud norte 1°25′7″, y su distancia al Sol 115546.

Por lo demás, el doctor *Halley*, percatándose de que un cometa muy notable había aparecido cuatro veces a intervalos iguales de 575 años (es decir, en el mes de septiembre tras la muerte de *Julio César*, en el *An. Chr.* 531, durante el consulado de *Lampadius* y *Orestes*, en el *An. Chr.* 1106, en el mes de febrero, y fines del año 1680, y siempre con una cola larga y muy notable (excepto cuando fue visto tras la muerte de *César*, cuando, debido a la mala situación de la Tierra, la cola no fue tan notable), se dispuso a hallar una órbita elíptica cuyo eje mayor contuviera 1382957 partes de la distancia media de la Tierra al Sol dividida en 10000 partes, órbita que un cometa pudiera recorrer en 575 años. Suponiendo el nodo ascendente en ♋ 2°2′, la inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica en un ángulo de 61°6′48″, el perihelio del cometa en este plano en ♐ 22 44′25″, el mismo tiempo de perihelio dic. $7^d23^h9^m$, la distancia del perihelio al nodo ascendente en el plano de la eclíptica en 9° 17′35″ y su eje conjugado en 18481,2, calculó los movimientos del cometa por esta órbita elíptica. Los lugares del cometa deducidos de las observaciones y derivados de los cálculos realizados sobre la mencionada órbita se exponen en la siguiente tabla.

Tiempo verdadero	Longitud observada	Latitud N observada	Longitud calculada	Latitud calculada	Errores de longitud	Errores de latitud
d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3,16,47	♌ 29,51, 0	1,17,45	♌ 29,51,22	1,17,32N	+0,22	−0,13
5,15,37	♍ 3,23, 0	1, 6, 0	♍ 3,24,32	1, 6, 9	+1,32	+0, 9
10,16,18	15,32, 0	0,27, 0	15,33, 2	0,25, 7	+1, 2	−1,53
16,17, 0			♎ 8,16,45	0,53, 7 S		
18,21,34			18,52,15	1,26,54		
20,17, 0			28,10,36	1,53,35		
23,17, 5			♏ 13,22,42	2,29, 0		
Dic. 12, 4,46	♑ 6,32,30	8,28, 0	♑ 6,31,20	8,29, 6N	−1,10	+1, 6
21, 6,37	♒ 5, 8,12	2,42,13	♒ 5, 6,14	21,44,42	−1,58	+2,29
24, 6,18	18,49,23	25,23, 5	18,47,30	25,23,35	−1,53	+0,30
26, 5,21	28,24,13	27, 0,52	28,21,42	27, 2, 1	−2,31	+1, 9
29, 8, 3	♓ 13,10,41	28, 9,58	♓ 13,11,14	28,10,38	+0,33	+0,40
30, 8,10	17,38,00	28,11,53	17,38,27	28,11,37	+0, 7	−0,16
Ene. 5, 6, 1½	♈ 8,48,53	26,15, 7	♈ 8,48,51	26,14,57	−0, 2	−0,10
9, 7, 1	18,44, 4	24,11,56	18,43,51	24,12,17	−0,13	+0,21
10, 6, 6	20,40,50	23,43,32	20,40,23	23,43,25	−0,27	−0, 7
13, 7, 9	25,59,48	22,17,28	26, 0, 8	22,16,32	+0,20	−0,56
25, 7,59	♉ 9,35, 0	17,56,30	♉ 9,34,11	17,56, 6	−0,49	−0,24
30, 8,22	13,19,51	16,42,18	13,18,28	16,40, 5	−1,23	−2,13
Feb. 2, 6,35	15,13,53	16, 4, 1	15,11,59	16, 2,17	−1,54	−1,54
5, 7, 4½	16,59, 6	15,27, 3	16,59,17	15,27, 0	+0,11	−0, 3
25, 8,41	26,18,35	12,46,46	26,16,59	12,45,22	−1,36	−1,24
Mar. 1,11,10	27,52,42	12,23,40	27,51,47	12,22,28	−0,55	−1,12
5,11,39	29,18, 0	12, 3,16	29,20,11	12, 2,50	+2,11	−0,26
9, 8,38	♊ 0,43, 4	11,45,52	♊ 0,42,43	11,45,35	−0,21	−0,17

Las observaciones de este cometa concuerdan de principio a fin con el movimiento del cometa por la órbita recién descrita tan perfectamente como los movimientos de los planetas con las teorías utilizadas para calcularlos, y este acuerdo pone claramente de manifiesto que el cometa en sus diversas apariciones era uno y el mismo, así como que la órbita del cometa ha sido correctamente definida.

En la tabla anterior hemos omitido las observaciones de los días 16, 18, 20 y 23 de noviembre, por no ser suficientemente exactas, aunque en esas fechas hubo varias personas que observaron el cometa. El 17 de nov., a las 6^h de la mañana en *Roma* (es decir, las 5^h10^m en *Londres*) *Ponthio* y sus compañeros, con hilos dirigidos a las estrellas fijas, observaron el cometa en ♎ 8°30′, con latitud 0°40′ sur. Sus observaciones están recogidas en un tratado publicado por *Ponthio* sobre este cometa. *Cellio*, que estaba presente y comunicó por carta sus observaciones a *Cassini*, vio el cometa a la misma hora en ♎ 8°30′, con latitud 0°30′ sur. También fue visto por *Gallet*, a la misma hora, en *Avignon* (es decir, a las 5^h42^m de la mañana en *Londres*), en ♎ 8° sin latitud. Sin embargo, según la teoría, el cometa estaba entonces en ♎ 8°16′45″, y su latitud era 0°53′7″ sur.

El 18 de noviembre, a las 6^h30^m en *Roma* (es decir, a las 5^h40^m en *Londres*), *Ponthio* observó el cometa en ♎ 13°30′, con 1°20′ sur, y *Cellio* en ♎ 13°30′, con latitud 1°00′ sur. Pero *Gallet* lo vio a las 5^h30^m de la mañana en *Avignon* en ♎ 13°00′, con latitud 1°00′ sur. En la Universidad de *La Fleche*, en *Francia*, a las 5^h de la mañana (es decir, a las 5^h9^m en *Londres*), fue visto por *Ango* entre dos estrellas pequeñas, una de las cuales es la del medio de las tres dispuestas en línea recta en la mano sur de Virgo, *Bayer* ψ, y la otra la exterior del ala, *Bayer* θ. En consecuencia, el cometa se encontraba entonces en ♎ 12°46′, con latitud 50′ sur. El doctor *Halley*, por su parte, me informó que el cometa fue visto el mismo día en *Boston*, *Nueva Inglaterra*, en latitud $42\frac{1}{2}°$, a las 5^h de la mañana (es decir, a las 9^h44^m de la mañana en *Londres*), cerca de ♎ 14 , con latitud 1°30′ sur. En consecuencia, el cometa se encontraba entonces en ♎12°46′, con latitud 50′.

El 19 de nov., a las $4\frac{1}{2}{}^h$ en *Cambridge*, el cometa (según la observación de un joven) distaba de Spica ♍ unos 2° hacia el noroeste. Spica se encontraba entonces en ♎ 19°23′47″, con latitud 2°1′59″ sur. El mismo día, a las 5^h de la mañana en *Boston*, *Nueva Inglaterra*, el cometa distaba de Spica ♍ 1 , con

diferencia de 40′ de latitud. El mismo día, en la isla de *Jamaica*, distaba de Spica ♍ aproximadamente 1 . El mismo día, Mr. *Arthur Storer*, en el río *Patuxent*, cerca de *Hunting Creek*, en *Maryland*, en los confines de *Virginia*, a $38\frac{1}{2}$ de latitud, vio el cometa a las 5^h de la mañana (es decir, a las 10^h en *Lòndres*) encima y muy cerca de Spica ♍, a una distancia de aproximadamente $\frac{3}{4}$ de grado. Comparando estas observaciones he llegado a la conclusión de que a las 9^h44^m en *Londres* el cometa estaba en ♎ 18° 50′, con aproximadamente 1 25′ de latitud sur. Y según la teoría, el cometa se encontraba entonces en ♎ 18 52′15″, con 1° 26′54″ de latitud sur.

El 20 de nov., *Montenari*, Profesor de Astronomía en *Padua*, a las 6^h de la mañana en *Venecia* (es decir, 5^h10^m en *Londres*) vio el cometa en ♎ 23°, con latitud 1° 30 sur. El mismo día, en *Boston*, distaba de Spica ♍ unos 4° de longitud este, por lo que estaba aproximadamente en ♎ 23 24′.

El 21 de nov., a las 7^h de la mañana, *Ponthio* y sus compañeros observaron el cometa en ♎ 27° 50′, con latitud 1° 16′ sur, *Cellio* en ♎ 28°, *Ango*, a las 5^h de la mañana, en ♎ 27° 45′, *Montenari* en ♎ 27° 51′. El mismo día, en la isla de *Jamaica*, fue visto cerca del principio de ♎, y aproximadamente a la misma latitud de Spica ♍, es decir, 2° 2′. El mismo día, a las 5^h de la mañana en *Ballasore*, *Indias Orientales* (es decir, a las 11^h20^m de la noche anterior en *Londres*), la distancia del cometa a Spica ♍ se midió en 7 35′ este. Se encontraba en una línea recta entre Spica y Libra, por lo que estaba en ♎ 26 58′, con aproximadamente 1 11′ de lat. sur. Pasadas 5^h40^m (es decir, a las 5^h de la mañana en *Londres*), estaba en ♎ 28 12′, con 1 16′ de latitud sur. Y, según la teoría, el cometa estaba entonces en ♎ 28° 10′36″, con 1° 53′35″ de latitud sur.

El 22 de nov., *Montenari* vio el cometa en ♎ 2° 33′, pero en *Boston*, *Nueva Inglaterra*, fue visto aproximadamente en ♎ 3°, y con casi la misma latitud que antes, es decir, 1° 30′. Ese mismo día, a las 5^h de la mañana en *Ballasore*, el cometa fue observado en ♎ 1° 50′, por lo que a las 5^h de la mañana en *Londres* se encontraba aproximadamente en 3° 5′. El mismo día, a las $6\frac{1}{2}^h$ de la mañana en *Londres*, el doctor *Hooke* lo observó en aproximadamente ♎ 3° 30′, en la línea recta que pasa por Spica ♍ y Cor Leonis, aunque no exactamente, sino algo desviado de esta línea hacia el norte. También *Montenari* observó que ese día y algunos días después una línea recta trazada desde el cometa cortando Spica pasaba por el lado sur de Cor Leonis y a muy

poca distancia. La línea recta que cortaba Cor Leonis y Spica ♍ cortaba la eclíptica en ♍ 3°46′ en un ángulo de 2°51′, y si el cometa hubiera estado en esta línea y en ♏ 3°, su latitud habría sido de 2°26′. Sin embargo, dado que *Hooke* y *Montenari* concuerdan en que el cometa estaba a reducida distancia de esta línea, hacia el norte, su latitud debía ser algo menor. El día 20, según la observación de *Montenari*, su latitud era casi la misma de Spica ♍, es decir, aproximadamente 1°30′. Pero según *Hooke*, *Montenari* y *Ango*, la latitud no dejaba de aumentar, por lo que el día 22 tenía que ser sensiblemente mayor que 1°30′. Tomando la media entre los límites extremos recién expuestos, la latitud sería de 1°58′. *Hooke* y *Montenari* concuerdan en que la cola del cometa se dirigía hacia Spica ♍, declinando ligeramente de dicha estrella, hacia el sur según *Hooke* y hacia el norte según *Montenari*, por lo que la declinación era apenas sensible; la cola, casi paralela al ecuador, se desviaba un poco de la oposición al Sol hacia el norte.

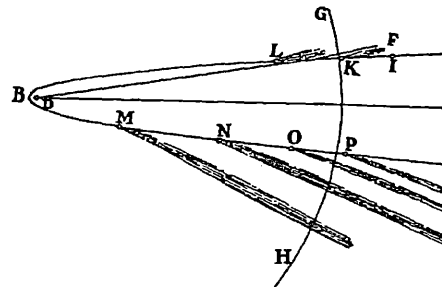
El 23 de nov., a las 5^h de la mañana en *Nuremberg* (es decir, a las $4\frac{1}{2}^h$ en *Londres*), Mr. *Zimmerman* vio el cometa en ♏ 8°8′, con 2°31′ de latitud sur, obteniendo su lugar tomando sus distancias a las estrellas fijas.

El 24 de nov., antes del alba, el cometa fue visto por *Montenari* en ♏ 12°52′ en el lado norte de la línea recta que pasa por Cor Leonis y Spica ♍, por lo que su latitud era algo menor que 2°38′. Puesto que la latitud, como ya hemos dicho, aumentaba continuamente, según observaciones coincidentes de *Montenari*, *Ango* y *Hooke*, el día 24 era algo mayor que 1°58′. Tomando la cantidad media puede fijarse, sin error considerable, en 2°28′. *Ponthio* y *Gallet* sostienen que la latitud disminuía en aquella fecha, y *Cellio* y el observador de *Nueva Inglaterra* que continuaba igual, es decir, en aproximadamente 1° ó $1\frac{1}{2}$°. Las observaciones de *Ponthio* y *Cellio*, especialmente las realizadas tomando los azimuts y las alturas, son más toscas, y también lo son las de *Gallet*. Las realizadas por *Montenari*, *Hooke*, *Ango* y el observador de *Nueva Inglaterra*, y a veces *Ponthio* y *Cellio*, tomando la posición del cometa con respecto a las estrellas fijas, son mejores. El mismo día, a las 5^h de la mañana en *Ballasore*, el cometa fue observado en ♏ 11°45′, por lo que a las 5^h de la mañana en *Londres* estaba aproximadamente en ♏ 13°. Y, según la teoría, el cometa estaba entonces en ♏ 13°22′42″.

El 25 de nov., antes del alba, *Montenari* observó el cometa en ♏ $17\frac{3}{4}$°, aproximadamente, y *Cellio* observó al mismo tiempo

ecta entre la estrella brillante
latillo sur de Libra, línea que
m 18°36'. Y, según la teoría,
e en m $18\frac{1}{3}$°.
idente que las observaciones
coinciden entre sí, y esta
observado desde el 4 de nov.
a trayectoria de este cometa
ptica, por lo que no era una
en partes opuestas del cielo,
pio de Capricornio, incluyen-
ecuencia, el cometa se desvió
an círculo, pues en el mes de
eclíptica hacia el sur, y en el
esde la eclíptica hacia el norte,
r la que el cometa descendió
)l declinaron una con respecto
te de más de 30°, como ha
a viajó a lo largo de nueve
ado de ♌ hasta el principio de
ue pasó antes de empezar a ser
a a tenor de la cual un cometa
los cielos con un movimiento
cometa era muy desigual. En
escribía unos 5° al día. Después
26 de nov. y el 12 de dic., y en
o describió 40°. Su movimiento
meta comenzó a describir unos
to se retardó de nuevo. Y una
a un movimiento tan desigual a
cielos, que observa las mismas
as y que coincide exactamente
s precisas, no puede ser sino

exponer, en la figura anexa,
la curva, una representación
por el cometa y de la cola que
este dibujo, ABC representa la
el eje de la órbita, DF la línea de
de la esfera de la órbita de la
del cometa, I el lugar del cometa



ugar del mismo el 11 de nov., L
el lugar del mismo el 19 de nov., M s
lugar el 21 de dic., O su lugar el 29 de
siguiente, Q su lugar el 25 de ene., R
lugar el 25 de feb., T su lugar el 5 de
mar. Para determinar la longitud de
observaciones.

El 4 y 6 de nov. la cola no apare
empezó a manifestarse, pero no pareci
un telescopio de 10 pies. El 17 de no
más de 15° de largo. El 18 de nov., e
una cola de 30° de largo, en dirección
dose hasta el planeta Marte, que ent
El 19 de nov., en *Maryland*, se vio una
El 10 de dic. (según la observación
pasó por el medio de la distancia inter
serpiente de Ofiuco y la estrella δ
terminando cerca de las estrellas A, α
En consecuencia, el final de la cola
latitud de aproximadamente $34\frac{1}{4}$ no
hasta la cabeza de Sagitario (*Bayer*,
26 43', con latitud 38 34' norte. El
mitad de Sagitario, sin llegar mucho m
4, con latitud $42\frac{1}{2}$ norte, aproximada
a la longitud de la parte más brillante
por *Ponthio* en *Roma* a las 5^h40^m del 1
más sereno, la cola, con luminosidac
por encima del obispillo del Cisne, y s
norte distaban 45' de esta estrella
momento la cola tenía una anchu

superior, por lo que su mitad estaba a 2 15′ de distancia de esa estrella hacia el sur, y la parte superior estaba en ♓ 22 , con latitud 61 norte; en consecuencia, la cola tenía unos 70 de largo. El 21 de dic. se extendía casi hasta la Silla de Casiopea, a igual distancia de β y de Schedir, de forma que su distancia a cualquiera de las dos era igual a la distancia de una a otra, por lo que terminaba en ♈24 , con latitud $47\frac{1}{2}$. El 29 de dic. entraba en contacto con Scheat a su izquierda, llenando exactamente el espacio entre las dos estrellas del pie norte de Andrómeda y alcanzando los 54 de longitud, por lo que terminaba en ♉ 19 , con 35 de latitud. El 5 de ene. tocaba la estrella π del pecho de Andrómeda con el lado derecho y la estrella μ del cinturón con el izquierdo, alcanzando, según nuestras observaciones, una longitud de 40 . Pero estaba curvada, y el lado convexo de la curva daba al sur, formando cerca de la cabeza del cometa un ángulo de 4 con el círculo que pasaba por el Sol y la cabeza del cometa, pero hacia el otro lado se inclinaba hacia dicho círculo en un ángulo de unos 10 ó 11 , y la cuerda de la cola contenía con dicho círculo un ángulo de 8 . El 13 de ene., la cola terminaba entre Alamech y Algol, con luz bastante sensible. Con luz más leve, sin embargo, terminaba en la estrella κ del costado de Perseo. La distancia entre el final de la cola y el círculo que pasaba por el Sol y el cometa era 3 50′, y la inclinación de la cuerda de la cola hacia dicho círculo era $8\frac{1}{2}$°. El 25 y 26 de ene. brillaba con leve luz hasta una longitud de 6 ó 7 , y después, durante una o dos noches con cielo muy claro, se extendió hasta una longitud de 12 , o algo más, con luz tan leve que era apenas visible. Pero el eje se dirigía exactamente hacia la estrella brillante del hombro oriental del Auriga, por lo que se desviaba de la oposición al Sol hacia el norte en un ángulo de 10 Finalmente, el 10 de feb., observé con telescopio una cola de 2 de longitud, ya que la luz más leve mencionada no se veía con catalejo. Pero *Ponthio* escribe que el 7 de feb. vio una cola de 12 de longitud. El 25 de feb. el cometa ya no tenía cola, y así permaneció hasta desaparecer.

Pues bien, cualquiera que reflexione sobre la órbita descrita, teniendo en la debida consideración las otras apariciones de este cometa, se convencerá fácilmente de que los cuerpos de los cometas son sólidos, compactos, fijos y duraderos, como los cuerpos de los planetas, pues si no fueran más que vapores o exhalaciones de la Tierra, el Sol y otros planetas, este cometa se hubiera disipado inmediatamente al pasar por las proximidades

del Sol, porque el calor del Sol es como la densidad de sus rayos, es decir, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al Sol. En consecuencia, puesto que el 8 de dic., cuando el cometa se encontraba en su perihelio, la distancia del mismo al centro del Sol era a la distancia de la Tierra al mismo centro aproximadamente como 6 a 1000, el calor del Sol sobre el cometa era en ese momento al calor del Sol de verano entre nosotros como 1000000 a 36, o como 28000 a 1. Ahora bien, el calor del agua hirviendo es unas tres veces mayor que el calor que adquiere la tierra seca por efecto del sol de verano, como he podido comprobar, y el calor del hierro al rojo (si mi conjetura es acertada) es unas tres o cuatro veces mayor que el calor del agua hirviendo. En consecuencia, el calor que la tierra seca del cometa debe haber recibido de los rayos del Sol cuando se encontraba en el perihelio será unas 2000 veces mayor que el calor del hierro al rojo. Y un calor tan feroz tiene que disipar y consumir inmediatamente los vapores y exhalaciones y cualquier materia volátil.

Este cometa, en consecuencia, tiene que haber recibido un calor inmenso del Sol, reteniendo dicho calor durante un tiempo extremadamente largo, pues un globo de hierro de una pulgada de diámetro, expuesto al rojo vivo al aire, no llegará a perder todo su calor en el transcurso de una hora, y un globo mayor retendrá el calor más tiempo, en razón a su diámetro, pues la superficie (en proporción a la cual se enfría por contacto con el aire ambiente) es menor en la misma razón con respecto a la cantidad de materia caliente incluida, por lo que un globo de hierro al rojo igual a nuestra Tierra, es decir, de unos 40000000 pies de diámetro, tardaría en enfriarse más de un número igual de días, o más de 50000 años. Sospecho, sin embargo, que la duración del calor puede, debido a ciertas causas latentes, aumentar en razón aún menor que la del diámetro, y mucho me complacería que se investigara la verdadera razón mediante experimentos.

Cabe también señalar que el cometa, en el mes de diciembre, justo después de haber sido calentado por el Sol, emitía una cola mucho más larga y espléndida que en el mes de noviembre, cuando aún no había llegado a su perihelio. Los cometas, sin excepción, emiten sus colas más grandes y luminosas inmediatamente después de pasar por las proximidades del Sol. En consecuencia, la magnitud de la cola depende del calor que el cometa recibe, de lo que en mi opinión puede inferirse que la

cola no es más que un vapor muy fino emitido por la cabeza o núcleo del cometa al calentarse.

Existen, sin embargo, tres opiniones distintas sobre las colas de los cometas. Para algunos, no son otra cosa que rayos de luz solar emitidos a través de las cabezas de los cometas, que suponen transparentes. Otros creen que proceden de la refracción que la luz sufre al pasar de la cabeza del cometa a la Tierra. Otros, finalmente, consideran que son una especie de nube o vapor que surge constantemente de las cabezas de los cometas, siempre dirigida hacia las partes opuestas al Sol. La primera opinión es propia de aquellos que no están familiarizados con la óptica, pues los rayos del Sol sólo se ven en una habitación oscurecida debido a su luz reflejada por las pequeñas partículas de polvo y humo que siempre flotan por el aire. Por esa razón, cuando el aire está impregnado de humo espeso, los rayos son muy brillantes e impresionan con más fuerza el ojo, pero en un aire más fino se debilitan y son más difíciles de discernir, y en los cielos, donde no hay materia que refleje la luz, jamás se ven. La luz no se ve tal como está en el rayo, sino tal como se refleja hacia nuestros ojos, pues la visión sólo puede producirse por la incidencia de los rayos sobre los ojos. En consecuencia, tiene que haber alguna materia reflectante en las partes donde se ven las colas de los cometas, pues de otra forma, y dado que todos los espacios celestes son igualmente iluminados por la luz del Sol, ninguna parte del cielo podría tener más esplendor que otra. La segunda opinión plantea muchas dificultades. Las colas de los cometas nunca presentan la variedad de colores por lo común inseparable de la refracción, y la transmisión definida de la luz de las estrellas fijas y los planetas hasta nosotros nos demuestra que el éter o medio celeste no posee poder alguno de refracción. El hecho, a veces alegado, de que los *egipcios* vieran a veces las estrellas fijas rodeadas de una cabellera, habiendo sucedido muy pocas veces, debe más bien atribuirse a una refracción casual de las nubes, y la radiación y centelleo de las estrellas fijas a las refracciones de los ojos y el aire, pues dichas radiaciones y centelleos desaparecen tan pronto se acerca el ojo al telescopio. La temblorosa agitación del aire y los vapores ascendentes hace que los rayos de luz se aparten una y otra vez del estrecho espacio de la pupila de un ojo, pero ello no puede ocurrir con la apertura, mucho más amplia, del objetivo de un telescopio, razón por la cual el centelleo que aparece en el primer caso desaparece en el segundo, lo que constituye una demostración

de la transmisión regular de la luz por el firmamento sin refracción perceptible. Finalmente, frente a la posible objeción derivada del hecho de que los cometas que brillan con poca luz no emiten colas, como si los rayos secundarios fueran demasiado débiles para afectar al ojo, razón por la que no se ven las colas de las estrellas fijas, debemos tener en cuenta que la luz de las estrellas fijas puede aumentarse cien veces por medio de telescopios sin que llegue a verse cola alguna, que la luz de los planetas es aún más copiosa, sin cola alguna, y que los cometas tienen a veces colas inmensas aunque la luz de sus cabezas sea débil y velada. Así ocurrió con el cometa del año 1680, que en el mes de diciembre apenas igualaba en luminosidad a las estrellas de segunda magnitud y a pesar de ello emitía una notable cola que se extendía hasta una longitud de 40°, 50°, 60°, 70° y aún más, y también después, el 27 y 28 de enero, cuando la cabeza no era mayor que una estrella de séptima magnitud y la cola (como ya hemos dicho) se extendía hasta unos 6° ó 7° con luminosidad claramente perceptible, aunque débil, y hasta 12°, ó aún más, con luminosidad muy disminuida y difícil de ver. Por si fuera poco, el 9 y 10 de febrero, cuando ya no se veía a simple vista, observé con telescopio una cola de 2° de longitud. Más aún: si la cola se debiera a la refracción de la materia celeste y se desviara de la oposición al Sol conforme a la figura del firmamento, dicha desviación siempre se dirigiría en los mismos lugares del firmamento hacia las mismas partes. Sin embargo, el cometa del año 1680 fue visto el 28 de diciembre a las $8\frac{1}{2}^h$ p.m. en *Londres* en ♓ 8° 41′, con latitud 28° 6′ norte, cuando el Sol estaba en 18° 26′. Y el cometa del año 1577 estaba el 29 de diciembre en ♓ 8 41′, con latitud 28° 40′ norte, cuando el Sol estaba, como en la otra ocasión, aproximadamente en ♑ 18° 26′. La situación de la Tierra era la misma en ambos casos, y el cometa apareció en el mismo lugar del firmamento, pero en el primer caso la cola del cometa (tanto según mis observaciones como según las observaciones de otros) se desvió de la oposición al Sol hacia el norte en un ángulo de $4\frac{1}{2}$ grados, mientras que en el segundo caso (según las observaciones de *Tycho*) se produjo una desviación de 21 grados hacia el sur. Descartada, en consecuencia, la refracción del firmamento, el fenómeno de la cola de los cometas tiene que deberse a alguna materia reflectante.

Por lo demás, las leyes que observan las colas de los cometas confirman también que estas colas nacen de sus cabezas, dirigiéndose hacia las partes opuestas al Sol. Por ejem-

plo, que las colas, situadas en los planos de las órbitas de los cometas que pasan por el Sol, se desvían constantemente de la oposición al Sol hacia las partes que las cabezas de los cometas han abandonado en su progreso por dichas órbitas; que para un espectador situado en dichos planos aparecen en las partes directamente opuestas al Sol, pero empiezan a desviarse, cada día más, a medida que el espectador retrocede de dichos planos; que la desviación, en igualdad de las restantes condiciones, parece menor cuando la cola es más oblicua en relación con la órbita del cometa, así como cuando la cabeza del cometa se acerca más al Sol, especialmente si el ángulo de desviación se estima cerca de la cabeza del cometa; que las colas que no se desvían parecen rectas, y las colas que se desvían adoptan una cierta curvatura; que esta curvatura es mayor cuando la desviación es mayor, y más sensible, en igualdad de las restantes condiciones, cuando la cola es más larga, porque en las colas cortas apenas se percibe curvatura; que el ángulo de desviación es menor cerca de la cabeza del cometa y mayor hacia el otro extremo de la cola, porque el lado convexo de la cola mira hacia las partes de donde ésta se desvía, que se encuentran en una línea recta infinita trazada desde el Sol y a través de la cabeza del cometa; finalmente, que las colas largas y anchas que brillan con luz más fuerte resplandecen más y están mejor definidas en su lado convexo que en el cóncavo. Teniendo esto presente, es manifiesto que los fenómenos de la cola de los cometas dependen de los movimientos de sus cabezas, y en ningún caso de los lugares del cielo donde se ven las cabezas, por lo que las colas de los cometas no proceden de la refracción del firmamento, sino de sus propias cabezas, que proporcionan la materia que forma la cola. Pues así como en nuestro aire el humo de un cuerpo calentado asciende perpendicularmente si el cuerpo está en reposo y oblicuamente si el cuerpo se mueve oblicuamente, en el firmamento, donde todos los cuerpos gravitan hacia el Sol, el humo y el vapor (como ya hemos dicho) tienen que ascender desde el Sol, elevándose perpendicularmente si el cuerpo humeante está en reposo y oblicuamente si el cuerpo, al progresar en su movimiento, abandona continuamente los lugares de donde antes surgían las partes superiores o más altas del vapor; y esta oblicuidad será menor allí donde el vapor asciende con mayor velocidad, a saber, cerca del cuerpo humeante, cuando éste está cerca del Sol. Pero, debido a la variación de la oblicuidad, la columna de vapor será curva, y puesto que el

vapor del lado anterior es algo más reciente, *es decir, ha ascendido algo más tarde del cuerpo*, será algo más denso en ese lado, por lo que reflejará más luz y estará mejor definido. No añado nada sobre la súbita e incierta agitación de las colas de los cometas ni sobre sus formas irregulares, descritas en ocasiones por diversos autores, porque pueden deberse a las mutaciones de nuestro aire y los movimientos de nuestras nubes, que oscurecen en parte a dichas colas, o quizá a partes de la Vía Láctea que por confusión se han atribuido a partes de las colas de cometas cuando éstos pasaban por allí

La rareza de nuestro aire, por su parte, explica cómo pueden las atmósferas de los cometas proporcionar una cantidad de vapor suficiente para llenar espacios tan inmensos. En efecto, el aire, cerca de la superficie de nuestra tierra, ocupa un espacio 850 veces mayor que el mismo peso de agua, por lo que un cilindro de aire de 850 pies de altura pesa lo mismo que un cilindro de agua de la misma anchura y un solo pie de altura. Y un cilindro de aire que llegue hasta el final de la atmósfera tiene el mismo peso que un cilindro de agua de unos 33 pies de altura, por lo que si se quitan 850 pies de la parte más baja del cilindro de aire, la parte superior restante tendrá el mismo peso que un cilindro de agua de 32 pies de altura. De ello (y de la hipótesis, confirmada por muchos experimentos, según la cual la comprensión del aire es como el peso de la atmósfera que lo presiona, y la fuerza de la gravedad inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra), tras realizar algunos cálculos a tenor del Corolario de la Proposición XXII, Libro II, he podido determinar que a la altura de un semidiámetro de la Tierra contado desde la superficie de la misma el aire es más raro que entre nosotros en una razón mucho mayor que la de todo el espacio contenido por la órbita de Saturno a un espacio esférico de una pulgada de diámetro. En consecuencia, si una esfera de nuestro aire de una sola pulgada de grosor estuviera tan enrarecida como el aire a la altura de un semidiámetro de la Tierra contado desde la superficie de la misma, llenaría todas las regiones de los planetas hasta el orbe de Saturno, y mucho más allá. En consecuencia, puesto que el aire, a mayores distancias, está enormemente enrarecido, y puesto que la cabellera o atmósfera de los cometas es por lo común diez veces más alta que la superficie del núcleo, calculando desde el centro del mismo, y las colas alcanzan aún más altura, dichas colas tienen que ser extremadamente raras. Debido al mucho mayor espesor

de las atmósferas de los cometas y a la gran gravitación de sus cuerpos hacia el Sol y de las partículas de su aire y vapores unas hacia otras, puede que el aire no sea tan raro en los espacios celestes y en las colas de los cometas, pero los anteriores cálculos evidencian que una cantidad muy pequeña de aire y vapor basta y sobra para producir la aparición de la cola de los cometas, cuya extrema rareza queda también demostrada por el hecho de que las estrellas brillen a través de ellas. La atmósfera de la Tierra, iluminada por la luz del Sol, aunque sólo tiene unas pocas millas de espesor, oscurece y extingue en gran medida no sólo la luz de todas las estrellas, sino también la de la misma Luna, mientras que hasta las estrellas más pequeñas brillan a través del inmenso espesor de las colas de los cometas, igualmente iluminadas por el Sol, sin que su esplendor disminuya lo más mínimo. Y, generalmente, el brillo de las colas de la mayor parte de los cometas tampoco es mayor que el de nuestro aire cuando, con un grosor de una o dos pulgadas, refleja en un cuarto oscuro la luz de los rayos solares que penetran por un agujero de la persiana.

También podemos determinar bastante satisfactoriamente el tiempo que dura el ascenso del vapor desde la cabeza del cometa al extremo de la cola trazando una línea recta desde el extremo de la cola hasta el Sol y marcando el lugar donde dicha línea recta intersecta la órbita del cometa. En efecto, el vapor que se encuentra en el extremo de la cola, si ha ascendido en línea recta, tiene que haber empezado a elevarse desde la cabeza del cometa cuando ésta se encontraba en el punto de intersección. De hecho, sin embargo, el vapor no sube en línea recta desde el Sol, sino que, reteniendo el movimiento recibido del cometa antes de su ascenso y combinándolo con su movimiento de ascenso, se eleva oblicuamente, por lo que la solución del Problema será más exacta si trazamos la línea que intersecta la órbita paralela a la longitud de la cola, o más bien (debido al movimiento curvilíneo del cometa) un poco divergente de la línea o longitud de la cola. Aplicando este principio determiné que el vapor que el 25 de enero se encontraba en el extremo de la cola había empezado a elevarse desde la cabeza antes del 11 de diciembre, por lo que el ascenso completo le había llevado 45 días. Sin embargo, toda la cola aparecida el 10 de diciembre había completado su ascenso en los dos días transcurridos desde el momento en que el cometa se encontraba en su perihelio. En consecuencia, el vapor se elevó con la máxima velocidad al

principio y en proximidad del Sol, y después siguió ascendiendo con movimiento constantemente retardado por su propia gravedad. Cuanto más alto ascendía, más añadía a la longitud de la cola, y ésta, hasta que dejó de verse, estuvo constituida por casi todo el vapor que se había elevado desde el momento en que el cometa se encontraba en su perihelio. Y tampoco la parte del vapor que había subido primero y formaba el extremo de la cola dejó de verse hasta que su excesiva distancia al Sol, de donde recibía su luz, y a nuestros ojos, la hicieron invisible. Por esa misma razón, las cortas colas de otros cometas no se elevan desde sus cabezas con un movimiento veloz y continuo, para desaparecer después, sino que constituyen columnas permanentes y duraderas de vapores y exhalaciones que ascienden desde las cabezas con movimiento lento durante muchos días y, participando del movimiento de las cabezas que tienen desde el principio, continúan acompañándolas por los cielos. Ello nos proporciona también otro argumento para demostrar que los espacios celestes son libres y sin resistencia, pues en ellos no sólo los cuerpos sólidos de los planetas y cometas, sino también los vapores extremadamente raros de las colas de los cometas, mantienen sus rápidos movimientos con gran libertad y durante un tiempo prolongadísimo.

Kepler atribuye el ascenso de las colas de los cometas a la atmósfera de sus cabezas, y su dirección hacia las partes opuestas al Sol a la acción de los rayos de luz, que desplazan consigo a la materia de las colas de los cometas, y no parece muy inverosímil que, en espacios tan libres, una materia tan fina como la del éter pueda ceder a la acción de los rayos de luz solar, aunque estos rayos no puedan mover perceptiblemente nuestras espesas sustancias, atascadas por una resistencia tan palpable. Otro autor piensa que podría existir una especie de partículas de materia dotadas de un principio de levedad, como hay otras con un poder de gravedad, y que la materia de las colas de los cometas podría pertenecer a la primera especie, y su ascenso desde el Sol deberse a su levedad. Sin embargo, considerando que la gravedad de los cuerpos terrestres es como la materia de los cuerpos, por lo que no puede ser mayor o menor en una misma cantidad de materia, me inclino a pensar que el ascenso se debe más bien a la rareza de la materia de las colas de los cometas. El ascenso del humo por una chimenea se debe al impulso del aire con él mezclado. El aire enrarecido por el calor asciende porque su gravedad específica disminuye, y en

su ascenso transporta consigo al humo que flota en él. ¿Por qué no habría de ascender la cola de un cometa desde el Sol de la misma manera? En efecto, los rayos del Sol sólo obran sobre los medios en que penetran por reflexión y refracción, y las partículas reflectantes calentadas por su acción calientan la materia del éter que se encuentra entre ellas. Esta materia es enrarecida por el calor que adquiere, y como, debido a este enrarecimiento, la gravedad específica con que antes tendía hacia el Sol ha disminuido, la materia ascenderá desde el Sol, llevando consigo las partículas reflectantes de que está compuesta la cola del planeta. Por lo demás, el ascenso de los vapores es acentuado por su revolución en torno al Sol, por lo que pugnan por alejarse de él, mientras que la atmósfera del Sol y la demás materia de los cielos permanece en completo reposo o se mueve sólo con un giro más lento derivado de la rotación del Sol. Estas son, pues, la causas del ascenso de las colas de los cometas en la proximidad del Sol, donde sus órbitas adquieren una mayor curvatura y los cometas mismos se zambullen en las partes más densas, y en consecuencia más pesadas, de la atmósfera solar, emitiendo colas de inmensa longitud. Pues las colas, al ascender, reteniendo su propio movimiento y gravitando al mismo tiempo hacia el Sol, tienen que girar por elipses igual que las cabezas, y este movimiento las hace acompañarlas y adherirse libremente a ellas. En efecto, la gravitación de los vapores hacia el Sol no puede obligar a las colas a abandonar las cabezas y descender hacia el Sol, como tampoco la gravitación de las cabezas puede obligarlas a caer de las colas. Su gravedad común las hará caer juntas hacia el Sol o retardará su común ascenso desde él, por lo que (ya sea debido a las causas descritas o a otras) las colas y cabezas de los cometas pueden adquirir fácilmente y retener libremente cualquier posición respectiva, sin perturbación ni impedimiento provocados por dicha gravitación común.

En consecuencia, las colas que se elevan en las posiciones de perihelio de los cometas seguirán a sus cabezas hasta remotas regiones, y volverán con ellas a nosotros, pasados muchos años, o más bien se enrarecerán y desaparecerán gradualmente. Después, en el descenso hacia el Sol, las cabezas emitirán con movimiento lento nuevas y cortas colas, y éstas aumentarán gradualmente hasta hacerse inmensas, especialmente en los cometas que en sus distancias de perihelio descienden hasta la atmósfera del Sol, pues en los espacios libres todo vapor está en perpetuo estado de rarefacción y dilatación, debido a lo cual las

colas de los cometas son más anchas en su extremo superior que en la proximidad de la cabeza. Y no es improbable que este vapor, continuamente enrarecido y dilatado, termine por disiparse y dispersarse por todos los cielos, siendo poco a poco atraído por su gravedad hacia los planetas, hasta mezclarse con su atmósfera. En efecto, así como los mares son absolutamente necesarios en la constitución de nuestra Tierra, para que el Sol exhale de ellos con su calor una cantidad suficiente de vapores que, acumulados en nubes, caigan como lluvia, regando la tierra para la producción y alimento de los vegetales, o, condensados por el frío en las cimas de las montañas (como razonablemente piensan algunos filósofos), desciendan como manantiales y ríos, así también son necesarios los cometas para la conservación de los mares y fluidos de los planetas, pues la condensación de sus vapores y exhalaciones compensa el desperdicio de fluidos planetarios empleados en la vegetación y putrefacción y convertidos en tierra seca. Porque el crecimiento de todos los vegetales depende enteramente de los fluidos, y su putrefacción los convierte después en gran medida en tierra seca, por lo que siempre se encuentra una especie de légamo en el fondo de los fluidos putrefactos, debido a lo cual el volumen de tierra sólida no deja de crecer, y los fluidos, si no son suministrados desde fuera, decrecen continuamente y terminan por desaparecer. Por lo demás, sospecho que ese espíritu que constituye la menor pero más sutil y beneficiosa parte de nuestro aire, tan necesaria para sostener la vida de toda cosa entre nosostros, proviene fundamentalmente de los cometas.

Las atmósferas de los cometas, en su descenso hacia el Sol, se gastan y disminuyen derramándose en las colas, y se hacen más estrechas, al menos en el lado que presentan al Sol, y cuando se alejan del Sol, derramándose menos en las colas, crecen de nuevo, si *Hewelcke* ha marcado bien sus apariciones. Pero cuando menos se ven es justo después de haber sido calentadas al máximo por el Sol, cuando emiten las colas más largas y resplandecientes. Es posible que los núcleos sean al mismo tiempo rodeados por un humo más denso y negro en las partes inferiores de la atmósfera, pues por lo general el humo más denso y negro es el provocado por un calor grande e intenso. Por esta razón, la cabeza del cometa que hemos descrito, a distancias iguales tanto del Sol como de la Tierra, parecía más oscura después de pasar su perihelio que antes. En efecto, en el mes de diciembre era en general comparado con las estrellas de

tercera magnitud, pero en noviembre con las de primera o segunda, y muchos que vieron ambas apariciones describen la primera como de un cometa distinto y mayor que el de la segunda. En efecto, el 19 de noviembre, en *Cambridge*, un joven vio el cometa igual a Spica Virginis, a pesar de que su luz era pálida y velada, y eso que entonces emitía más brillo que después. Y *Montenari* lo vió el 20 de noviembre más grande que las estrellas de primera magnitud, con una cola de 2 grados de largo. Y Mr. *Storer* (en cartas que han llegado a mis manos) escribe que en el mes de diciembre, cuando la cola tenía su mayor volumen y esplendor, la cabeza era pequeña y muy inferior a la observada en el mes de noviembre antes del alba, y al ponderar sobre la causa, considera que el fenómeno se debe a que la cabeza tenía al principio una mayor cantidad de materia, que después se fue gastando gradualmente.

En mi opinión, el hecho de que las cabezas de otros cometas que emitieron colas de inmensa magnitud y esplendor parecieran oscuras y pequeñas se debe a la misma razón. El 5 de marzo de 1688, a las 7^h p.m., *Valentín Estancel* vio en *Brasil* un cometa cerca del horizonte, hacia el sudoeste, con una cabeza tan pequeña que apenas se discernía, pero con una cola tan espléndida que su reflejo en el mar se vio perfectamente desde la costa. Parecía un rayo de fuego con una extensión de 23 grados de oeste a sur, casi paralelo al horizonte. Pero el gran esplendor duró sólo tres días, disminuyendo rápidamente después, y el volumen de la cola crecía a medida que el resplandor disminuía. Se dice también que en *Portugal* ocupaba una cuarta parte de los cielos, es decir, 45 grados, extendiéndose de oeste a este con muy notable esplendor, aunque en esta región no llegó a verse la cola entera, pues la cabeza se mantuvo siempre escondida bajo el horizonte. El aumento de volumen y disminución de esplendor de la cola hacen pensar que la cabeza se encontraba en aquel momento alejándose del Sol, y que en su perihelio había pasado muy cerca de él, como el cometa del año 1680. La Crónica *Sajona* da también noticia de un cometa semejante aparecido el año 1106, *cuya estrella era pequeña y oscura* (como la de 1680), *pero el esplendor de la cola muy brillante, extendiéndose como un inmenso rayo de fuego en dirección entre este y norte*, como informa también *Hewelcke* siguiendo a *Simeon*, el monje de *Durham*. Este cometa apareció a principios de febrero, a eso del anochecer y hacia la parte sudoeste de los cielos. De ello y de la posición de la cola se desprende que la cabeza estaba

cerca del Sol. *Matthew Paris* dice que *distaba del Sol aproximadamente un codo, desde las tres* (más bien las seis) *hasta las nueve, exhibiendo una larga cola.* Así fue también el resplandeciente cometa descrito por *Aristóteles*, Libro I, *Meteor.* 6. *Cuya cabeza no se veía porque se había puesto antes que el Sol, o al menos se escondía bajo los rayos solares; al día siguiente apenas se veía, pues, habiéndose apartado muy ligeramente del Sol, se puso inmediatamente después. Y la luz esparcida de la cabeza, oscurecida por el excesivo esplendor* (de la cola) *todavía no aparecía. Pero después* (según Aristóteles), *habiendo disminuido el esplendor* (de la cola), (la cabeza del) *cometa recuperó su brillo original, y el esplendor* (de su cola) *cubría ya una tercera parte del firmamento* (es decir, 60°). *La aparición tuvo lugar durante la estación de invierno* (an. 4, Olim. 101) *y, tras elevarse hasta la zona de Orión, allí desapareció.* Cierto que el cometa del año 1618, que salió directamente de debajo de los rayos del Sol, con una cola muy grande, parecía igualar, si no superar, a las estrellas de primera magnitud, pero también es cierto que han aparecido muchos otros cometas aún más grandes exhibiendo colas más cortas. Se dice que han aparecido algunos del tamaño de Júpiter, otros del tamaño de Venus, o incluso del tamaño de la Luna.

Ya hemos dicho que los cometas son una especie de planetas que giran por órbitas muy excéntricas en torno al Sol. Y así como, entre los planetas sin cola, los que giran por órbitas menores son por lo general más pequeños y están más cerca del Sol, también es probable que los cometas que más se acercan al Sol en su perihelio sean los de menor magnitud, que de esta manera no agitan demasiado al Sol con sus atracciones. En lo que toca a los diámetros transversales de sus órbitas y a los tiempos periódicos de sus revoluciones, puedo decir que habrán de ser determinados comparando entre sí cometas que tras largos intervalos de tiempo vuelven de nuevo por la misma órbita. Mientras tanto, la siguiente Proposición puede arrojar alguna luz sobre esta cuestión.

PROPOSICIÓN XLII. PROBLEMA XXII

Corregir la órbita determinada de un cometa como se expone más arriba.

OPERACIÓN I. Tómese la posición del plano de la órbita determinada según la anterior Proposición y selecciónense tres

lugares del cometa deducidos de observaciones muy precisas y a gran distancia entre sí. Represente después A el tiempo entre la primera observación y la segunda, y B el tiempo entre la segunda y la tercera. Conviene que en uno de esos tiempos el cometa se encuentre en su perigeo, o al menos no lejos del mismo. En base a estos lugares aparentes, determínense mediante operaciones trigonométricas los tres lugares verdaderos del cometa en el plano de la órbita supuesto. Después, mediante operaciones aritméticas a tenor de la Proposición XXI, Libro I, descríbase una sección cónica por los lugares determinados y en torno al centro del Sol, como foco. Sean D y E las áreas de esta figura limitadas mediante radios trazados desde el Sol a los lugares determinados, a saber, D el área entre la primera observación y la segunda y E el área entre la segunda y la tercera, y represente T todo el tiempo en que toda el área D+E se describiría con la velocidad del cometa determinada por la Proposición XVI, Libro I.

OPERACIÓN 2. Reteniendo la inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica, auméntese la longitud de los nodos del plano de la órbita añadiendo 20′ ó 30′, que llamaremos P. Determínense después desde los tres lugares observados del cometa arriba mencionados los tres lugares verdaderos (como antes) en este nuevo plano, así como la órbita que pasa por dichos lugares y las dos áreas de la misma descritas entre las dos observaciones, que llamaremos d y e, y represente t todo el tiempo en que se describiría toda el área $d+e$.

OPERACIÓN 3. Reteniendo la longitud de los nodos en la primera operación, auméntese la inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica añadiendo 20′ ó 30′, que llamaremos Q. Determínense después desde los lugares aparentes observados del cometa arriba mencionados los tres lugares verdaderos en este nuevo plano, así como la órbita que pasa por ellos y las dos áreas de la misma descritas entre la observación, que llamaremos δ y ε, y represente τ todo el tiempo en que se describiría toda el área $\delta+\varepsilon$.

Después, tomando C a 1 como A a B, G a 1 como D a E, g a 1 como d a e y γ a 1 como δ a ε, sea S el tiempo verdadero entre la primera observación y la tercera, y, observando bien los signos + y −, determínense unos números m y n que hagan $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$ y $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$. Si I representa en la primera operación la inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica y K la longitud de

cualquiera de los nodos, $I+nQ$ será la verdadera inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica, y $K+mP$ la verdadera longitud del nodo. Finalmente, si las cantidades R, r y ρ representan en la primera, segunda y tercera operación los *latera recta* de la órbita, y las cantidades $\frac{1}{L}, \frac{1}{l}, \frac{1}{\lambda}$, los diámetros transversales de la misma, $R+mr-mR+n\rho-nR$ será el *latus rectum* verdadero, y $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ el diámetro transversal verdadero de la órbita que el cometa describe. Y dado el diámetro transversal, también estarán dados los tiempos periódicos del cometa. Q.E.I. Pero los tiempos periódicos de las revoluciones de los cometas y los diámetros transversales de sus órbitas no pueden determinarse con exactitud suficiente sino comparando entre sí cometas que aparecen en tiempos diferentes. Si, tras intervalos iguales de tiempo, se determina que varios cometas han descrito la misma órbita, podemos estar seguros de que no son más que el mismo cometa que gira por la misma órbita. Entonces, los diámetros transversales de sus órbitas estarán dados por los tiempos de sus revoluciones, y las órbitas elípticas mismas se determinarán en base a dichos diámetros.

A estos efectos, las órbitas de muchos cometas deben calcularse suponiendo que dichas órbitas son parabólicas, pues estas órbitas concordarán casi siempre con los fenómenos, como se desprende no sólo de la órbita parabólica del cometa del año 1680, que más arriba he comparado con las observaciones, sino también de la del notable cometa que apareció en los años 1664 y 1665 y fue observado por *Hewelcke*, quien, en base a sus propias observaciones, calculó, aunque con poca precisión, sus longitudes y latitudes. En cualquier caso, el doctor *Halley* calculó de nuevo sus lugares utilizando las mismas observaciones y determinó la órbita según los nuevos lugares, hallando su nodo ascendente en ♊ 21°13′55″, la inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica 21°18′40″, la distancia de su perihelio al nodo, estimada en la órbita del cometa, 49°27′30″, su perihelio en ♌ 8°40′30″, con latitud heliocéntrica sur 16°01′45″, la fecha de paso del cometa por su perihelio noviembre $24^d 11^h 52^m$ p.m. en *Londres*, ó $13^h 8^m$ en *Dantzig*, y que el *latus rectum* de la parábola era 410286 partes de la distancia media del Sol a la Tierra dividida en 100000. La gran aproximación entre los lugares del cometa calculados en esta órbita y las

TABLA II

Tiempo aparente en en Dantzick	Distancias del cometa observados desde		Lugares observados		Lugares calculados en la órbita
Diciembre		o ′ ″		o ′ ″	o ′ ″
d h m	El corazón de León	46,24,20	Long. ♎	7,01,00	♎ 7, 1,29
3, 18, 29½	La punta de Virgo	22,52,10	Lat. S.	21,39, 0	21,38,50
4, 18, 1½	El corazón de León	46, 2,45	Long. ♎	6,15, 0	♎ 6,16, 5
	La punta de Virgo	23,52,40	Lat. S.	22,24, 0	22,24, 0
7, 17, 48	El corazón de León	44,48, 0	Long. ♎	3, 6, 0	♎ 3, 7,33
	La punta de Virgo	27,56,40	Lat. S.	25,22, 0	25,21,40
17, 14, 13	El corazón de León	53,15,15	Long. ♌	2,56, 0	♌ 2,56, 0
	El hombro derecho de Orión	45,43,30	Lat. S.	49,25, 0	49,25, 0
19, 9, 25	Proción	35,13,50	Long. ♊	28,40,30	♊ 28,43, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	52,56, 0	Lat. S.	45,48, 0	45,46, 0
20, 9, 53½	Proción	40,49, 0	Long. ♊	13,03, 0	♊ 13, 5, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	40,04, 0	Lat. S	39,54, 0	39,53, 0
21, 9, 9½	El hombro derecho de Orión	26,21,25	Long. ♊	2,16, 0	♊ 2,18,30
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	29,28, 0	Lat. S.	33,41, 0	33,39,40
22, 9, 0	El hombro derecho de Orión	29,47, 0	Long. ♉	24,24, 0	♉ 24,27, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	30,29,30	Lat. S.	27,45, 0	27,46, 0

26, 7, 58	La estrella brillante de Aries Aldebarán	23,20, 0 26,44, 0	Long. ☋ 9, 0, 0 Lat. S. 12,36, 0	☋ 9, 2,28 12,34,13
27, 6, 45	La estrella brillante de Aries Aldebarán	20,45, 0 28,10, 0	Long. ♉ 7, 5,40 Lat. S. 10,23, 0	♉ 7, 8,45 10,23,13
28, 7, 39	La estrella brillante de Aries Palilicium	18,29, 0 29,37, 0	Long. ♉ 5,24,45 Lat. S. 8,22,50	♉ 5,27,52 8,23,37
31, 6, 45	El cinturón de Andrómeda Palilicium	30,48,10 32,53,30	Long. ♉ 2, 7,40 Lat. S. 4,13, 0	♉ 2, 8,20 4,16,25
Enero 1665 7, 7, 37½	El cinturón de Andrómeda Palilicium	25,11. 0 37,12,25	Long. ♈ 28,24,47 Lat. N. 0,54, 0	♈ 28,24, 0 0,53, 0
13, 7, 0	La cabeza de Andrómeda Palilicium	28, 7,10 38,55,20	Long. ♈ 27, 6,54 Lat. N. 3, 6,50	♈ 27, 6,39 3, 7,40
24, 7, 29	El cinturón de Andrómeda Palilicium	20,32,15 40, 5, 0	Long. ♈ 26,29,15 Lat. N. 5,25.50	♈ 26,28,50 5,26, 0
Febrero 7, 8, 37			Long. ♈ 27, 4,46 Lat. N. 7, 3,29	♈ 27,24,55 7, 3,15
22, 8, 46			Long. ♈ 28,29,46 Lat. N. 8,12,36	♈ 28,29,58 8,10,25
Marzo 1, 8, 16			Long. ♈ 29,18,15 Lat. N. 8,36,26	♈ 29,18,20 8,36,12
7, 8, 37			Long. ♉ 0, 2,48 Lat. N. 8,56,30	♉ 0, 2,42 8,56,56

observaciones puede verse en la tabla calculada por el doctor *Halley*

En febrero, a comienzos del año 1665, la primera estrella de Aries, que desde ahora llamaré γ, estaba en ♈ 28°30'15", con 7°8'58" de latitud norte; la segunda estrella de Aries estaba en ♈ 29°17'18", con 8°28'16" de latitud norte; otra estrella de séptima magnitud, que llamaré A, estaba en ♈ 28°24'45", con 8 28'33" de latitud norte. El 7 de febrero a las 7^h30^m en *París* (es decir, el 7 de febrero a las 8^h37^m en *Dantzig*), el cometa formaba con las estrellas γ y A un triángulo cuyo ángulo recto estaba en γ, y la distancia del cometa a la estrella γ era igual a la distancia entre las estrellas γ y A, es decir, 1°19'46" de un círculo máximo, por lo que en el paralelo de la latitud de la estrella γ era 1°20'26". En consecuencia, si la longitud de la estrella γ se sustrae la longitud 1°20'26", quedará la longitud del cometa ♈ 27°9'49". M. *Auzout*, basándose en su observación, situó el cometa aproximadamente en ♈ 27°0'. A tenor del dibujo donde el doctor *Hooke* trazó su movimiento, entonces estaba en ♈ 26°59'24". Yo lo sitúo en ♈ 27°4'46", tomando la media entre los dos extremos.

M. *Auzout*, en base a las mismas observaciones, calcula que la latitud del cometa era entonces 7° y 4' ó 5' norte, pero debería haber calculado 7°3'29", pues la diferencia de latitudes entre el cometa y la estrella γ era igual a la diferencia de longitud entre las estrellas γ y A.

El 22 de febrero, a las 7^h30^m en *Londres*, es decir, el 22 de febrero a las 8^h46^m en *Dantzig*, la distancia del cometa a la estrella A, según la observación del Dr. *Hooke*, delineada por él mismo en un esquema, y también según las observaciones de M. *Auzout*, delineadas de la misma forma por M. *Petit*, era una quinta parte de la distancia entre la estrella A y la primera estrella de Aries, ó 15'57", y la distancia del cometa a una línea recta que unía a la estrella A y a la primera de Aries era una cuarta parte de esa quinta parte, es decir, 4'. En consecuencia, el cometa estaba en ♈ 28 29'46", con 8 12'36" de latitud norte.

El 1 de marzo, a las 7^h0^m en *Londres*, es decir, el 1 de marzo, a las 8^h16^m en *Dantzig*, el cometa fue observado cerca de la segunda estrella de Aries, a una distancia que era a la distancia entre la primera y la segunda estrella de Aries, es decir, a 1°33', como 4 a 45, según el doctor *Hooke*, o como 2 a 23, según M. *Gottignies*. En consecuencia, la distancia del cometa a la segunda estrella de Aries era 8'16", según el doctor *Hooke*, u 8'5", según M. *Gottignies*, o, tomando la media entre ambos extremos,

8'10". Pero, según M. *Gottignies*, el cometa había sobrepasado la segunda estrella de Aries en aproximadamente una cuarta o quinta parte del espacio que generalmente recorría en un día, es decir, en aproximadamente 1'35" (en lo que concuerda muy bien con M. *Auzout*) o, según el doctor *Hooke*, en un poco menos, quizá sólo 1'. En consecuencia, si a la longitud de la primera estrella de Aries añadimos 1', y 8'10" a su latitud, tendremos la longitud del cometa en 29° 18', con 8°36'26" de latitud. norte.

El 7 de marzo, a las 7^h30^m en *París*, es decir, el 7 de marzo a las 7^h37^m en *Dantzig*, según las observaciones de M. *Auzout*, la distancia del cometa a la segunda estrella de Aries era igual a la distancia de dicha estrella a la estrella A, es decir, 52'29", y la diferencia de longitud entre el cometa y la segunda estrella de Aries era 45' ó 46', o, tomando la cantidad media, 45'30". En consecuencia, el cometa estaba en ♉ 0°2'48". Basándose en el dibujo construido por M. *Petit* a partir de las observaciones de M. *Auzout*, *Hewelcke* determinó una latitud del cometa de 8°54'. Pero el grabador no había trazado correctamente la curvatura de la trayectoria del cometa hacia el fin del movimiento, y *Hevelius*, en el dibujo sobre las observaciones de M. *Auzout* que él mismo construyó, corrigió esta curvatura irregular, estableciendo la latitud del cometa en 8°55'30". Corrigiendo aún más esta irregularidad, la latitud puede alcanzar los 8 56' ó los 8 57'.

Este cometa se vio también el 9 de marzo, y en esa fecha su lugar debía estar en ♉ 0 18', con 9 $3\frac{1}{2}$' de latitud norte, aproximadamente.

Este cometa se vio durante tres meses, y en el transcurso de este tiempo recorrió casi seis signos, y un día describió casi 20 grados. Su curso se desvió mucho de un gran círculo, doblando hacia el norte, y su movimiento retrógrado se hizo hacia el final directo. A pesar de que siguió un curso tan poco corriente, la tabla demuestra que la teoría concuerda de principio a fin con las observaciones tan exactamente como las teorías de los planetas suelen concordar con sus observaciones. Debemos, sin embargo, sustraer unos 2' cuando el cometa era más veloz, cosa que podemos hacer quitando 12" al ángulo entre el nodo ascendente y el perihelio, o haciendo ese ángulo de 49° 27'18". La paralaje anual de ambos cometas (éste y el precedente) era muy conspicua, y su cantidad demuestra el movimiento anual de la Tierra por la órbita de la Tierra.

1683 Tiempo ecuatorial		Lugar del Sol	Longitud calculada del cometa	Latitud norte calculada	Longitud observada del cometa	Latitud norte observada	Diferencia longitud	Diferencia latitud
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
Jul.	13,12,55	☌ 1, 2,30	♋ 13, 5,42	29,28,13	♋ 13, 6,42	29,28,20	+1, 0	+0, 7
	15,11,15	2,53,12	11,37,48	29,34, 0	11,39,43	29,34,50	+1,55	+0,50
	17,10,20	4,45,45	10, 7, 6	29,33,30	10, 8,40	29,34, 0	+1,34	+0,30
	23,13,40	10,38,21	5,10,27	28,51,42	5,11,30	28,50,28	+1, 3	−1,14
	25,14, 5	12,35,28	3,27,53	24,24,47	3,27, 0	28,23,40	−0,53	−1, 7
	31, 9,42	18, 9,22	♊ 27,55, 3	26,22,52	♊ 27,54,24	26,22,25	−0,39	−0,27
	31,14,55	18,21,53	27,41, 7	26,16,57	27,41, 8	26,14,50	+0, 1	−2, 7
Ag.	2,14,56	20,17,16	25,29,32	25,16,19	25,28,46	25,17,28	−0,46	+1, 9
	4,10,49	22, 2,50	23,18,20	24,10,49	23,16,55	24,12,19	−1,25	+1,30
	6,10, 9	23,56,45	20,42,23	22,47, 5	20,40,32	22,49,05	−1,51	+2, 0
	9,10,26	26,50,52	16, 7,57	20, 6,36	16, 5,55	20, 6,10	+2, 2	−0,27
	15,14, 1	♍ 2,47,13	3,30,48	11,37,33	3,26,18	11,32, 1	−4,30	−5,32
	16,15,10	3,48, 2	0,43, 7	9,34,16	0,41,55	9,34,13	−1,12	−0, 3
	18,15,44	5,45,33	♌ 24,52,53	5,11,15 Sur	♌ 24,49, 5	5, 9,11 Sur	−3,48	−2, 4
	22,14,44	9,35,49	11, 7,14	5,16,58	11, 7,12	5,16,58	−0, 2	−0, 3
	23,15,52	10,36,48	7, 2,18	8,17,09	7, 1,17	8,16,41	−1, 1	−0,28
	26,16, 2	13,31,10	♈ 24,45,31	16,38, 0	♈ 24,44, 0	16,38,20	−1,31	+0,20

Esta teoría es también confirmada por el movimiento del cometa retrógrado que apareció en el año 1683 por una órbita cuyo plano formaba casi un ángulo recto con el plano de la eclíptica y cuyo nodo ascendente (según los cálculos del doctor *Halley*) estaba en ♍ 23°23′; la inclinación de su órbita a la eclíptica era 83°11′, su perihelio estaba en ♋ 25°29′30″, su distancia perihélica al Sol era de 56020 partes del radio de la órbita de la Tierra dividido en 100000, y la fecha de su perihelio fue el 2 de julio, a las $3^h50'$. En la tabla anterior se comparan los lugares calculados por el doctor *Halley* en esta órbita con los lugares observados por Mr. *Flamsteed*.

El movimiento del cometa retrógrado que apareció el año 1682 confirma también esta teoría. El nodo ascendente del mismo (según los cálculos del doctor *Halley*) estaba en ♉ 21°16′30″, la inclinación de su órbita hacia el plano de la eclíptica era de 17°56′00′, su perihelio estaba en ♒ 2°52′50″, su distancia perihélica al Sol era de 58328 partes del radio de la órbita de la Tierra dividido en 100000, y su fecha de paso por el perihelio fue el 4 de septiembre, a las 7^h39^m. En la siguiente tabla se comparan los lugares determinados por las observaciones de Mr. *Flamsteed* con los lugares calculados por nuestra teoría.

El movimiento retrógrado del cometa que apareció el año 1723 confirma también esta teoría. El nodo ascendente de este cometa (según los cálculos de Mr. *Bradley*, profesor Saviliano de Astronomía en *Oxford*) estaba en ♈ 14°16′, la inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica era de 49°59′, su perihelio estaba en ♉ 12°15′20″, su distancia perihélica al Sol era de 998651 partes del radio de la órbita de la Tierra dividido en 100000, y su fecha de paso por el perihelio el 16 de septiembre, a las 16^h10^m. En la siguiente tabla se exponen los lugares del cometa calculados en esta órbita por Mr. *Bradley*, comparados con los lugares observados por él mismo, su tío Mr. *Pound*, y el doctor *Halley*.

Estos ejemplos demuestran sobradamente que los movimientos de los cometas no son representados por nuestra teoría con menos exactitud que los movimientos de los planetas por sus teorías. En consecuencia, utilizando nuestra teoría, podemos enumerar las órbitas de los cometas y de esta forma descubrir el tiempo periódico de la revolución de un cometa por cualquier

1682 Tiempo ap.		Lugar del Sol	Longitud calculada del cometa	Latitud norte calculada	Longitud observada del cometa	Latitud norte observada	Diferencia longitud	Diferencia latitud
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
Ag.	19,16,38	♍ 7, 0, 7	♌ 18,14,28	25,50, 7	♌ 18,14,40	25,49,55	−0,12	+0,12
	20,15,38	7,55,52	24,46,23	26,14,42	24,46,22	26,12,52	+0, 1	+1,50
	21, 8,21	8,36,14	29,37,15	26,20, 3	29,38, 2	26,17,37	−0,47	+2,26
	22, 8, 8	9,33,55	♍ 6,29,53	26, 8,42	♍ 6,30, 3	26, 7,12	−0,10	+1,30
	29, 8,20	16,22,40	♎ 12,37,54	18,37,47	♎ 12,37,49	18,34, 5	+0, 5	+3,42
	30, 7,45	17,19,41	15,36, 1	17,26,43	15,35,18	17,27,17	+0,43	−0,34
Sept.	1, 7,33	19,16, 9	20,30,53	15,13, 0	20,27, 4	15, 9,49	+3,49	+3,11
	4, 7,22	22,11,28	25,42, 0	12,23,48	25,40,58	12,22, 0	+1, 2	+1,48
	5, 7,32	23,10,29	27, 0,46	11,33,08	26,59,24	11,33,51	+1,22	−0,43
	8, 7,16	26, 5,58	29,58,44	9,26,46	29,58,45	9,26,43	−0, 1	+0, 3
	9, 7,26	27, 5, 9	♏ 0,44,10	8,49,10	♏ 0,44, 4	8,48,25	+0, 6	+0,45

1723 Tiempo ecuatorial		Longitud observada del cometa	Latitud norte observada	Longitud calculada del cometa	Latitud norte calculada	Diferencia longitud	Diferencia latitud
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Oct.	9,8, 5	≈ 7,22,15	5, 2, 0	≈ 7,21,26	5, 2,47	+49	−47
	10,6,21	6,41,12	7,44,13	6,41,42	7,43,18	−50	+55
	12,7,22	5,39,58	11,55, 0	5,40,19	11,54,55	−21	+05
	14,8,57	4,59,49	14,43,50	5, 0,37	14,44, 1	−48	−11
	15,6,35	4,47,41	15,40,51	4,47,45	15,40,55	− 4	− 4
	21,6,22	4, 2,32	19,41,49	4, 2,21	19,42, 3	+11	−14
	22,6,24	3,59, 2	20, 8,12	3,59,10	20, 8,17	− 8	− 5
	25,8, 2	3,55,29	20,55,18	3,55,11	20,55, 9	+18	+ 9
	29,8,56	3,56,17	22,20,27	3,56,42	22,20,10	−25	+17
	30,6,20	3,58, 9	22,32,28	3,58,17	22,32,12	− 8	+16
Nov.	5,5,53	4,16,30	23,38,33	4,16,23	23,38, 7	+ 7	+26
	8,7, 6	4,29,36	24, 4,30	4,29,54	24, 4,40	−18	−10
	14,6,20	5, 2,16	24,48,46	5, 2,51	24,48,16	−35	+30
	20,7,45	5,42,20	25,24,45	5,43,13	25,25,17	−53	−32
Dic.	7,6,45	8, 4,13	26,54,18	8, 3,55	26,53,42	+18	+36

órbita. Con ello, finalmente, obtendremos los diámetros transversales de sus órbitas elípticas y sus distancias afélicas.

El cometa retrógrado que apareció el año 1607 describió una órbita cuyo nodo ascendente (según los cálculos del doctor *Halley*) estaba en ♉ 20°21′; la inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica era de 17°2′, su perihelio estaba en ♒ 2°16′, su distancia perihélica al Sol era de 58680 partes del radio de la órbita de la Tierra dividido en 100000, y su fecha de paso por el perihelio fue el 16 de octubre, a las $3^h 50^m$, órbita que concuerda muy aproximadamente con la órbita del cometa que se vio el año 1682. Si no se trata de dos cometas distintos, sino de uno solo, este cometa completará una revolución cada 75 años, y el eje mayor de su órbita será al eje mayor de la órbita de la Tierra como $\sqrt[3]{75^2}$ a 1, o como 1778 a 100, aproximadamente. Y la distancia afélica de este cometa al Sol será a la distancia media de la Tierra al Sol como 35 a 1, aproximadamente. En base a estos datos no será difícil determinar la órbita elíptica de este cometa. Pero todo ello debe entenderse condicionado a que, pasados 75 años, el cometa regrese de nuevo por la misma órbita. Parece que los otros cometas ascienden a mayores alturas, por lo que necesitan más tiempo para completar sus revoluciones.

Sin embargo, debido al gran número de cometas, a la gran distancia entre sus afelios y el Sol y a la gran lentitud de sus movimientos en el afelio, los cometas se perturbarán mutuamente con sus gravitaciones, debido a lo cual sus excentricidades y los tiempos de sus revoluciones a veces aumentarán y a veces disminuirán un poco. No debemos, en consecuencia, esperar que los cometas regresen exactamente por la misma órbita y en los mismos tiempos periódicos. Bastará con que los cambios no sean mayores que lo que cabe atribuir a las causas recién mencionadas.

También podemos determinar la razón de que los cometas no estén, como los planetas, sujetos a los límites de un zodíaco, por lo que, sin atenerse a fronteras, se dispersan con movimientos diversos por todos los cielos. La razón de ello es que en sus afelios, donde sus movimientos son extremadamente lentos, se alejan unos de otros y sufren menos perturbaciones por su mutua gravitación, debido a lo cual los cometas que más descienden y, en consecuencia, se mueven con más lentitud en sus afelios, serán también los que más alto asciendan.

El cometa que apareció el año 1680 distaba del Sol en su perihelio menos de una sexta parte del diámetro del Sol, y, debido a su extremada velocidad en la proximidad del Sol, así como a cierta densidad de la atmósfera solar, tuvo que sufrir cierta resistencia y retardación. En consecuencia, como en cada revolución es atraído algo más cerca del Sol, terminará por caer en el cuerpo del mismo. También puede suceder que sea retardado en su afelio, donde se mueve con mayor lentitud, por las atracciones de otros cometas, y que debido a esta retardación descienda hasta el Sol. Así, algunas estrellas fijas, que se han ido gastando progresivamente por la prolongadísima emisión de luz y vapores, pueden ser alimentadas por cometas que caigan sobre ellas, y este renovador suministro de combustible, dándolas nuevo esplendor, las hará pasar por estrellas nuevas. A esta especie pertenecen esas estrellas fijas que aparecen de pronto, brillan inicialmente con maravilloso esplendor, y después desaparecen poco a poco. Así era la estrella que apareció en la Silla de Casiopea. *Cornelis Gemma* no la vio el 8 de noviembre de 1572, a pesar de que aquella noche observaba esa parte del firmamento y el cielo estaba perfectamente sereno. Sin embargo, la noche siguiente (9 de noviembre) la vio brillar con mayor fuerza que cualquier estrella fija y un esplendor apenas inferior al de Venus. *Tycho Brahe* la vio el 11 del mismo mes, brillando poderosamente, y a partir de entonces observó que decaía poco a poco, hasta desaparecer por completo pasados 16 meses. En el mes de noviembre, cuando apareció por vez primera, su luz era igual a la de Venus. En el mes de diciembre su luz había disminuido un poco y era igual a la de Júpiter. En enero de 1573 era menor que Júpiter y mayor que Sirio, y a fines de febrero y principios de marzo se hizo igual a esa estrella. En los meses de abril y mayo era como una estrella de segunda magnitud; en junio, julio y agosto, como una estrella de tercera magnitud; en septiembre, octubre y noviembre, como las de cuarta magnitud; en diciembre y enero de 1574, como las de quinta; en febrero, como las de sexta; y en marzo desapareció por completo. Al principio, su color era claro, brillante y tirando a blanco; después se volvió algo amarilla; en marzo de 1573 se hizo rojiza, como Marte o Aldebarán; en mayo adoptó una especie de blancura tenebrosa, como la que observamos en Saturno, y conservó ese color hasta el final, sin dejar de oscurecerse. Así fue también la estrella del pie derecho de Serpentarius, observada por primera vez por los alumnos de *Kepler*, en el mes de

septiembre de 1604, con una luz que superaba a la de Júpiter, a pesar de que en la noche anterior era invisible. A partir de ese momento decreció poco a poco, hasta desaparecer por completo transcurridos 15 ó 16 meses. Se dice que fue una estrella aparecida con este esplendor lo que llevó a *Hiparco* a observar y a confeccionar un catálogo de las estrellas fijas. Sin embargo, las estrellas fijas que aparecen y desaparecen sucesivamente y aumentan lenta y gradualmente, sin superar prácticamente nunca a las estrellas de tercera magnitud, parecen pertenecer a otra especie de estrellas, que giran en torno a sus ejes y, teniendo un lado luminoso y otro claro, los muestran alternativamente. Los vapores que se elevan desde el Sol, las estrellas fijas y las colas de los cometas pueden terminar por llegar a las atmósferas de los planetas y caer en ellas por su gravedad, para allí condensarse y convertirse en agua y espíritus húmedos y después adquirir gradualmente, por efecto de un calor lento, la forma de sales, azufres, tinturas, barro, arcilla, arena, piedras, coral y otras sustancias terrestres.

ESCOLIO GENERAL

La hipótesis de los vórtices tropieza con muchas dificultades. Para que todo planeta, mediante un radio trazado hasta el Sol, pueda describir áreas proporcionales a los tiempos, los tiempos periódicos de las diversas partes de los vórtices deberían conservar la razón del cuadrado de las distancias con respecto al Sol. Para que los tiempos periódicos de los planetas estén a la potencia $\frac{3}{2}$ de sus distancias al Sol, los tiempos periódicos de las partes del vórtice deben estar a la potencia $\frac{3}{2}$ de sus distancias. Para que los vórtices menores puedan mantener sus revoluciones en torno a Saturno, Júpiter y otros planetas, nadando tranquilamente en el gran vórtice del Sol, los tiempos periódicos de las partes del vórtice solar deben ser iguales. Pero la rotación del Sol y de los planetas en torno a sus ejes, que debería corresponder a los movimientos de sus vórtices, discrepa mucho de todas esas proporciones. Los movimientos de los cometas son extremadamente regulares, están gobernados por las mismas leyes que los movimientos de los planetas y en modo alguno pueden explicarse mediante la hipótesis de los vórtices. Pues los cometas son arrastrados con movimientos muy excéntricos por todas las partes del cielo, con una libertad incompatible con la noción de un vórtice.

Los proyectiles sólo experimentan la resistencia del aire en nuestro aire. Suprímase el aire, como acontece en el vacío de *Boyle*, y la resistencia cesa, pues en este vacío una tenue pluma y un trozo de oro descienden con la misma velocidad. Y el mismo argumento debe aplicarse a los espacios celestes situados por

encima de la atmósfera terrestre; en esos espacios, donde no existe aire que resista sus movimientos, todos los cuerpos se moverán con la máxima libertad; y los planetas y cometas girarán perpetuamente en órbitas dadas por especie y posición, con arreglo a las leyes antes explicadas. Pero aunque esos cuerpos puedan continuar en sus órbitas por las meras leyes de gravedad, en modo alguno podrían haber adquirido a partir de esas leyes la posición regular de las órbitas mismas.

Los seis planetas primarios giran en torno al Sol en círculos concéntricos, con movimientos dirigidos hacia las mismas partes y casi en el mismo plano. Diez lunas giran en torno a la Tierra, Júpiter y Saturno en círculos concéntricos, con la misma dirección de movimiento y casi en los planos de las órbitas de esos planetas. Pero no debe suponerse que simples causas mecánicas podrían dar nacimiento a tantos movimientos regulares, puesto que los cometas vagan libremente por todas las partes de los cielos en órbitas muy excéntricas. Debido a ese tipo de movimiento, los cometas transitan muy veloz y fácilmente a través de los orbes de los planetas; y en sus afelios, donde se mueven con la máxima lentitud y se detienen el máximo tiempo, se alejan unos de otros hasta las mayores distancias, sufriendo así una perturbación mínima proveniente de sus atracciones mutuas. Este elegantísimo sistema del Sol, los planetas y los cometas sólo puede originarse en el consejo y dominio de un ente inteligente y poderoso. Y si las estrellas fijas son centros de otros sistemas similares, creados por un sabio consejo análogo, los cuerpos celestes deberán estar todos sujetos al dominio de *Uno*, especialmente porque la luz de las estrellas fijas es de la misma naturaleza que la luz solar, y desde cada sistema pasa a todos los otros. Y para que los sistemas de las estrellas fijas no cayesen unos sobre otros por efecto de la gravedad, los situó a inmensas distancias unos de otros.

Este rige todas las cosas, no como alma del mundo, sino como dueño de los universos. Y debido a esa dominación suele llamársele *señor dios*, *παντοκράτωρ*, o *amo universal*. Pues *dios* es una palabra relativa que se refiere a los siervos, y *deidad* es dominación de dios, no sobre el cuerpo propio –como piensan aquellos para los cuales dios es alma del mundo–, sino sobre siervos. El dios supremo es un ente eterno, infinito, absolutamente perfecto, pero un ente así perfecto y sin dominio no es el señor dios. Pues decimos dios mío, dios vuestro, dios de *Israel*, dios de dioses y dueño de dueños; pero no decimos eterno mío, eterno

vuestro, eterno *Israel*, eterno de dioses, ni decimos infinito mío ni perfecto mío. Estos títulos no guardan relación con los siervos. La voz dios[1] suele significar dueño, si bien no todo dueño es Dios. La dominación de un ente espiritual constituye a dios, verdadero si es verdadera, supremo si es suprema, ficticio si es ficticia. Y de su dominio verdadero se sigue que el verdadero dios es un ente vivo, inteligente y poderoso; y de las restantes perfecciones que es supremo o supremamente perfecto. Es eterno e infinito, omnipotente y omnisciente, esto es, dura desde la eternidad hasta la eternidad, y está presente desde lo infinito hasta lo infinito. Rige todo, y conoce todo cuanto es o puede ser hecho. No es eternidad e infinitud, sino eterno e infinito; no es duración o espacio, pero dura y está presente. Dura siempre y está presente en todas partes, funda la duración y el espacio. Como cada partícula de espacio es *siempre*, y como cada momento indivisible de duración es *ubicuo*, el creador y señor de todas las cosas jamás podrá ser *nunca* ni *ninguna parte*. Toda alma percibe en diferentes tiempos, con diversos sentidos y órganos de movimiento, pero sigue siendo la misma persona indivisible. En la duración se dan partes sucesivas, en el espacio partes coexistentes, pero ni lo uno ni lo otro pueden hallarse en la persona del hombre o en su principio pensante, y mucho menos en la substancia pensante de dios. En tanto en cuanto es una cosa dotada de percepción, todo hombre es uno e idéntico consigo mismo durante toda su vida en todos y cada uno de sus órganos sensoriales. Dios es uno y el mismo dios siempre y en todas partes. Su omnipresencia no es sólo *virtual*, sino *substancial*, pues la virtud no puede subsistir sin substancia. Todas las cosas están contenidas y movidas en él[2], pero uno y

[1] *Pocock* deriva el latín *dei* del árabe *du* (y en caso oblicuo *dī*), que significa *señor*. Y en este sentido se llaman los príncipes *dioses*, como en *Salmos* 1xxxii, ver. 6; y *Juan* X, ver. 35. Y *Moisés* es llamado *dios* por su hermano *Aarón* y por el *Faraón* (*Exodo* IV, ver. 16; y VII, ver. 1). Y en el mismo sentido los paganos llamaban *dioses* a las almas de príncipes muertos, aunque falsamente, debido a su falta de dominio.

[2] Esta era la opinión de los antiguos. Así *Pitágoras*, en *Cicerón*, *De Natura Deorum*, lib. I, *Tales*, *Anaxágoras*, *Virgilio*, Georg., lib. IV, ver. 220; y Eneida, lib. VI, ver. 721. *Filón* Allegor, al comienzo del lib. I, *Aratus* en sus *Fenómenos*, al comienzo. Así también los escritores sagrados, como *San Pablo*, *Actos* XVII, ver. 27,28. El Evangelio de *San Juan*, cap. XIV, ver. 2. *Moisés*, en *Deut.* IV, ver. 39; y X, ver. 14. *David*, en *Salmos* CXXXIX, ver. 7, 8, 9. *Salomón*, I, *Reyes* VIII, ver. 27. *Job*, XXII, ver. 12, 13. *Jeremías*, XXIII, ver. 23, 24. Los idólatras supusieron que el Sol, la Luna, las estrellas, las almas de los hombres y otras partes del mundo eran partes del dios supremo y debían ser veneradas en consecuencia, pero erróneamente.

otras no se afectan mutuamente. Dios nada padece por el movimiento de los cuerpos, y los cuerpos no hallan resistencia en la ubicuidad de dios. Se reconoce que un dios supremo existe necesariamente, y por la misma necesidad existe *siempre* y en *todas partes*. Por lo mismo, es todo similar, todo ojo, todo oído, todo cerebro, todo brazo, todo poder para percibir, entender y obrar, pero de un modo para nada humano, para nada corpóreo, radicalmente desconocido para nosotros. Así como un ciego no tiene idea de los colores, así carecemos nosotros de idea sobre el modo en que el dios sapientísimo percibe y entiende todas las cosas. Está radicalmente desprovisto de todo cuerpo y figura corporal, con lo cual no puede ser visto, escuchado o tocado; y tampoco debería ser adorado bajo la representación de cualquier cosa corpórea. Tenemos ideas sobre sus atributos, pero no conocemos en qué consiste la substancia de cosa alguna. En los cuerpos sólo vemos sus figuras y colores, sólo escuchamos los sonidos, sólo tocamos sus superficies externas, sólo olemos los olores y gustamos los sabores. Sus substancias íntimas no son conocidas por ningún sentido o por acto reflejo alguno de nuestras mentes. Mucho menos podremos formar cualquier idea sobre la substancia de dios. Sólo le conocemos por propiedades y atributos, por las sapientísimas y óptimas estructuras de las cosas y causas finales, y le admiramos por sus perfecciones; pero le veneramos y adoramos debido a su dominio, pues le adoramos como siervos. Y un dios sin dominio, providencia y causas finales nada es sino hado y naturaleza. Una ciega necesidad metafísica, idéntica siempre y en todas partes, es incapaz de producir la variedad de las cosas. Toda esa diversidad de cosas naturales, que hallamos adecuada a tiempos y lugares diferentes, sólo puede surgir de las ideas y la voluntad de un ente que existe por necesidad. Alegóricamente se dice que dios ve, habla, ríe, ama, odia, desea, da, recibe, se alegra, se encoleriza, lucha, fabrica, trabaja y construye. Pues todas nuestras nociones de dios se obtienen mediante cierta analogía con las cosas humanas, analogía que a pesar de no ser perfecta conserva cierta semejanza. Y esto por lo que concierne a dios, de quien procede ciertamente hablar en filosofía natural partiendo de los fenómenos.

Hasta aquí hemos explicado los fenomenos de los cielos y de nuestro mar por la fuerza gravitatoria, pero no hemos asignado aún causa a esa fuerza. Es seguro que debe proceder de una causa que penetra hasta los centros mismos del Sol y los planetas, sin sufrir la más mínima disminución de su fuerza; que

no opera de acuerdo con la cantidad de las superficies de las partículas sobre las que actúa (como suele acontecer con las causas mecánicas), sino de acuerdo con la cantidad de materia sólida contenida en ellas, propagándose en todas direcciones y hasta inmensas distancias, y decreciendo siempre como el cuadrado inverso de las distancias. La gravitación hacia el Sol está formada por la gravitación hacia las diversas partículas que componen el cuerpo del Sol; y al alejarse del Sol decrece exactamente como el cuadrado inverso de las distancias hasta la órbita de Saturno, como demuestra con evidencia la quietud del afelio de los planetas, e incluso el afelio más remoto de los cometas, si tales afelios son también invariables. Pero hasta el presente no he logrado descubrir la causa de esas propiedades de gravedad a partir de los fenómenos, y no finjo hipótesis. Pues todo lo no deducido a partir de los fenómenos ha de llamarse una hipótesis, y las hipótesis metafísicas o físicas, ya sean de cualidades ocultas o mecánicas, carecen de lugar en la filosofía experimental. En esta filosofía las proposiciones particulares se infieren a partir de los fenómenos, para luego generalizarse mediante inducción. Así se descubrieron la impenetrabilidad, la movilidad, la fuerza impulsiva de los cuerpos, las leyes del movimiento y de gravitación. Y es bastante que la gravedad exista realmente, y actúe con arreglo a las leyes que hemos expuesto, sirviendo para explicar todos los movimientos de los cuerpos celestes y de nuestro mar.

Podríamos ahora añadir algo sobre cierto espíritu sutilísimo que penetra y yace latente en todos los cuerpos grandes, por cuya fuerza y acción las partículas de los cuerpos se atraen unas a otras cuando se encuentran a escasa distancia y se ligan en caso de estar contiguas; y los cuerpos eléctricos operan a distancias mayores, repeliendo tanto como atrayendo a los corpúsculos vecinos; y la luz es emitida, reflejada, refractada, curvada y calienta los cuerpos; y toda sensación es excitada, y los miembros de los cuerpos animales se mueven a la orden de la voluntad, propagada por las vibraciones de este espíritu siguiendo los filamentos sólidos de los nervios, desde los órganos externos hasta el cerebro y desde el cerebro hasta los músculos. Pero éstas son cosas que no pueden ser explicadas en pocas palabras. Por otra parte, tampoco disponemos de una cantidad suficiente de experimentos para determinar con precisión y demostrar mediante qué leyes opera este espíritu eléctrico y elástico.